Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
1. razred – srednja škola – B – varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Učenici jedne škole putovali su na školski izlet u zabavni park Mathland. Najpoznatije su atrakcije parka adrenalinski vlak, kuća smijeha i vodeni tobogan.
U sljedećoj tablici prikazano je koliki je udio učenika isprobao koju od navedenih atrakcija.

Naziv atrakcije	**Udio učenika**
Adrenalinski vlak	82 %
Kuća smijeha	78 %
Vodeni tobogan	78 %
Adrenalinski vlak i kuća smijeha	62 %
Adrenalinski vlak i vodeni tobogan	66 %
Kuća smijeha i vodeni tobogan	60 %

Sve tri kategorije atrakcija isprobalo je 25 učenika. Svi su učenici isprobali barem jednu atrakciju. Koliko je ukupno učenika putovalo na izlet u Mathland?

Rješenje:

Označimo s x broj učenika koji je putovao na izlet. Broj učenika koji su isprobali atrakcije prema tablici je: $0.82x$, $0.78x$, $0.78x$, $0.62x$, $0.62x$ i $0.6x$. 1 bod

Broj učenika koji su isprobali jednu od atrakciju je $(0.82 + 0.78 + 0.78)x$. 1 bod

Broj učenika koji su isprobali dvije atrakcije je $(0.62 + 0.66 + 0.6)x$. 1 bod

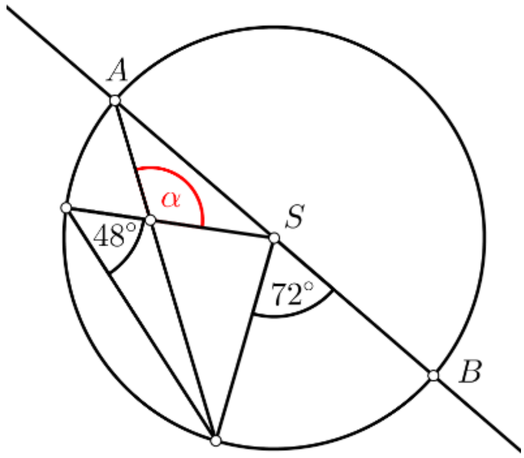
Ukupan broj učenika koji su putovali na školski izlet jednak je razlici broja učenika koji su isprobali jednu atrakciju i broja učenika koji su isprobali dvije atrakcije uvećanoj za broj učenika koji su isprobali sve tri atrakcije:

$$x = (0.82 + 0.78 + 0.78)x - (0.62 + 0.66 + 0.6)x + 25 \quad (1)$$ 2 boda

Slijedi broj učenika je $x = 50$. 1 bod

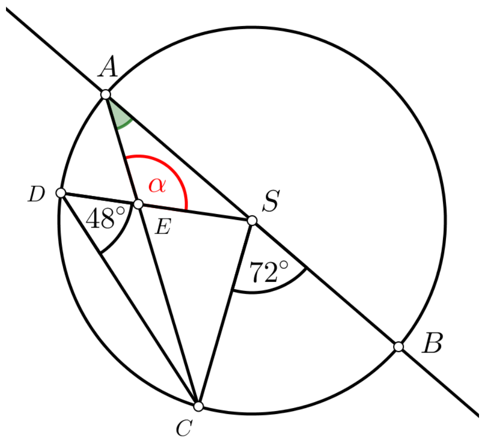
Napomena: Učenici mogu zadatak riješiti i zapisivanjem formule za broj elemenata unije tri skupa, odnosno skiciranjem pripadnog Vennova dijagrama. U svakom slučaju, ako ispravnim zaključivanjem dođu do jednadžbe (1), dobivaju 5 bodova, ne trebaju posebno zapisivati broj učenika koji su isprobali jednu ili dvije atrakcije.

2. (6 bodova) Kružnica sa središtem u točki S prikazana je na skici. Kolika je mjera označenoga kuta α?



