Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
7. razred – osnovna škola
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte:
$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001.$$

Rješenje 1:

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\left(1000-\frac{1}{999}\right)\cdot 0.999+0.001= \qquad \text{3 boda}$$

$$=999-0.001+0.001= \qquad \text{2 boda}$$

$$=999. \qquad \text{1 bod}$$

Rješenje 2:

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\frac{999\cdot 999+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{999\cdot 999+998}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{999\cdot 999+998+1}{1000}=\frac{999\cdot 999+999}{1000}= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{999\cdot(999+1)}{1000}=\frac{999\cdot 1000}{1000}=999. \qquad \text{3 boda}$$

Rješenje 3:

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\frac{999\cdot 999+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{998001+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{998999}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{998999}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{998999+1}{1000}=\frac{999000}{1000}=999. \qquad \text{3 boda}$$

2. (6 bodova) Učenik iz predmeta Matematika ima tri ocjene: 2, 3 i 4. Ako do kraja školske godine bude dobivao samo petice, koliko najmanje petica iz tog predmeta treba dobiti da bi na kraju imao prosjek za ocjenu odličan?

Rješenje 1: Za ocjenu odličan učenik treba imati prosjek ocjena najmanje 4.5.

$$4.5 \leq \frac{2+3+4+n\cdot 5}{n+3}$$ 2 boda

Smijemo pomnožiti s $(n+3)$ cijelu nejednadžbu jer je broj ocjena $(n+3)$ pozitivan broj te će znak nejednakosti ostati isti.

$$4.5(n+3) \leq 9+5n$$ 1 bod

$$4.5n+13.5 \leq 9+5n$$ 1 bod

$$4.5n-5n \leq 9-13.5$$

$$-0.5n \leq -4.5$$ 1 bod

$$n \geq 9$$

Učenik treba dobiti najmanje 9 petica. 1 bod

Napomena: Za dobivanje prvog boda učenik ne treba imati napisano objašnjenje zašto smije množiti nazivnikom.

Zadatak se može rješavati i jednadžbom $4.5 = \dfrac{2+3+4+n\cdot 5}{n+3}$.

Rješenje 2:

Prosječna je ocjena trenutačno: $\dfrac{2+3+4}{3} = 3.$ 1 bod

Dodajemo ocjene 5 jednu po jednu i računamo prosjeke:

$$\frac{2+3+4+5}{4} = 3.5$$

$$\frac{2+3+4+2\cdot 5}{5} = 3.8$$

$$\frac{2+3+4+3\cdot 5}{6} = 4$$

$$\frac{2+3+4+4\cdot 5}{7} \approx 4.14$$

$$\frac{2+3+4+5\cdot 5}{8} = 4.25$$

$$\frac{2+3+4+6\cdot 5}{9} \approx 4.33$$

$$\frac{2+3+4+7\cdot 5}{10} = 4.4$$

$$\frac{2+3+4+8\cdot 5}{11} \approx 4.45$$

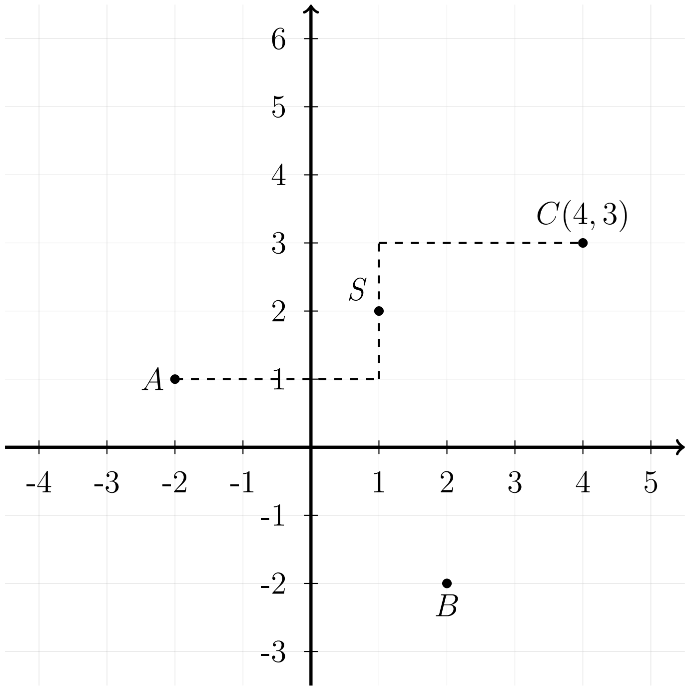
$$\frac{2+3+4+9\cdot 5}{12} = 4.5$$ 4 boda

