Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

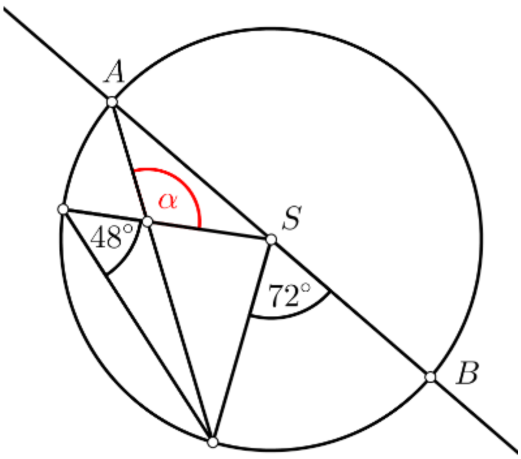
ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
1. razred – srednja škola – B – varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Učenici jedne škole putovali su na školski izlet u zabavni park Mathland. Najpoznatije su atrakcije parka adrenalinski vlak, kuća smijeha i vodeni tobogan. U sljedećoj tablici prikazano je koliki je udio učenika isprobao koju od navedenih atrakcija.

Naziv atrakcije	**Udio učenika**
Adrenalinski vlak	82 %
Kuća smijeha	78 %
Vodeni tobogan	78 %
Adrenalinski vlak i kuća smijeha	62 %
Adrenalinski vlak i vodeni tobogan	66 %
Kuća smijeha i vodeni tobogan	60 %

Sve tri kategorije atrakcija isprobalo je 25 učenika. Svi su učenici isprobali barem jednu atrakciju. Koliko je ukupno učenika putovalo na izlet u Mathland?

2. (6 bodova) Kružnica sa središtem u točki S prikazana je na skici. Kolika je mjera označenoga kuta α?



3. (6 bodova) Izraz

$$\frac{90 \cdot 45^{2n-1} - 3^{4n+1} \cdot 5^{2n}}{2025^{n-1}}$$

pojednostavite do kraja.

4. (6 bodova) Riješite jednadžbu

$$\frac{2x+2}{2023} - \frac{x+2}{1012} = \frac{2x+6}{2025} - \frac{x}{1011}.$$

5. (6 bodova) Odredite četveroznamenkasti broj koji zadovoljava sljedeće uvjete:
   - Znamenka jedinica toga broja 4 je puta veća od znamenke tisućica.
   - Znamenka desetica toga broja za 6 je veća od znamenke stotica.
   - Zbroj znamenki toga broja djeljiv je s 5.
   - Ako taj broj uvećamo za 2025, rezultat je broj koji je djeljiv s 3.

6. (10 bodova) Tri se kružnice k_1, k_2 i k_3 međusobno dodiruju izvana. Polumjer kružnica k_1 i k_2 iznosi 8 cm, a polumjer kružnice k_3 je 9 cm. Središta kružnica k_1, k_2 i k_3 vrhovi su trokuta. Je li težište toga trokuta udaljenije od središta tome trokutu opisane kružnice ili od središta tome trokutu upisane kružnice i za koliko?

7. (10 bodova) Lorna se s prijateljicama zabavlja pogađanjem brojeva. Svaka od pet Lorninih prijateljica zapisala je na papir jedan prirodni broj. Od tih pet brojeva izabrale su četiri i zbrojile ih. Nakon toga popisale su sve moguće takve izbore po četiri broja i izračunale njihove zbrojeve. Otkrile su Lorni da takvim zbrajanjem uvijek dobiju broj 38, 52 ili 57. Koje su brojeve zapisale Lornine prijateljice?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
2. razred – srednja škola – B – varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Riješite kvadratnu jednadžbu $(a-1)x^2 + ax + \frac{a+1}{4} = 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Odredite realni broj a tako da je barem jedno rješenje navedene kvadratne jednadžbe pozitivan realan broj.

2. (6 bodova) Zadan je pravokutnik $ABCD$ i točka M unutar njega. Ako vrijedi $|\overline{AM}| = 40$, $|\overline{BM}| = 4$ i $|\overline{CM}| = 21$ izračunajte duljinu dužine $\overline{DM}$.

3. (6 bodova) Neka je zadana funkcija f sa svojstvom $f(3n) = n \cdot f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka za tu funkciju vrijedi da je $f(1) = 1$. Izračunajte $f(243)$.