Rješenje:

Označimo točke C, D i E na skici.



Trokuti ASC i DSC jednakokračni su pa im i dva kuta uz osnovicu imaju jednake mjere. Kut $\angle SCD$ je mjere $48°$. 1 bod

Mjera kuta $\angle CSA$ iznosi $180° - 72° = 108°$. 1 bod

Za mjeru kuta $\angle SAC$ vrijedi:

$$|\angle SAC| = |\angle SCA| = \frac{180° - |\angle CSA|}{2} = \frac{180° - 108°}{2} = \frac{72°}{2} = 36°.$$ 1 bod

Za mjeru kuta $\angle ECD$ vrijedi:

$$|\angle ECD| = |\angle SCD| - |\angle SCA| = 48° - 36° = 12°.$$ 1 bod

U trokutu CDE mjera kuta $\angle DEC$ je $180° - 48° - 12° = 120°$. 1 bod

Kutovi α i $\angle DEC$ jednake su mjere jer su vršni kutovi. Mjera kuta α je $120°$. 1 bod

3. (6 bodova) Izraz

$$\frac{90\cdot 45^{2n-1}-3^{4n+1}\cdot 5^{2n}}{2025^{n-1}}$$

pojednostavite do kraja.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\frac{90\cdot 45^{2n-1}-3^{4n+1}\cdot 5^{2n}}{2025^{n-1}} &= \frac{2\cdot 45\cdot 45^{-1}\cdot 45^{2n}-3\cdot 3^{4n}\cdot 5^{2n}}{2025^{-1}\cdot 2025^{n}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{2\cdot 45^{2n}-3\cdot 9^{2n}\cdot 5^{2n}}{2025^{-1}\cdot 2025^{n}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{2\cdot 45^{2n}-3\cdot 45^{2n}}{2025^{-1}\cdot 2025^{n}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{-45^{2n}}{2025^{-1}\cdot 2025^{n}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{-2025^{n}}{2025^{-1}\cdot 2025^{n}} && \text{1 bod}\\
&= -2025. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

4. (6 bodova) Riješite jednadžbu

$$\frac{2x+2}{2023}-\frac{x+2}{1012}=\frac{2x+6}{2025}-\frac{x}{1011}.$$

Rješenje:

Ekvivalentne su jednadžbe zadanoj jednadžbi:

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+2}{2023}+\frac{x}{1011}=\frac{x+2}{1012}+\frac{2x+6}{2025} && \text{1 bod}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x}{2022}+\frac{x+1}{2023}=\frac{x+2}{2024}+\frac{x+3}{2025} && \text{1 bod}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x-2022+2022}{2022}+\frac{x-2022+2023}{2023}=\frac{x-2022+2024}{2024}+\frac{x-2022+2025}{2025} && \text{1 bod}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x-2022}{2022}+1+\frac{x-2022}{2023}+1=\frac{x-2022}{2024}+1+\frac{x-2022}{2025}+1\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{x-2022}{2022}+\frac{x-2022}{2023}=\frac{x-2022}{2024}+\frac{x-2022}{2025} && \text{1 bod}\\
\Longleftrightarrow\ &(x-2022)\left(\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}\right)=0. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Slijedi $x-2022=0$, odnosno rješenje je zadane jednadžbe $x=2022$. 1 bod

Napomena: Ako učenik nekim drugim ispravnim načinom dođe do jednadžbe u kojoj se može izlučiti $x-2022$, za taj dio treba mu dodijeliti 4 boda.

5. (6 bodova) Odredite četveroznamenkasti broj koji zadovoljava sljedeće uvjete:

- Znamenka jedinica toga broja 4 je puta veća od znamenke tisućica.
- Znamenka desetica toga broja za 6 je veća od znamenke stotica.
- Zbroj znamenki toga broja djeljiv je s 5.
- Ako taj broj uvećamo za 2025, rezultat je broj koji je djeljiv s 3.