Učenik treba dobiti najmanje 9 petica. 1 bod

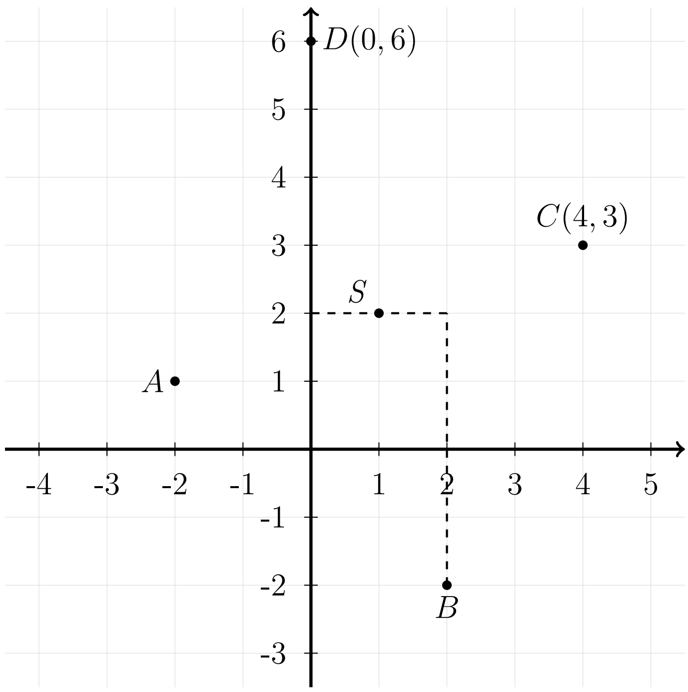
3. (6 bodova) Ako su točke $A(-2,1)$ i $B(2,-2)$ dva vrha paralelograma $ABCD$ i točka $S(1,2)$ sjecište njegovih dijagonala, odredite koordinate vrhova C i D tog paralelograma. Nacrtajte sliku u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Rješenje 1:

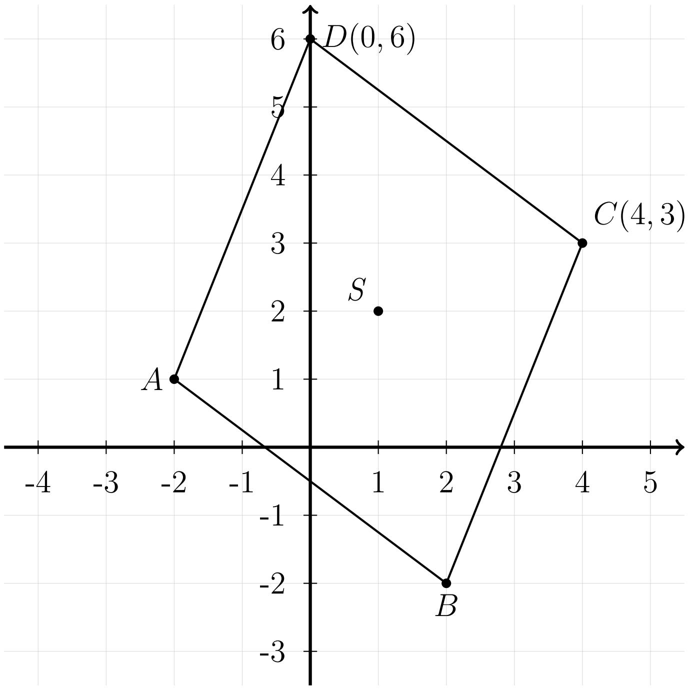
Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolovljuju. 1 bod



Centralnom simetrijom s obzirom na točku S preslikamo točku A i dobijemo vrh paralelograma $C(4,3)$. 2 boda



Centralnom simetrijom s obzirom na točku S preslikamo točku B i dobijemo vrh paralelograma $D(0,6)$. 2 boda



Nacrtan paralelogram. 1 bod

Napomena: Ako učenik napiše točne koordinate točaka C i D bez objašnjenja, može dobiti maksimalno 4 boda.

