Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – osnovna škola
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte:

$$-\frac{2^0}{\sqrt{2}}+\frac{2^1}{\sqrt{4}}-\frac{2^2}{\sqrt{8}}+\frac{2^3}{\sqrt{16}}-\frac{2^4}{\sqrt{32}}+\frac{2^5}{\sqrt{64}}-\frac{2^6}{\sqrt{128}}+\frac{2^7}{\sqrt{256}}.$$

Rješenje:

$$-\frac{2^0}{\sqrt{2}}+\frac{2^1}{\sqrt{4}}-\frac{2^2}{\sqrt{8}}+\frac{2^3}{\sqrt{16}}-\frac{2^4}{\sqrt{32}}+\frac{2^5}{\sqrt{64}}-\frac{2^6}{\sqrt{128}}+\frac{2^7}{\sqrt{256}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{4}}-\frac{4}{\sqrt{8}}+\frac{8}{\sqrt{16}}-\frac{16}{\sqrt{32}}+\frac{32}{\sqrt{64}}-\frac{64}{\sqrt{128}}+\frac{128}{\sqrt{256}}$$ 1 bod

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2}-\frac{4}{2\sqrt{2}}+\frac{8}{4}-\frac{16}{4\sqrt{2}}+\frac{32}{8}-\frac{64}{8\sqrt{2}}+\frac{128}{16}$$ 2 boda

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1-\frac{2}{\sqrt{2}}+2-\frac{4}{\sqrt{2}}+4-\frac{8}{\sqrt{2}}+8$$ 1 bod

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1-\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2-\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+4-\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+8$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+4-4\sqrt{2}+8$$ 1 bod

$$=(1+2+4+8)-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1+2+4\right)$$

$$=15-\frac{15}{2}\sqrt{2}$$ 1 bod

Napomena: Ako je učenik racionalizirao nazivnike na način različit od prikazanog te dobio točno rješenje, ostvaruje 6 bodova.

Ako nazivnik rješenja nije racionaliziran, učenik ostvaruje 5 bodova.

2. (6 bodova) U jednom redu ružičnjaka zasađen je određen broj crvenih ruža. Između svake dvije crvene ruže zasađena je jedna bijela ruža, nakon čega je između svake dvije već zasađene ruže zasađena jedna žuta ruža te je na kraju između svake dvije već zasađene ruže zasađena plava ruža. Koliko je zasađeno crvenih ruža ako je ukupan broj zasađenih ruža 2025?

Rješenje 1:

Neka su C, B, Ž i P redom crvene, bijele, žute i plave ruže. Prema uvjetu zadatka dobivamo sljedeći raspored između dviju crvenih ruža:

C								C
C				B				C
C		Ž		B		Ž		C
C	P	Ž	P	B	P	Ž	P	C

1 bod

Raspored zasađenih ruža u ružičnjaku je:

C P Ž P B P Ž P C P Ž P B P Ž P C P Ž P B P Ž P C ... C P Ž P B P Ž P C.

Uočimo skupinu od osam ruža C P Ž P B P Ž P koja se periodično ponavlja te posljednju crvenu ružu koja ne pripada ni jednoj skupini. 2 boda

Neka je x broj skupina od osam ruža. Imamo:

$$8x + 1 = 2025$$ 2 boda

$$8x = 2024$$

$$x = 254.$$ 1 bod

Zasađene su 254 crvene ruže.

Rješenje 2:

Neka je n broj zasađenih crvenih ruža.

Bijele su ruže između crvenih, što znači da je broj bijelih ruža za jedan manji od broja crvenih ruža, tj. zasađeno je $n - 1$ bijelih ruža. 1 bod

Na sličan način dobivamo broj zasađenih žutih i plavih ruža.

Ukupan broj crvenih i bijelih ruža je $n + n - 1 = 2n - 1$ pa je žutih ruža zasađeno $2n - 1 - 1 = 2n - 2$. 1 bod

Ukupan broj crvenih, bijelih i žutih ruža je $n + n - 1 + 2n - 2 = 4n - 3$ pa je plavih ruža zasađeno $4n - 3 - 1 = 4n - 4$. 1 bod

Imamo:

$$n + n - 1 + 2n - 2 + 4n - 4 = 2025$$ 2 boda

$$8n - 7 = 2025$$

$$8n = 2032$$

$$n = 254.$$ 1 bod

Zasađene su 254 crvene ruže.

