Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – B-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Izračunajte zbroj rješenja jednadžbe

$$\sin x + \cos x + |\sin x - \cos x| = 1,$$

za $x \in [0, 2\pi]$.

Rješenje:

Da bismo riješili zadanu jednadžbu s apsolutnom vrijednošću, potrebno je promatrati dva slučaja. 1 bod

- Prvi slučaj:
Ako je $\sin x - \cos x \geq 0$, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x + \sin x - \cos x &= 1 \\ 2\sin x &= 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbe $\sin x = \frac{1}{2}$ dobivamo rješenja $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Iz uvjeta zadatka da je $x \in [0, 2\pi]$ slijedi $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. 1 bod

Kako smo razmatrali slučaj u kojemu je $\sin x - \cos x \geq 0$, tj. $\sin x \geq \cos x$, uviđamo da dobiveno rješenje x_1 taj uvjet ne zadovoljava. Rješenje zadane jednadžbe je samo $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. 1 bod

- Drugi slučaj:
Ako je $\sin x - \cos x < 0$, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x - (\sin x - \cos x) &= 1 \\ 2\cos x &= 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem jednadžbe $\cos x = \frac{1}{2}$ dobivamo rješenja $x_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_4 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Iz uvjeta zadatka da je $x \in [0, 2\pi]$ slijedi $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{5\pi}{3}$. 1 bod

Kako smo razmatrali slučaj u kojemu je $\sin x - \cos x < 0$, tj. $\sin x < \cos x$, uviđamo da dobiveno rješenje x_3 taj uvjet ne zadovoljava. Rješenje zadane jednadžbe je samo $x_4 = \frac{5\pi}{3}$. 1 bod

Zbroj rješenja zadane jednadžbe je:

$$x_2 + x_4 = \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}.$$ 1 bod

2. (6 bodova) Odredite duljinu tetive koju kružnica $(x+4)^2+(y-3)^2=r^2$ odsijeca na osi ordinata, ako je poznato da je duljina tetive koju odsijeca na osi apscisa jednaka 6 jediničnih dužina.

Rješenje:

Ordinate krajnjih točaka tetive koja je na osi apscisa su $y=0$. Uvrštavanjem te koordinate u jednadžbu kružnice $(x+4)^2+(y-3)^2=r^2$ dobivamo:

$$x^2+8x-r^2+25=0.$$ 1 bod

Rješavanjem dobivene kvadratne jednadžbe dobivamo da je:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{64-4(25-r^2)}}{2} \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16-(25-r^2)} \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{r^2-9}. \end{aligned} \tag{1}$$ 1 bod

Duljina tetive jednaka je 6 jediničnih dužina pa vrijedi da je:

$$|x_1-x_2|=6. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je:

$$\begin{aligned} &\left|\left(-4+\sqrt{r^2-9}\right)-\left(-4-\sqrt{r^2-9}\right)\right|=6 \\ &\left|2\sqrt{r^2-9}\right|=6 \\ &\left|\sqrt{r^2-9}\right|=3 \\ &r^2-9=9 \\ &r^2=18. \end{aligned}$$ 1 bod 1 bod

Jednadžba zadane kružnice sada je jednaka:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=18. \tag{3}$$

Uvrštavanjem $x=0$ u jednadžbu kružnice (3) dobivamo:

$$16+(y-3)^2=18 \Rightarrow y_{1,2}=3\pm\sqrt{2}.$$ 1 bod

Duljina tražene tetive jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike ordinata krajnjih točaka te tetive, tj.

$$|y_1-y_2|=\left|\left(3+\sqrt{2}\right)-\left(3-\sqrt{2}\right)\right|=2\sqrt{2}$$

jediničnih dužina. 1 bod

Napomena: Ako učenik ima zapis za duljinu dužine bez apsolutne vrijednosti, a ima zapis ili skicu na osnovi koje može zaključiti koja je koordinata veća, a koja manja, bodovi mu se ne umanjuju.

3. (6 bodova) Odredite sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $\overline{z}i=z^2$.

Rješenje:

Označimo zadani kompleksni broj s: $z = x + yi$. Tada vrijedi da je:

$$\begin{aligned}(x-yi)i &= (x+yi)^2\\ xi - yi^2 &= x^2 + 2xyi + y^2i^2\\ xi + y &= x^2 + 2xyi - y^2.\end{aligned}$$

Izjednačimo li realne te imaginarne dijelove gornje jednadžbe, dobivamo:

$$y = x^2 - y^2 \tag{4}$$

i

$$x = 2xy. \tag{5}$$ 1 bod

Iz jednakosti (5) slijedi da je $x - 2xy = 0$, tj. da je $x(1-2y) = 0$ pa imamo dva slučaja.