Rješenje 1: Neka je $\overline{abcd}$ traženi broj, pri čemu je $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i $b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. S obzirom na to da je $\overline{abcd} + 2025$ djeljiv s 3, a i broj 2025 djeljiv je s 3, 1 bod

onda i $\overline{abcd}$ mora biti djeljiv s 3. 1 bod

Zbroj znamenki broja $\overline{abcd}$ $(a+b+c+d)$ djeljiv je s 3 i s 5. 1 bod

S obzirom na to da je $d = 4a$ slijedi: $a = 1$ i $d = 4$ ili $a = 2$ i $d = 8$. 1 bod

S obzirom na to da je $c = b + 6$ slijedi $b = 0$ i $c = 6$ ili $b = 1$ i $c = 7$ ili $b = 2$ i $c = 8$ ili $b = 3$ i $c = 9$. 1 bod

Zbroj znamenki broja 1064 nije djeljiv ni s 3 ni s 5.
Zbroj znamenki broja 1174 nije djeljiv ni s 3 ni s 5.
Zbroj znamenki broja 1284 djeljiv je s 3 i s 5.
Zbroj znamenki broja 1394 nije djeljiv ni s 3 ni s 5.
Zbroj znamenki broja 2068 nije djeljiv ni s 3 ni s 5.
Zbroj znamenki broja 2178 djeljiv je s 3, ali nije s 5.
Zbroj znamenki broja 2288 djeljiv je s 5, ali nije s 3.
Zbroj znamenki broja 2398 nije djeljiv ni s 3 ni s 5.

Traženi je broj 1284. 1 bod

Rješenje 2: Neka je kao i prije traženi broj $\overline{abcd}$. Kako je $d = 4a$ i $c = b + 6$, imamo dvije mogućnosti:

1° $a = 1, d = 4$
$a + b + c + d = 1 + b + b + 6 + 4 = 11 + 2b$ 1 bod
$a + b + c + d$ djeljivo je s 5, $2b$ je parno, odnosno $11 + 2b$ je neparno $\Rightarrow$ završava na 5 $\Rightarrow$ $2b$ završava na 4. 1 bod

2° $a = 2, d = 8$
$a + b + c + d = 2 + b + b + 6 + 8 = 16 + 2b$ 1 bod
$a + b + c + d$ djeljivo je s 5, $2b$ je parno, odnosno $16 + 2b$ je parno $\Rightarrow$ završava na 0 $\Rightarrow$ $2b$ završava na 4. 1 bod

Gornje dvije mogućnosti daju nam: $b = 2 \Rightarrow c = 8$ ili $b = 7 \Rightarrow c = 13$ što nije moguće (jer je c znamenka). 1 bod

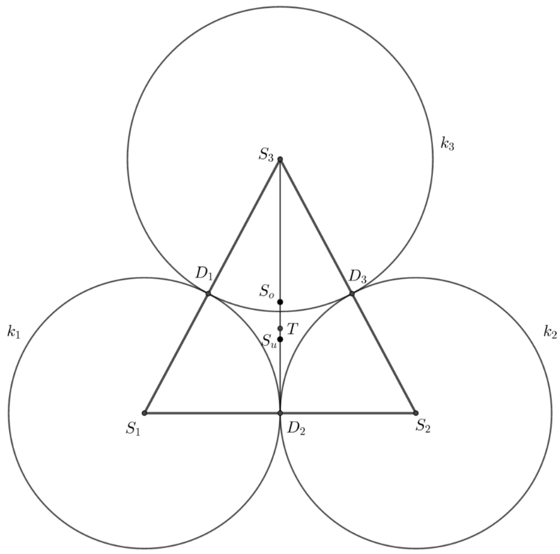
U slučaju 1° imamo broj 1284, a u slučaju 2° broj 2288. Direktnom provjerom posljednjeg uvjeta zadatka jedino je rješenje broj 1284. 1 bod

Napomena: Zaključak da postoje dvije mogućnosti za znamenke jedinica i tisućica je 1 bod, za drugi bod treba izvesti još neki zaključak na temelju zadanih uvjeta.