3. (6 bodova) Koliki je zbroj svih znamenaka broja

$$5.23 \cdot (10^{45})^{45} + 677 \cdot 10^{2028} : 100\,000 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3?$$

Rješenje:

Primjenom pravila za računanje s potencijama dobivamo:

$$5.23 \cdot \left(10^{45}\right)^{45} + 677 \cdot 10^{2028} : 100\,000 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 =$$

$$= 5.23 \cdot 10^{45 \cdot 45} + 677 \cdot 10^{2028-5} + 2^{1+2+3}$$

$$= 5.23 \cdot 10^{2025} + 677 \cdot 10^{2023} + 2^6$$ 1 bod

$$= 5.23 \cdot 10^{2025} + 6.77 \cdot 10^{2025} + 2^6$$ 1 bod

$$= (5.23 + 6.77) \cdot 10^{2025} + 2^6$$ 1 bod

$$= 12 \cdot 10^{2025} + 64$$ 1 bod

$$= 12\underbrace{000\ldots000}_{2023}64.$$ 1 bod

Zbroj svih znamenaka zadanog broja iznosi 13. 1 bod

Napomena: Ako je učenik točno izračunao zbroj svih znamenaka zadanog izraza, a pritom izraz $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3$ nije zapisao u obliku potencije s bazom 2, već je odmah izračunao $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 64$, ostvaruje 6 bodova.

4. (6 bodova) Odredite zbroj svih troznamenkastih brojeva koji su tri puta veći od kvadrata zbroja svojih znamenaka.

Rješenje 1:

Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Prema uvjetu zadatka je $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$.

Broj $\overline{abc}$ djeljiv je s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3, tj. $a+b+c = 3n$, $n \in \mathbb{N}$ pa je $3 \cdot (a+b+c)^2 = 3 \cdot (3n)^2 = 27n^2$. 2 boda

$\overline{abc} = 27n^2$ je troznamenkast za $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ tj. $\overline{abc} \in \{108, 243, 432, 675, 972\}$. 1 bod

Provjerimo za koje brojeve vrijedi uvjet zadatka.

$3 \cdot (1+0+8)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 108$

$3 \cdot (2+4+3)^2 = 3 \cdot 81 = 243 = 243$

$3 \cdot (4+3+2)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 432$

$3 \cdot (6+7+5)^2 = 3 \cdot 324 = 972 \neq 108$

$3 \cdot (9+7+2)^2 = 3 \cdot 324 = 972 = 972$ 2 boda

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 243 i 972, pa je traženi zbroj $243 + 972 = 1215$. 1 bod

Rješenje 2:

Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Prema uvjetu zadatka je $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$.

Za prirodan broj x, broj $3x^2$ je troznamenkast ako i samo ako je $x \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$. 2 boda

Odredimo brojeve $\overline{abc} = 3x^2$ te zbrojeve njihovih znamenaka za sve $x \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$.

Uvjet zadatka zadovoljavaju oni brojevi $\overline{abc}$ za koje vrijedi: $a + b + c = x$.

x	$\overline{abc}$	$a+b+c$
6	108	9
7	147	12
8	192	12
9	**243**	**9**
10	300	3
11	363	12
12	432	9
13	507	12
14	588	21
15	675	18
16	768	21
17	867	21
18	**972**	**18**

3 boda

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 243 i 972 pa je traženi zbroj $243 + 972 = 1215$. 1 bod

Napomena: Za zaključak $a + b + c \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$ učenik ostvaruje 2 boda bez obzira na zapis.

Vrednovanje tablice: Učenik ostvaruje 3 boda ako provjeri uvjet zadatka za sve elemente skupa $\{6, 7, 8, \ldots, 18\}$, 2 boda ako provjeri uvjet za osam elemenata navedenog skupa, 1 bod ako provjeri uvjet za četiri elementa navedenog skupa.

Ako učenik do ispravnog zaključka dolazi računski, npr. za $x = 6$,

$\overline{abc} = 108$, $3 \cdot (1 + 0 + 8)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 108$,

bodove treba raspodijeliti predloženim načinom bodovanja tablice.

5. (6 bodova) Kojem se mnogokutu utrostručavanjem broja stranica zbroj veličina unutarnjih kutova poveća za 225 %?

Rješenje:

Neka je n broj stranica traženog mnogokuta.

Zbroj veličina njegovih unutarnjih kutova je $K_n = (n–2) \cdot 180$ pa utrostručivanjem broja stranica dobivamo $K_{3n} = (3n–2) \cdot 180$. 1 bod

K_{3n} je, prema uvjetu zadatka, K_n uvećan za 225% od K_n, što je $3.25K_n$. 1 bod

Vrijedi:

$$K_{3n} = 3.25K_n$$

$$(3n-2)\cdot 180^\circ = 3.25\cdot(n-2)\cdot 180^\circ \quad / : 180^\circ$$ 2 boda

$$3n-2 = 3.25\cdot(n-2)$$

$$3n-2 = 3.25n-6.5$$ 1 bod

$$3n-3.25n = 2-6.5$$

$$-0.25n = -4.5$$

$$n = 18.$$ 1 bod

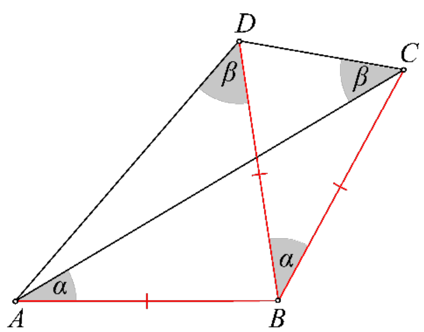
Traženi je mnogokut osamnaesterokut.