Rješenje 2:

Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolovljuju. 1 bod

S je polovište dijagonale $\overline{AC}$, pa su njezine koordinate aritmetička sredina koordinata točaka A i C.

Dakle, za točke $A(-2,1)$, $S(1,2)$, $C(x,y)$ vrijedi:

$$1 = \frac{-2+x}{2} \qquad \text{i} \qquad 2 = \frac{1+y}{2}.$$ 1 bod

Riješimo te jednadžbe.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-2+x}{2} \quad / \cdot 2 \\ 2 &= -2+x \\ -x &= -2-2 \\ -x &= -4 \quad / : (-1) \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{1+y}{2} \quad / \cdot 2 \\ 4 &= 1+y \\ -y &= 1-4 \\ -y &= -3 \quad / : (-1) \\ y &= 3 \end{aligned} \qquad C(4,3)$$ 1 bod

S je polovište dijagonale $\overline{BD}$, pa su njezine koordinate aritmetička sredina koordinata točaka B i D.

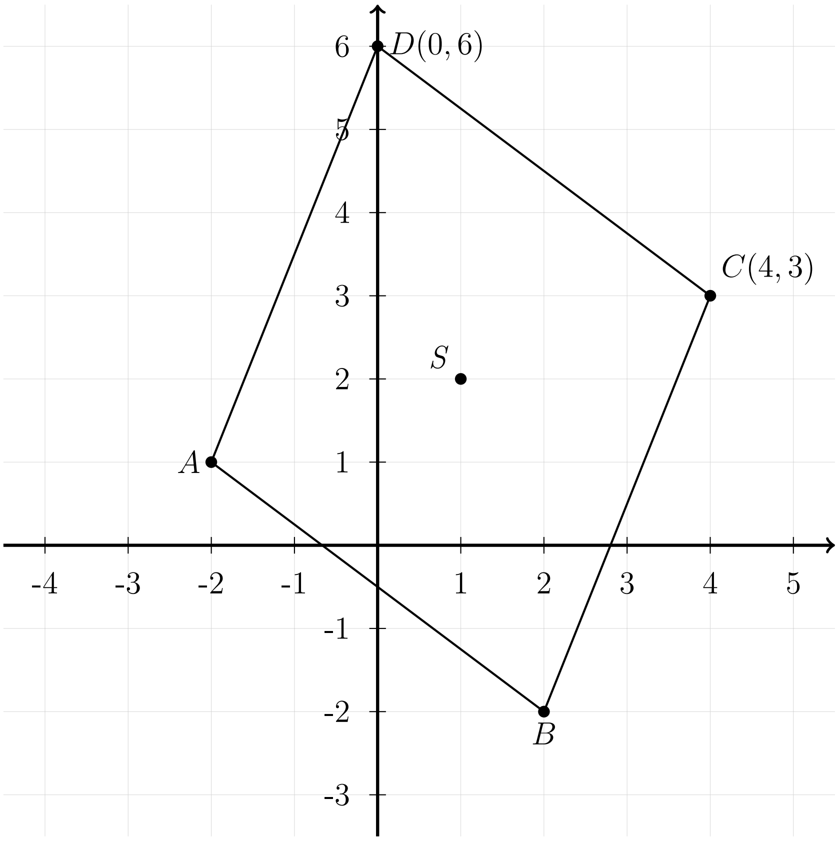
Dakle, za točke $B(2,-2)$, $S(1,2)$, $D(x',y')$ vrijedi:

$$1 = \frac{2+x'}{2} \qquad \text{i} \qquad 2 = \frac{-2+y'}{2}.$$ 1 bod

Riješimo te jednadžbe.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2+x'}{2} \quad / \cdot 2 \\ 2 &= 2+x' \\ -x' &= 2-2 \\ -x' &= 0 \quad / : (-1) \\ x' &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{-2+y'}{2} \quad / \cdot 2 \\ 4 &= -2+y' \\ -y' &= -2-4 \\ -y' &= -6 \quad / : (-1) \\ y' &= 6 \end{aligned} \qquad D(0,6)$$

1 bod



Nacrtan paralelogram. 1 bod

4. (6 bodova) Tri dječaka i tri djevojčice idu u kazalište i dobili su 6 karata u nizu u istom redu. Djevojčice žele sjediti sve tri jedna do druge, a dječacima je svejedno gdje će sjediti. Na koliko se različitih načina oni tako mogu smjestiti?