- Prvi slučaj:
  Ako je $x = 0$, tada je

  $$\begin{aligned}&y = 0^2 - y^2\\ &y^2 + y = 0\\ &y(y+1) = 0.\end{aligned}$$

  Rješenja dobivene jednadžbe su:

  $$y_1 = 0,\ y_2 = -1.$$ 2 boda

- Drugi slučaj:
  Ako je $y = \frac{1}{2}$ tada je

  $$\begin{aligned}&\frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{4}\\ &x^2 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

  Rješenja ove jednadžbe su $x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Traženi kompleksni brojevi za koje vrijedi zadana jednakost su:

$$z_1 = 0,\ z_2 = -i,\ z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$ 1 bod

4. (6 bodova) Zadani su nizovi za koje vrijedi $a_1 = b_1 = 25$ i $b_n = a_n - a_{n-1} = 3n + 22$. Izračunajte a_{200} i b_{200}.

Rješenje:

Uvrstimo li da je $n = 200$ u izraz $b_n = 3n + 22$, dobivamo:

$$\begin{aligned} b_n &= 3n + 22 \\ b_{200} &= 3 \cdot 200 + 22 \\ b_{200} &= 622. \end{aligned}$$ 1 bod

Raspišemo li vrijednosti izraza $a_n - a_{n-1} = 3n + 22$ za $n = 1, \ldots, 200$, dobivamo jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 25 \\ a_2 - a_1 &= 28 \\ a_3 - a_2 &= 31 \\ a_4 - a_3 &= 34 \\ &\vdots \\ a_{200} - a_{199} &= 622. \end{aligned}$$ 2 boda

Zbrajanjem jednakosti dobivamo:

$$a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{200} - a_{199} = 25 + 28 + 31 + 34 + \cdots + 622.$$ 1 bod

Slijedi da je:

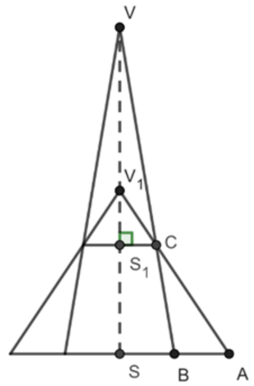
$$a_{200} = \frac{200(25 + 622)}{2} = 64700.$$ 2 boda

5. (6 bodova) Dva uspravna stošca imaju zajedničku os, a baze tih stožaca su koncentrični krugovi u istoj ravnini. Polumjer baze višeg stošca, kojemu je visina dva puta dulja od visine nižeg stošca, dva puta je kraći od polumjera baze nižeg stošca. Izračunajte duljinu kružnice koja je sjecište plaštova ovih dvaju stožaca, ako je dana duljina R polumjera baze nižeg stošca.

Rješenje:

U zadatku je navedeno da je duljina polumjera nižeg stošca jednaka R pa duljinu polumjera višeg stošca, koji je dva puta kraći, označimo s $\frac{R}{2}$. Analogno navedenome, ako visinu kraćeg stošca označimo s h, duljinu višeg stošca označit ćemo s $2h$. 1 bod

Skiciramo li osni presjek ovih stožaca, vidimo da su po poučku $K - K$ trokuti $\triangle SAV_1$ i $\triangle S_1CV_1$ slični.



Označimo li s $x = |\overline{S_1V_1}|$, vrijedi da je:

$$R : h = r : x \Rightarrow Rx = hr.$$

$$x = \frac{hr}{R}. \tag{6}$$ 1 bod

Analogno gornjem zaključku, zaključujemo da su trokuti $\triangle S_1CV$ i $\triangle SBV$ slični pa vrijedi da je:

$$\frac{R}{2} : 2h = r : (h + x) \Rightarrow R(h + x) = 4hr.$$

$$Rx = 4hr - Rh$$

$$x = \frac{4hr - Rh}{R}. \tag{7}$$ 2 boda

Izjednačavanjem jednakosti (6) i (7) dobivamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{hr}{R} &= \frac{4hr - Rh}{R} \\ hr &= 4hr - Rh \\ 3hr &= Rh \Rightarrow r = \frac{R}{3}. \end{aligned}$$ 1 bod

Duljina, odnosno opseg tražene kružnice iznosi $o = 2r\pi$, tj. $o = 2 \cdot \frac{R}{3} \cdot \pi = \frac{2}{3}R\pi$. 1 bod

6. (10 bodova) Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi da je

$$x! + 3 = y^2.$$

Rješenje:

Ako broj $x!$ nije djeljiv brojem 3, tada je $x = 1$ ili $x = 2$.