6. (10 bodova) Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

$$|AB| = |BC| = |BD|, \quad |\angle BAC| = |\angle CBD| \quad \text{te} \quad |\angle ADB| = |\angle DCA|.$$

Odredite veličine kutova četverokuta $ABCD$.

Rješenje:



1 bod

Neka je $|\angle BAC| = |\angle CBD| = \alpha$ te $|\angle ADB| = |\angle DCA| = \beta$.

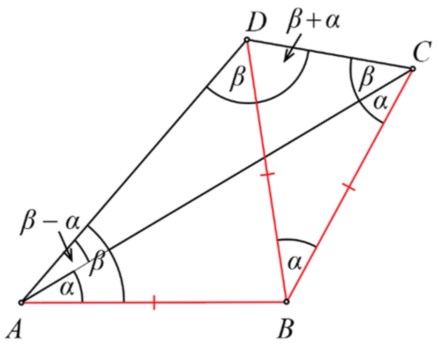
Trokut ABC je jednakokračan jer je $|AB| = |BC|$, pa je $|\angle ACB| = \alpha$.

Trokut ABD je jednakokračan jer je $|AB| = |BD|$, pa je $|\angle BAD| = \beta$. 1 bod

Sada slijedi da je $|\angle CAD| = \beta - \alpha$. 1 bod

Trokut BCD je jednakokračan jer je $|BC| = |BD|$, pa je $|\angle DCB| = |\angle BDC| = \beta + \alpha$.

1 bod



Zbroj veličina kutova trokuta ACD vrijedi: $\beta + \alpha + \beta + \beta + \beta - \alpha = 180°$. 1 bod

Dakle, $4\beta = 180°$ pa je $\beta = 45°$. 1 bod

Na sličan način, iz trokuta BCD slijedi: $2(\alpha + \beta) + \alpha = 180°$

$2(\alpha + 45°) + \alpha = 180°$

$\alpha = 30°$. 1 bod

Kutovi četverokuta $ABCD$ imaju veličine: $|\angle BAD| = \beta = 45°$,

$|\angle DCB| = \alpha + \beta = 75°$. 1 bod

$|\angle ADC| = \alpha + 2\beta = 120°$. 1 bod

$|\angle CBA| = 360° - 120° - 45° - 75° = 120°$. 1 bod

Napomena: S 3 boda se boduje i ako je učenik točno označio veličine kutova na crtežu.

7. (10 bodova) Za koje sve uređene parove cijelih brojeva (m, n) vrijedi da je

$$n^2(2 + m) = n^2 - m + 16?$$

Rješenje:

Izraz $n^2(2 + m) = n^2 - m + 16$ zapisujemo:

$2n^2 + n^2m = n^2 - m + 16$ 1 bod

$2n^2 + n^2m - n^2 + m - 16 = 0$

$n^2 + n^2m + m + 1 - 17 = 0$ 2 boda

$n^2(1 + m) + (1 + m) - 17 = 0$ 1 bod

$(1 + m)(n^2 + 1) = 17$ 1 bod

Četiri su slučaja kada je umnožak $(1 + m)(n^2 + 1)$ jednak 17.

	$n^2 + 1$	$1 + m$	$(1 + m)(n^2 + 1)$
1.	1	17	17
2.	-1	-17	17
3.	17	1	17
4.	-17	-1	17

1 bod

Slučajevi $n^2+1=-1$ i $n^2+1=-17$ nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva. 1 bod

Za $n^2+1=1$ i $m+1=17$ imamo: $n^2=1-1=0 \quad$ pa je $\quad n=0$,

$m=17-1=16$.

Rješenje je uređeni par $(16,0)$. 1 bod

Za $n^2+1=17$ i $m+1=1$ imamo:

$n^2=17-1=16 \quad$ pa je $\quad n_1=4 \quad$ i $\quad n_2=-4$,

$m=1-1=0$.

Rješenja su uređeni parovi $(0,4)$ i $(0,-4)$. 2 boda

Uređeni parovi koji zadovoljavaju uvjet zadatka su: $(16,0)$, $\quad (0,-4)$, $\quad$ i $\quad (0,4)$.

Napomena: Učenik za svako navedeno rješenje, bez obrazloženja, dobiva po 1 bod.