Rješenje 1:

Djevojčice nazovimo A, B i C.

One žele sjesti sve tri zajedno pa njih promatramo kao jednu cjelinu. Djevojčice se unutar svoja tri mjesta mogu smjestiti na 6 različitih načina ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ili CBA.

To smo mogli napisati i ovako: na prvo mjesto može sjesti bilo koja od njih tri, na drugo jedna od preostale dvije i zadnja na treće mjesto. Znači da one mogu sjesti unutar svoja tri mjesta na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 bod

Dječake nazovimo D, E i F.

Ako su djevojčice smještene na prva tri mjesta na bilo koji od gore opisanih 6 načina, tada su dječaci smješteni na zadnja tri mjesta. Njih možemo na ta tri mjesta smjestiti opet na 6 načina, DEF, DFE, EDF, EFD, FDE ili FED.

To je ukupno $6 \cdot 6 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na 2., 3. i 4. mjestu na jednom od svojih 6 načina, na prvom mjestu može biti bilo koji od tri dječaka.

Ako je na prvom mjestu dječak D, dječaci E i F na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina EF ili FE.

Ako je na prvom mjestu dječak E, dječaci D i F na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina DF ili FD.

Ako je na prvom mjestu dječak F, dječaci D i E na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina DE ili ED.

To je ukupno $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na 3., 4. i 5. mjestu na jednom od svojih 6 načina, na prva dva mjesta mogu biti smještena dva dječaka na 2 načina, a na zadnjem mjestu preostali dječak.

Dječaci D i E na prva se dva mjesta mogu smjestiti na dva načina DE ili ED, a na zadnjem je mjestu tada dječak F.

Dječaci E i F se na prva dva mjesta mogu smjestiti na dva načina EF ili FE, a na zadnjem je mjestu tada dječak D.

Dječaci D i F se na prva dva mjesta mogu smjestiti na dva načina DF ili FD, a na zadnjem je mjestu tada dječak E.

To je ukupno $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na zadnja tri mjesta na bilo koji od gore opisanih 6 načina, tada su dječaci smješteni na prva tri mjesta. Njih možemo na ta tri mjesta smjestiti opet na 6 načina, DEF, DFE, EDF, EFD, FDE ili FED.

To je ukupno $6 \cdot 6 = 36$ načina. 1 bod

Ukupan broj načina na koje ih možemo smjestiti da sjede kako žele je $36+36+36+36 = 144$. 1 bod

Rješenje 2:

Tri djevojčice uvijek sjede zajedno pa njih promatramo kao jednu cjelinu.

Djevojčice unutar njihova tri mjesta možemo rasporediti tako da prva odabire 3 mjesta, druga 2 i treća sjeda na 1 preostalo mjesto, odnosno one se mogu unutar svoja tri mjesta smjestiti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 bod

Označimo mjesta brojevima (123456).

Tada tri djevojčice zajedno možemo smjestiti na 3 spojena mjesta na 4 načina (123, 234 , 345 ili 456), jednog od dječaka na preostala tri mjesta, drugog na preostala dva mjesta i zadnjeg dječaka na jedino preostalo mjesto.

To je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 4 boda

Unutar svakog od ta 24 načina djevojčice možemo smjestiti na 6 načina pa je ukupan broj načina na koji možemo smjestiti djecu da sjede kako žele $6 \cdot 24 = 144$. 1 bod

5. (6 bodova) Koja je 2024. znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{2025}{26}$?