6. (10 bodova) Tri se kružnice k_1, k_2 i k_3 međusobno dodiruju izvana. Polumjer kružnica k_1 i k_2 iznosi 8 cm, a polumjer kružnice k_3 je 9 cm. Središta kružnica k_1, k_2 i k_3 vrhovi su trokuta. Je li težište toga trokuta udaljenije od središta tome trokutu opisane kružnice ili od središta tome trokutu upisane kružnice i za koliko?

Rješenje:

Skica:



1 bod

Neka je T težište trokuta $S_1S_2S_3$, S_0 središte trokutu $S_1S_2S_3$ opisane kružnice i S_u središte trokutu $S_1S_2S_3$ upisane kružnice.

Duljine stranica trokuta $S_1S_2S_3$ iznose $|S_1S_2| = 16$ cm i $|S_1S_3| = |S_2S_3| = 17$ cm. 1 bod

Duljina težišnice (visine) $\overline{D_2S_3}$ iznosi $|\overline{D_2S_3}| = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm. 1 bod

Primjenjujući svojstvo težišta trokuta slijedi $|D_2T| = 5$ cm i $|TS_3| = 10$ cm. 1 bod

Površina trokuta $S_1S_2S_3$ iznosi 120 cm^2. 1 bod

Duljina polumjera trokutu $S_1S_2S_3$ opisane kružnice iznosi $|S_0S_3| = \frac{289}{30}$ cm. 1 bod

Duljina polumjera trokutu $S_1S_2S_3$ upisane kružnice iznosi $|S_uD_2| = \frac{24}{5}$ cm. 1 bod

Udaljenost težišta trokuta $S_1S_2S_3$ do središta opisane kružnice iznosi $|TS_0| = 10 - \frac{289}{30} = \frac{11}{30}$ cm. 1 bod

Udaljenost težišta trokuta $S_1S_2S_3$ do središta upisane kružnice iznosi $|TS_u| = 5 - \frac{24}{5} = \frac{1}{5}$ cm. 1 bod

Težište trokuta $S_1S_2S_3$ udaljenije je od središta opisane kružnice nego od središta upisane kružnice za $|TS_0| - |TS_u| = \frac{1}{6}$ cm. 1 bod

Napomena: Da bi učenik dobio 1 bod za skicu, ne treba imati naznačene točke težišta, središta opisane i upisane kružnice, već treba biti jasno da su duljine stranica trokuta jednake zbroju pripadnih polumjera.

7. (10 bodova) Lorna se s prijateljicama zabavlja pogađanjem brojeva. Svaka od pet Lorninih prijateljica zapisala je na papir jedan prirodni broj. Od tih pet brojeva izabrale su četiri i zbrojile ih. Nakon toga popisale su sve moguće takve izbore po četiri broja i izračunale njihove zbrojeve. Otkrile su Lorni da takvim zbrajanjem uvijek dobiju broj 38, 52 ili 57. Koje su brojeve zapisale Lornine prijateljice?

Rješenje:

Sa x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 označimo brojeve koje su zapisale Lornine prijateljice. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti:

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 38 \\
S_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 52 \\
S_3 &= x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 57 && \text{1 bod} \\
S_4 &= x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = A \\
S_5 &= x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = B && \text{1 bod} \\
S_4&, S_5 \in \{38, 52, 57\} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
4S &= 38 + 52 + 57 + A + B. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Očito je da desna strana jednakosti mora biti broj djeljiva s 4 . Kako je $38 + 52 + 57$ neparan broj, jedan od brojeva A ili B mora biti neparan, a drugi paran. 1 bod

Neka je:

$$A = x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 57.$$

Sada treba biti $B = 38$ ili $B = 52$.

