Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – A-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Odredite zbroj koeficijenata uz sve neparne potencije od x u razvoju zbroja binoma
$$\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5,$$
gdje je $x>1$.

Rješenje 1: Prema binomnom poučku vrijedi

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\ (a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.\end{aligned}$$ 1 bod

Iz gornjeg slijedi

$$(a+b)^5+(a-b)^5=2(a^5+10a^3b^2+5ab^4). \tag{1}$$ 1 bod

Sada uvedemo supstituciju
$$a=x,\ b=\sqrt{x^3-1}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem u jednadžbu (1) dobivamo

$$\begin{aligned}\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5 &= 2\left(x^5+10x^3(x^3-1)+5x(x^3-1)^2\right)=\\ &= 2(x^5+10x^6-10x^3+5x^7-10x^4+5x).\end{aligned}$$

2 boda

Konačno, zbroj koeficijenata svih neparnih stupnjeva u gornjem razvoju jednak je

$$\sum=2(1-10+5+5)=2.$$ 1 bod

Rješenje 2: Iskoristimo li binomnu formulu, dobivamo

$$\begin{aligned}&\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5=\\ =\ &\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}\sqrt{x^3-1}^{\,k}+\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^k x^{5-k}\sqrt{x^3-1}^{\,k}=\\ =\ &2\left[x^5+\binom{5}{2}x^3\sqrt{x^3-1}^{\,2}+\binom{5}{4}x\sqrt{x^3-1}^{\,4}\right]=\\ =\ &2\left[x^5+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}x^3(x^3-1)+5x(x^3-1)^2\right]=\\ =\ &2(x^5+10x^6-10x^3+5x^7-10x^4+5x).\end{aligned}$$

2 boda, 2 boda, 1 bod

Prema tome, zbroj koeficijenata svih neparnih stupnjeva u gornjem razvoju jednak je

$$\sum=2(1-10+5+5)=2.$$ 1 bod

2. (6 bodova) Neka je z kompleksan broj takav da vrijedi

$$z + z^{-1} = 1.$$

Odredite $z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50}$.

Rješenje 1: Zapišimo traženi izraz u obliku

$$z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} = z^{48}(z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2). \qquad (2)$$ 1 bod

Kvadriranjem uvjeta zadatka dobivamo

$$z^2 + z^{-2} = -1,$$ 1 bod

a kubiranjem uvjeta zadatka

$$z^3 + 2 + z^{-3} = 0.$$ 1 bod

Pomnožimo li gornju jednadžbu sa z^3, slijedi

$$\begin{aligned} z^6 + 2z^3 + 1 &= 0 \\ (z^3 + 1)^2 &= 0 \\ z^3 &= -1. \end{aligned}$$ 1 bod

Napokon, uvrštavanjem u (2) slijedi

$$\begin{aligned} z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} &= \left(z^3\right)^{16} \left(\left(z^{-2} + z^2\right) + \left(z^{-1} + z\right) + 1\right) = \\ &= (-1)^{16}(-1 + 1 + 1) = 1. \end{aligned}$$ 2 boda

Rješenje 2: Pomnožimo li uvjet zadatka sa z, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$z^2 - z + 1 = 0,$$

a množenjem ove jednadžbe sa $(z + 1)$ dobivamo zbroj kubova

$$z^3 + 1 = 0.$$ 2 boda

Prema tome je $z^3 = -1$. Zapišimo sada izraz

$$\begin{aligned} z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} &= z^{3\cdot 15+1} + z^{3\cdot 15+2} + z^{3\cdot 16} + z^{3\cdot 16+1} + z^{3\cdot 16+2} = \\ &= (z^3)^{15} z + (z^3)^{15} z^2 + (z^3)^{16} + (z^3)^{16} z + (z^3)^{16} z^2. \end{aligned}$$ 2 boda

Uvrštavajući $z^3 = -1$ u gornji izraz, slijedi

$$z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} = -z - z^2 + 1 + z + z^2 = 1.$$ 2 boda

3. (6 bodova) Zadan je pravac s jednadžbom $y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{4}{5}$. Dokažite da je udaljenost svake točke s cjelobrojnim koordinatama do zadanog pravca veća od $\dfrac{1}{30}$.