Rješenje:

$$\frac{2025}{26} = 77.8\dot{8}4615\dot{3}$$ 2 boda

Zadani broj ima pretperiod koji se sastoji od jedne znamenke i period koji se sastoji od šest znamenaka.

$$2024 - 1 = 2023$$

(Oduzeli smo 1 jer je iza decimalne točke jedna znamenka pretperioda koju također trebamo prebrojiti.) 1 bod

$$2023 : 6 = 337 \text{ i ostatak } 1$$ 1 bod

$$\frac{2025}{26} = 77.\underbrace{8\underbrace{\underbrace{846153}_{1.}\underbrace{846153}_{2.}\ldots\underbrace{846153}_{336.}\underbrace{846153}_{337.}}_{2022 \text{ znamenke}}}_{2023 \text{ znamenke}}\underbrace{846153}_{338.}846153$$

Znamenka koju tražimo jest prva znamenka u 338. ponavljanju perioda. 1 bod

Tražena je znamenka 8. 1 bod

6. (10 bodova) Na jednom parkiralištu trenutačno je jedna sedmina parkiranih automobila plave boje. Crnih automobila ima upola manje nego plavih, a crvenih ima za jedan više negoli plavih i crnih zajedno. Sivih automobila ima za četiri manje nego crnih, a točno je polovina svih automobila na parkiralištu bijele boje. Automobila ostalih boja (koji nisu plavi, crni, crveni, sivi i bijeli) ima 10 puta manje nego sivih automobila. Ako je poznato da je popunjeno točno 80 % kapaciteta parkirališta, koliko je trenutačno na njemu slobodnih parkirnih mjesta?

Rješenje:

Označimo broj svih parkiranih automobila s x.

Broj automobila prema njihovoj boji prikazuje tablica:

boja	plavi	crni	crveni	sivi	bijeli	ostali
broj automobila	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{14}x$	$\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + 1$	$\frac{1}{14}x - 4$	$\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{14}x - 4\right)$

4 boda

Zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + 1 + \frac{1}{14}x - 4 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{14}x - 4\right) = x \quad / \cdot 140$$ 1 bod