Za $x = 1 \Rightarrow x! + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$ pa je $y = 2$. 1 bod

Za $x = 2 \Rightarrow x! + 3 = 2 + 3 = 5$, a broj 5 nije kvadrat prirodnog broja pa takav y ne postoji.

Za $x = 3 \Rightarrow x! + 3 = 6 + 3 = 9 = 3^2$ pa je $y = 3$. 1 bod

Za $x = 4 \Rightarrow x! + 3 = 24 + 3 = 27$, a broj 27 nije kvadrat prirodnog broja pa takav y ne postoji.

Za $x = 5 \Rightarrow x! + 3 = 120 + 3 = 123$ pa prirodan broj y ni za ovaj slučaj ne postoji. 1 bod

Za $x \geq 3$, vrijedi da je broj $x!$ djeljiv brojem 3.

Ako je broj $x!$ djeljiv brojem 3, tada vrijedi da je i zbroj $x! + 3$ djeljiv brojem 3 pa je i y^2 djeljiv brojem 3, odakle slijedi da je y^2 djeljiv i brojem 9. Ako je y^2 djeljiv brojem 9, onda je i zbroj $x! + 3$ djeljiv brojem 9. 3 boda

Za $x \geq 6$ vrijedi da je $x! + 3 = 9k + 3 \Rightarrow x! + 3$ nije djeljiv brojem 9. To znači da ni y^2 ne može biti djeljiv brojem 9 što je u suprotnosti sa gornjim zaključkom. 2 boda

Zaključujemo da za $x \geq 6$ nema prirodnih brojeva za koje vrijedi zadana jednakost. 1 bod

Jedini parovi brojeva koji zadovoljavaju zadanu jednadžbu su $x = 1$, $y = 2$ i $x = 3$, $y = 3$. 1 bod

7. (10 bodova) Izračunajte vrijednost x u izrazu

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^n$$

razvoja binoma čiji je četvrti član jednak 200, a umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak je 30.

Rješenje:

Izraz $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^n$ je definiran za $x > 0$ i $\log x + 1 \neq 0$, tj. $x \neq 10^{-1}$ iz čega slijedi da je izraz definiran za $x \in \langle 0, \frac{1}{10}\rangle \cup \langle \frac{1}{10}, +\infty\rangle$. 1 bod

Da je umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak 30 zapisujemo:

$$\binom{n}{2} \cdot 2\binom{n}{n} = 30$$ 1 bod

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 2\binom{n}{0} &= 30 \\ n(n-1) &= 30 \\ n^2 - n - 30 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja gornje jednadžbe su $n_1 = 6$, $n_2 = -5$. 1 bod

Zbog uvjeta da je $n \geq 2$ i $n \geq 1$ slijedi da je rješenje jednadžbe samo $n_1 = 6$. 1 bod

Četvrti član razvoja binoma jednak je:

$$\begin{aligned} T_4 &= \binom{6}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3}\left(\sqrt[12]{x}\right)^3 \\ &= \binom{6}{3}\left(x^{\frac{1}{2(\log x+1)}}\right)^3 x^{\frac{1}{4}} \\ &= \binom{6}{3} x^{\frac{3}{2(\log x+1)}} x^{\frac{1}{4}} \\ &= \binom{6}{3} x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$ 1bod

Prema uvjetima zadatka slijedi da je $\binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 200$, tj. da je $x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 10$. Rješavanjem dobivene jednadžbe dobivamo: 1 bod

$$\begin{aligned} &\log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = \log 10 \\ &\left(\frac{3}{2(\log x+1)} + \frac{1}{4}\right)\log x = 1 \\ &\frac{6 + \log x + 1}{4(\log x + 1)}\log x = 1 \\ &(7 + \log x)\log x = 4(\log x + 1) \\ &\log^2 x + 3\log x - 4 = 0. \end{aligned}$$ 1 bod

Supstitucijom da je $\log x = t$ dobivamo jednadžbu $t^2 + 3t - 4 = 0$, čija su rješenja: $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivenih rješenja u supstituirani izraz dobivamo rješenja dviju vrijednosti za traženi x, tj. da je $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$. 2 boda