Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
1. razred – srednja škola – A-varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Odredite sve dvoznamenkaste prirodne brojeve za koje vrijedi da su točno tri puta veći od umnoška svojih znamenaka.

2. (6 bodova) Neka su a i b pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$a^2 + b^2 = 10 \qquad \text{i} \qquad a^4 + b^4 = 82.$$

Odredite vrijednost izraza $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3}$.

3. (6 bodova) Dokažite da je broj $2030^{12} - 2020^{12}$ djeljiv s brojem 2025.

4. (6 bodova) Jedan kut pravokutnog trokuta ΔABC iznosi $30°$, a kraća kateta duljine je 3 cm. U polovištu S hipotenuze $\overline{AB}$ podignuta je okomica na hipotenuzu i njezino sjecište s duljom katetom označeno je s D. Odredite duljinu dužine $\overline{SD}$.

5. (6 bodova) Odredite zadnju znamenku zbroja $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025}$.

6. (10 bodova) Koliko ima brojeva u skupu $S = \{1, 2, \ldots, 300\}$ koji nisu djeljivi ni s jednim od brojeva 3, 5 i 7?

7. (10 bodova) Lukin broj pratitelja na društvenoj mreži svake godine raste za 50, dok Markov broj pratitelja raste za 20. Trenutačno Luka ima tri puta više pratitelja nego što je Marko imao u trenutku kada je Lukin broj pratitelja bio jednak trenutačnom broju Markovih pratitelja. Pretpostavlja se da će Marku trebati 5 godina da dostigne trenutačan broj Lukinih pratitelja. Koliko pratitelja Luka i Marko imaju trenutačno?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
2. razred – srednja škola – A – varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Odredite realan parametar m za koji je kvadrat razlike rješenja jednadžbe $x^2 + 2mx + m = 1$ najmanji te odredite najmanju pripadnu vrijednost.

2. (6 bodova) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija f, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$
rastuća.

3. (6 bodova) Odredite sve one troznamenkaste prirodne brojeve koji su jednaki zbroju svoje znamenke stotice, kvadrata znamenke desetice i kuba znamenke jedinice.

4. (6 bodova) Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ međusobno različiti realni brojevi, za neki realan parametar c, dokažite da tada korijeni jednadžbe
$$(1 + c)(x^2 + 2x + c) - 2(c - 1)(x^2 + 1) = 0$$
ne mogu biti realni.

5. (6 bodova) Ako je
$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a,$$
koliko je $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3$?

6. (10 bodova) Neka je trokut ABC proizvoljni pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C, katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c.
   a) Dokažite da će u svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta umanjen za duljinu hipotenuze biti jednak duljini promjera tom trokutu upisane kružnice.
   b) U kojem su omjeru duljine stranica pravokutnog trokuta ako se duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice i duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice odnose kao $5 : 2$?

7. (10 bodova) Promotrimo tablicu brojeva s 50 redaka i 50 stupaca, oblika:
$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,49} & a_{1,50} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,49} & a_{2,50} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{49,50} & a_{49,50} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{50,50} \end{bmatrix}$$
pri čemu oznaka $a_{i,j}$ označava broj koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu i pri čemu su brojevi $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{50,50}$ iz skupa $S = \{2, 3 \dots, 22\}$. Odredite broj tablica navedenog oblika koje u svakom retku imaju točno jedan neparan broj. (Napomena: konačno rješenje može se napisati u obliku umnoška, bez dodatnog računanja.)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
3. razred – srednja škola – A – varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Neka su a i b znamenke za koje vrijedi

$$\overline{aaa} + \overline{aab} + \overline{abb} + \overline{bbb} = 1503.$$

Koliko je tada $a^b + b^a$?

2. (6 bodova) Ako je $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, koliko je $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \cos^4\alpha$?

3. (6 bodova) Dan je valjak s visinom duljine 10 cm. Na obodima njegovih osnovki su točke A i B takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka po plaštu, njezina će duljina biti 15 cm. Kolika je duljina najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B?

4. (6 bodova) Riješite jednadžbu

$$\log_{2x+7}(4 + 12x + 9x^2) + \log_{3x+2}(6x^2 + 25x + 14) = 4$$

u skupu realnih brojeva.

5. (6 bodova) Može li se broj

$$\sqrt{104\sqrt{6} + 468\sqrt{10} + 144\sqrt{15} + 2025}$$

zapisati u obliku $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$ za neke prirodne brojeve a, b i c?

6. (10 bodova) Riješite jednadžbu

$$2^x = 3^y + 1$$

u skupu cijelih brojeva.

7. (10 bodova) Odredite sve moguće vrijednosti prostog broja $p \geq 5$ za koje postoji barem jedan par prirodnih brojeva (x, y) koji je rješenje jednadžbe

$$\frac{16}{x} + \frac{25}{y} = p.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – A-varijanta
14. veljače 2025.

1. (6 bodova) Odredite zbroj koeficijenata uz sve neparne potencije od x u razvoju zbroja binoma

$$\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5,$$

gdje je $x>1$.

2. (6 bodova) Neka je z kompleksan broj takav da vrijedi

$$z+z^{-1}=1.$$

Odredite $z^{46}+z^{47}+z^{48}+z^{49}+z^{50}$.

3. (6 bodova) Zadan je pravac s jednadžbom $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{5}$. Dokažite da je udaljenost svake točke s cjelobrojnim koordinatama do zadanog pravca veća od $\dfrac{1}{30}$.

4. (6 bodova) Pronađite sve parove prirodnih brojeva (x,y) za koje vrijedi

$$x^2+y^2=2025.$$

5. (6 bodova) Zadan je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takav da je $a_0=a$, $a_1=b$, gdje su a, $b\in\mathbb{R}$, i

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\quad n\geq 2.$$

Odredite $a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}$.

6. (10 bodova) Koliko ima tročlanih podskupova skupa $S=\{1,2,3,\ldots,50\}$ kojima je umnožak članova djeljiv s 4?

7. (10 bodova) Sinusi unutarnjih kutova nekog pravokutnog trokuta čine aritmetički niz. U kojem su omjeru duljine stranica tog trokuta?