Rješenje:

Neka je T bilo koja točka s cjelobrojnim koordinatama (a, b) i p zadani pravac. Implicitni oblik jednadžbe pravca p glasi $25x - 15y + 12 = 0$, a udaljenost točke T do pravca p dana je s

$$d(T, p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}}.$$

1 bod

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. neka postoji točka T za koju je

$$\frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} \leq \frac{1}{30},$$

tj.

$$|25a - 15b + 12| \leq \frac{\sqrt{34}}{6}.$$

1bod

Kako su a i b cijeli brojevi, to je $25a - 15b + 12$ također cijeli broj, pa iz gornje nejednakosti zaključujemo da $25a - 15b + 12$ mora biti jednak 0. 1bod

Pokažimo sada da ne postoji par cijelih brojeva a, b koji zadovoljavaju jednadžbu $25a - 15b + 12 = 0$. Ako je $25a - 15b + 12 = 0$, onda je

$$b = \frac{25a + 12}{15} = 2a + 1 - \frac{5a + 3}{15}$$

1bod

i to je cijeli broj ako je $\frac{5a+3}{15}$ cijeli broj. Ovo je pak nemoguće jer ne postoji cijeli broj a za koji je izraz $5a + 3$ djeljiv s 5. 1 bod

Prema tome, početna je pretpostavka kriva, tj.

$$d(T, p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} > \frac{1}{30}.$$

1 bod

4. (6 bodova) Pronađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 = 2025.$$

Rješenje 1:

Kako je $2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2$, promotrimo jednadžbu modulo 9 i 5. 1 bod

Za svaki kvadrat prirodnog broja vrijedi

$$n^2 \equiv 0, 1, 4 \text{ ili } 7 \pmod 9$$
$$n^2 \equiv 0, 1 \text{ ili } 4 \pmod 5.$$

1 bod

Kako je desna strana jednadžbe broj djeljiv s 9^2 i 5^2, to mora biti i lijeva strana, što implicira da su x i y prirodni brojevi djeljivi s 9, dok za djeljivost s 5 imamo dva slučaja:

1 bod

1) x i y su djeljivi s 5:
   Sada je $x = 45k$ i $y = 45l$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo jednadžbu
   $$k^2 + l^2 = 1$$
   koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva. 1 bod
2) Jedan od njih daje ostatak 1, a drugi 2 pri dijeljenju s 5: Sada je jedan od brojeva oblika $45k + 36$, dok je drugi oblika $45l + 27$ za neke $k, l \in \mathbb{Z}$. Najmanji prirodni brojevi takvog oblika su 36 i 27, a kako je $36^2 + 27^2 = 2025$, zaključujemo da su jedina moguća rješenja početne jednadžbe $(36, 27)$ i $(27, 36)$. 2 bod

Rješenje 2:

Iz zadane jednadžbe zaključujemo da $x^2 < 2025$, tj. $x < 45$ pa je $x \in \{1, 2, \ldots, 43, 44\}$. (Isto vrijedi i za y). 1 bod

Kako je $2025 = 45^2 = 5^2 \cdot 9^2$, to je desna strana jednadžbe djeljiva s 9^2, pa mora biti i lijeva. 1 bod

Ostatak pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja s 9 je 0,1,4 ili 7, pa i x i y moraju biti djeljivi s 9. 1 bod

To znači da je $x \in \{9, 18, 27, 36\}$. 1 bod

Sada jednostavnim uvrštavanjem ove četiri mogućnosti za x pronalazimo prirodan broj y za koji je $y^2 = 2025 - x^2$.
Za $x = 9$ slijedi $y^2 = 1944$, a njegov korijen nije prirodan broj.
Za $x = 18$ slijedi $y^2 = 1701$, čiji korijen također nije prirodan broj.
Za $x = 27$ slijedi $y^2 = 1296$ pa je $y = 36$.
Za $x = 36$ slijedi $y^2 = 729$ pa je $y = 27$. 1 bod

Prema tome, rješenja jednadžbe su $(27, 37)$ i $(36, 27)$. 1 bod

Rješenje 3: Kako je $x^2 + y^2 = 45^2$, to je $(x, y, 45)$ jedna Pitagorina trojka. 1 bod

Kako je desna strana neparan broj, to mora biti i lijeva strana, pa je jedan od brojeva x, y paran, a drugi neparan. 1 bod

U tom slučaju, koristimo formulu za sve Pitagorine trojke,

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2,$$

pri čemu su d, m, n prirodni, m, n relativno prosti i $m > n$. 1 bod

Kako mora vrijediti
$$45^2 = [d(m^2 + n^2)]^2,$$
tj.
$$5^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = d^2 \cdot (m^2 + n^2)^2,$$
to je $d \in \{3, 5, 9, 15\}$, a $m^2 + n^2 \in \{15, 9, 5, 3\}$ redom. 1 bod

S obzirom na to da ne postoje prirodni brojevi m, n takvi da je $m^2 + n^2 \in \{15, 9, 3\}$, slijedi da je $d = 9$, a $m^2 + n^2 = 5$, tj. $m = 2$, $n = 1$. 1 bod

Sada je $x = d(m^2 - n^2) = 9 \cdot (4 - 1) = 27$, a $y = 2dmn = 2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$, a rješenja jednadžbe su $(27, 36)$ i $(36, 27)$. 1 bod

5. (6 bodova) Zadan je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ takav da je $a_0 = a$, $a_1 = b$, gdje su a, $b \in \mathbb{R}$, i
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Odredite $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$.