$$20x + 10x + 20x + 10x + 140 + 10x - 560 + 70x + x - 56 = 140x$$ 1 bod

$$20x + 10x + 20x + 10x + 10x + 70x + x - 140x = 560 + 56 - 140$$ 1 bod

$$x = 616 - 140$$

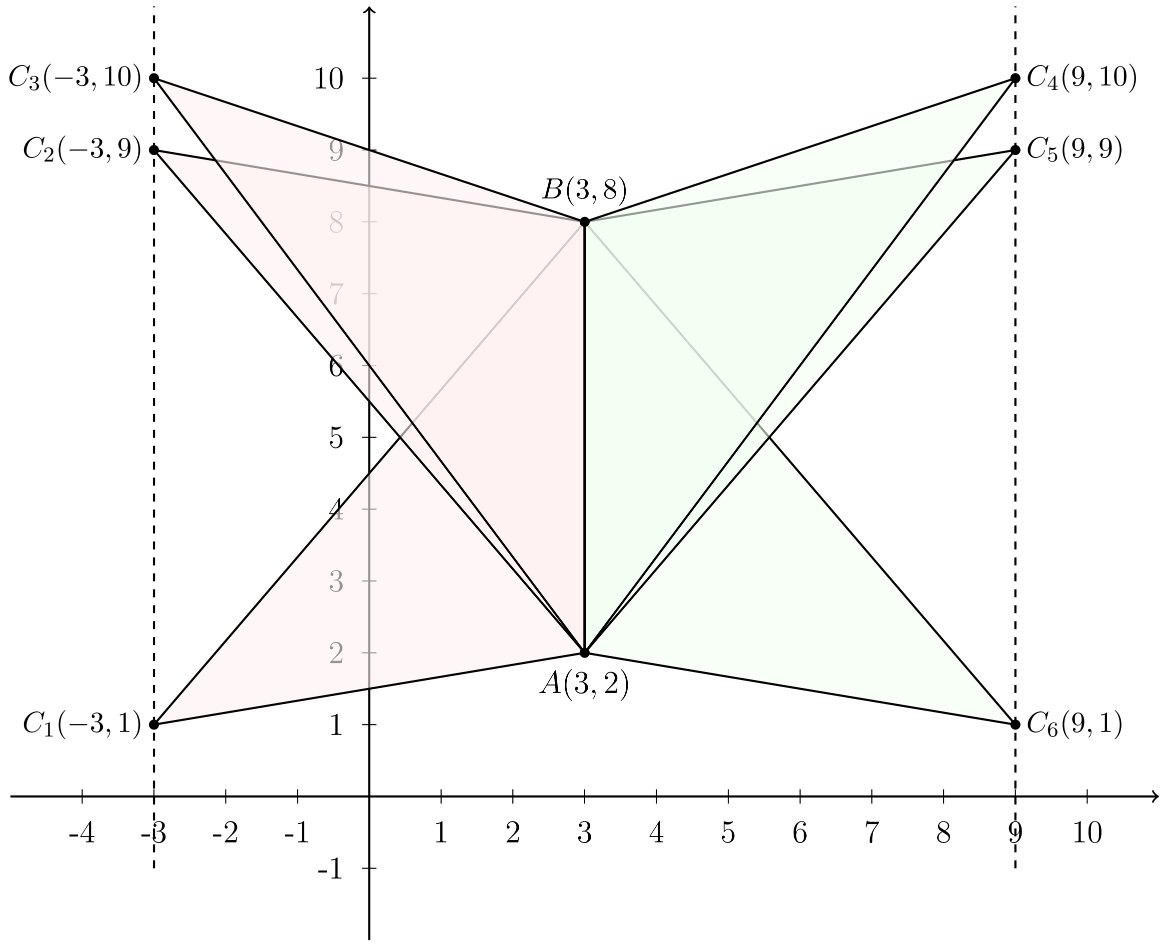
$$x = 476$$ 1 bod

Trenutačno je na parkiralištu 476 automobila. Kako je to 80 % kapaciteta parkirališta, slobodna mjesta čine 20 % kapaciteta parkirališta, odnosno broj slobodnih mjesta je četiri puta manji od broja popunjenih mjesta. 1 bod

Dakle, na parkiralištu je trenutačno $476 : 4 = 119$ slobodnih parkirnih mjesta. 1 bod

7. (10 bodova) Tupokutni trokut površine 18 kvadratnih jedinica ima vrhove u točkama $A(3, 2)$, $B(3, 8)$ i $C(x, y)$. Odredite koordinate vrha C ako je $y \in \mathbb{N}$ i $y \leq 10$.

Rješenje:



1 bod

Duljina stranice $\overline{AB}$ je 6 jedinica. 1 bod

Površina trokuta je

$$P = \frac{|AB| \cdot v}{2},$$

gdje je v duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$.

Visinu trokuta v izračunamo prema formuli

$$v = \frac{2P}{|AB|} = \frac{36}{6} = 6.$$ 1 bod

Dakle, vrh C mora pripadati jednom od dvaju pravaca koji su od pravca AB udaljeni za 6 jedinica i stoga je apscisa točke C jednaka $x = 9$ ili $x = -3$. 2 boda

Kako vrijedi $y \in \mathbb{N}$ i $y \leq 10$, da bi trokut bio tupokutan, mora vrijediti $y \in \{1, 9, 10\}$. U tom je slučaju jedan od kutova uz stranicu $\overline{AB}$ veći od 90°, odnosno visina na stranicu $\overline{AB}$ je izvan trokuta pa je trokut tupokutan (vidi skicu).

Ako je $y \in \{2, 8\}$, trokut je pravokutan (jedan kut uz stranicu $\overline{AB}$ je 90°, odnosno visina se podudara s jednom stranicom).

Ako je $y \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, trokut je šiljastokutan (kutovi uz stranicu $\overline{AB}$ su manji od 90°, a stranica $\overline{AB}$ je najkraća stranica zbog $|AC| > 6$ i $|BC| > 6$ pa je nasuprot nje najmanji kut, tj. kut pri vrhu C je također šiljasti). 2 boda*

Dakle, koordinate vrha C mogu biti: $(9, 1)$, $(9, 9)$, $(9, 10)$, $(-3, 1)$, $(-3, 9)$ i $(-3, 10)$. 3 boda

***Napomena:** Umjesto dokaza da su trokuti s vrhom C u navedenim točkama jedini tupokutni trokuti koji zadovoljavaju uvjete zadatka, učenik može na skici nacrtati i preostale trokute i zornošću zaključiti da oni nisu tupokutni. U tom slučaju, da bi dobio dodatna 2 boda, skica treba biti uredna i u točnom mjerilu. Dovoljno je nacrtati trokute s vrhom C na jednom od dvaju pravaca jer su im preostali trokuti osno simetrični.