4. (6 bodova) Dokažite da jednadžba $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 11$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

5. (6 bodova) Domagoj je na kreditnoj kartici imao iznos koji je pokazivao x eura i y centi. U trgovini je potrošio točno polovinu novca. Nakon kupovine iznos na kreditnoj kartici koji se odnosi na cente bio je jednak iznosu koji se odnosio na eure prije kupovine, dok je iznos koji se odnosi na eure bio jednak polovici iznosa koji se odnosio na cente prije kupovine. Koji je iznos novca Domagoj imao na kreditnoj kartici pri ulasku u trgovinu?

6. (10 bodova) Izračunajte zbroj:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \cdots + \frac{1}{9800}.$$

7. (10 bodova) Dokažite da je $\left(5+\sqrt{21}\right) \cdot \left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right) \cdot \sqrt{5-\sqrt{21}}$ cijeli broj.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
3. razred – srednja škola – B-varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Kolika je vrijednost izraza $\cos\left(2025^{\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}}\cdot\pi\right)$?

2. (6 bodova) Odredite sve vrijednosti realnog parametra a tako da jednadžba

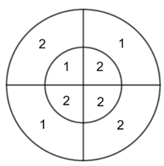
$$4^x-(a+3)2^x+4(a-1)=0$$

ima točno jedno realno rješenje.

3. (6 bodova) Jednakokračni trokut rotira oko osnovice duljine a. Ako je duljina visine na osnovicu dvostruko veća od duljine visine na krak, koliko je oplošje nastalog rotacijskog tijela?

4. (6 bodova) Poznato je da su $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2-x+p=0$, $p\in\mathbb{R}$ te vrijedi još i $\sin^2\beta+2\cos^2\beta+p=\frac{5}{12}$. Odredite β ako je $0°\leq\beta\leq 180°$.

5. (6 bodova) Antina je omiljena igra pikado, no ovaj je put umjesto tradicionalne ploče odlučio koristiti metu sa skice. Polumjer unutrašnjega kruga dvostruko je manji od polumjera vanjskoga, a istaknuti promjeri međusobno su okomiti. Kolika je vjerojatnost da zbroj bodova koje Ante ostvari u dva bacanja strelice bude paran?



6. (10 bodova) Odredite skup svih vrijednosti koje funkcija

$$f(x)=(\log_3 x)^4+16(\log_3 x)^2\cdot\log_3\frac{81}{x}$$

poprima na intervalu $[1,3^8]$. Za koji x iz tog intervala funkcija postiže najveću vrijednost?

7. (10 bodova) Duljine stranica trokuta ABC su $|AB|=24\,cm$, $|AC|=32\,cm$, $|BC|=40\,cm$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrane su točke D i E tako da je $|BD|=8\,cm$, $|CE|=16\,cm$. Kolika je mjera kuta $\measuredangle DAE$?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – B-varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Izračunajte zbroj rješenja jednadžbe

$$\sin x + \cos x + |\sin x - \cos x| = 1,$$

za $x \in [0, 2\pi]$.

2. (6 bodova) Odredite duljinu tetive koju kružnica $(x+4)^2 + (y-3)^2 = r^2$ odsijeca na osi ordinata, ako je poznato da je duljina tetive koju odsijeca na osi apscisa jednaka 6 jediničnih dužina.

3. (6 bodova) Odredite sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $\overline{z}i = z^2$.

4. (6 bodova) Zadani su nizovi za koje vrijedi $a_1 = b_1 = 25$ i $b_n = a_n - a_{n-1} = 3n + 22$. Izračunajte a_{200} i b_{200}.

5. (6 bodova) Dva uspravna stošca imaju zajedničku os, a baze tih stožaca su koncentrični krugovi u istoj ravnini. Polumjer baze višeg stošca, kojemu je visina dva puta dulja od visine nižeg stošca, dva puta je kraći od polumjera baze nižeg stošca. Izračunajte duljinu kružnice koja je sjecište plaštova ovih dvaju stožaca, ako je dana duljina R polumjera baze nižeg stošca.

6. (10 bodova) Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi da je

$$x! + 3 = y^2.$$

7. (10 bodova) Izračunajte vrijednost x u izrazu

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^n$$

razvoja binoma čiji je četvrti član jednak 200, a umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak je 30.