Rješenje:

Uvedimo oznaku $A_n = a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$. Tada za $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} A_n + A_{n+1} &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = \\ &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n(a_n + a_{n+1}) = \\ &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n a_{n+1} = \\ &= a_{n+1}^2 - a_{n+1}(a_{n-1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = 0. \end{aligned}$$

3 boda

Kako je $A_n + A_{n+1} = 0$, to slijedi

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^2 - a_0 a_2 = b^2 - a(a+b) = b^2 - a^2 - ab, \\ A_2 &= -A_1 \\ A_3 &= -A_2 = A_1 \\ &\vdots \\ A_n &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n-1}(b^2 - a^2 - ab). \end{aligned}$$

1 bod

1 bod

1 bod

6. (10 bodova) Koliko ima tročlanih podskupova skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ kojima je umnožak članova djeljiv s 4?

Rješenje:

Neka je A skup svih tročlanih podskupova skupa S. Takvih skupova ukupno ima

$$|A| = \binom{50}{3} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 19600.$$

2 boda

Umnožak tri broja nije djeljiv s 4 ako:

i) su svi brojevi neparni,

ii) su dva broja neparna i jedan paran, ali nije djeljiv sa 4.

2 boda

Razmotrimo sada ova dva slučaja:

i) Neka je B skup svih trojki kojima su svi elementi neparni. Neparnih je brojeva 25 pa je broj takvih trojki

$$|B| = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$$

2 boda

ii) Neka je C skup svih trojki kojima su dva broja neparna i jedan paran, ali nije djeljiv s 4. Dva neparna broja možemo izabrati na $\binom{25}{2} = 300$ načina.

1 bod

Parni brojevi koji nisu djeljivi sa 4 su 2, 6, 10,...,50 i ima ih 13.

1 bod

Prema tome, ukupan broj ovakvih trojki je

$$|C| = 13 \cdot 300 = 3900.$$ 1 bod

Konačno, tročlanih podskupova skupa S kojima je umnožak članova djeljiv sa 4 ima

$$|A| - |B| - |C| = 13400.$$ 1 bod

7. (10 bodova) Sinusi unutarnjih kutova nekog pravokutnog trokuta čine aritmetički niz. U kojem su omjeru duljine stranica tog trokuta?

Rješenje:

Neka su $a < b < c$ stranice, a $\alpha < \beta < \gamma = 90^\circ$ kutovi pravokutnog trokuta. Pokažimo najprije da stranice bilo kojeg trokuta čine aritmetički niz kada sinusi unutarnjih kutova čine aritmetički niz.

Ako je $\sin\beta = \sin\alpha + d$, $\sin\gamma = \sin\alpha + 2d$, iz poučka o sinusima,

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$ 1 bod

slijedi

$$\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\alpha + d, \quad \frac{c\sin\alpha}{a} = \sin\alpha + 2d,$$

tj.

$$b = a + \frac{ad}{\sin\alpha}, \quad c = a + \frac{2ad}{\sin\alpha},$$ 1 bod

što odgovara članovima aritmetičkog niza $\left(a, \dfrac{ad}{\sin\alpha}\right)$. 1 bod

Prema prethodnom, iz

$$2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$$ 1 bod

slijedi $2b = a + c$ tj.

$$a = 2b - c. \tag{3}$$

1 bod

Prema Pitagorinu poučku je $a^2 + b^2 = c^2$ pa uvrštavajući $a = 2b - c$ dobivamo

$$(2b - c)^2 + b^2 = c^2,$$

iz čega slijedi

$$5b^2 - 4bc = 0.$$ 1 bod

Dijenjenjem s $b \neq 0$ je

$$b = \frac{4}{5}c. \tag{4}$$ 1 bod

Iz (3) i (4) dobivamo $a = \dfrac{3}{5}c$ pa je 1 bod

$$a : b : c = \frac{3}{5}c : \frac{4}{5}c : c,$$ 1 bod

tj.

$$a : b : c = 3 : 4 : 5.$$ 1 bod