Za $B = 38$ vrijedi $4S = 38 + 52 + 57 + 57 + 38 = 242$ što je nemoguće jer broj 242 nije djeljiv s 4. 1 bod

Dakle, $B = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 52$.

Sada vrijedi $4S = 38 + 52 + 57 + 57 + 52 = 256$ pa je $S = 64$. 1 bod

Iz $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 38$ slijedi $x_5 = S - 38 = 26$. 1 bod

Analogno iz $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 52$ slijedi $x_4 = S - 52 = 12$.

Iz $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 57$ slijedi $x_3 = S - 57 = 7$.

Iz $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 57$ slijedi $x_2 = S - 57 = 7$.

Iz $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 52$ slijedi $x_1 = S - 52 = 12$. Dakle, Lornine prijateljice zapisale su brojeve 26, 12, 12, 7 i 7. 2 boda

Napomena: Prilikom bodovanja zadnja dva boda, učenik dobiva 1 bod ako su zapisana tri ili četiri točna broja. Smisleni pokušaj zapisivanja opisane situacije nosi 1 bod. Zaključak da zbroj svih zbrojeva po četiri broja mora biti djeljiv s 4 nosi 1 bod. Zaključak (argumentirani) da se ponavljaju zbrojevi 52 i 57 nosi 2 boda. Određivanje samih brojeva nosi 2 boda.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
2. razred – srednja škola – B – varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Riješite kvadratnu jednadžbu $(a-1)x^2+ax+\frac{a+1}{4}=0$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Odredite realni broj a tako da je barem jedno rješenje navedene kvadratne jednadžbe pozitivan realan broj.

Rješenje:

Iz kvadratne jednadžbe imamo:
Kvadratni koeficijent jednak je $a-1$, linearni koeficijent jednak je a i slobodni koeficijent jednak je $\frac{a+1}{4}$. 1 bod

Sada možemo uz pomoć formule za rješavanje kvadratne jednadžbe zapisati:

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(a-1)\frac{a+1}{4}}}{2\,(a-1)}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-(a-1)(a+1)}}{2(a-1)}$$ 1 bod

$$=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-a^2+1}}{2(a-1)}=\frac{-a\pm 1}{2(a-1)}$$ 1 bod

$$x_1=\frac{-a+1}{2(a-1)}=\frac{-(a-1)}{2(a-1)}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-a-1}{2(a-1)}=\frac{a+1}{2(1-a)}.$$ 1 bod

Prvo rješenje ne ovisi o realnom broju a i negativno je. Ako je drugo rješenje pozitivno, vrijedi: $\frac{a+1}{1-a}>0$ odnosno

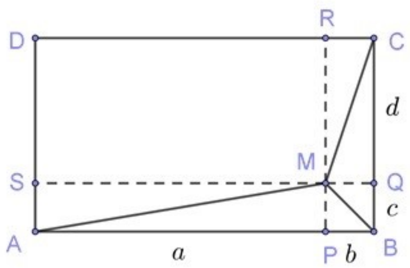
$$\begin{cases} a+1>0 \\ 1-a>0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} a+1<0 \\ 1-a<0 \end{cases}.$$

Rješenja će biti pozitivna za $a\in\langle -1,1\rangle$. 2 boda

2. (6 bodova) Zadan je pravokutnik $ABCD$ i točka M unutar njega. Ako vrijedi $|\overline{AM}| = 40$, $|\overline{BM}| = 4$ i $|\overline{CM}| = 21$ izračunajte duljinu dužine $\overline{DM}$.

Rješenje:

Skica:



1 bod

Neka su P, Q, R i S ortogonalne projekcije točke M na dužine AB, BC, CD i DA redom. Uz pomoć Pitagorina poučka možemo zapisati:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 40^2 \\ b^2 + c^2 &= 4^2 \\ b^2 + d^2 &= 21^2 \\ d^2 + a^2 &= x^2. \end{aligned}$$

2 boda

Rješavanjem sustava prve dvije jednakosti i druge dvije dobijemo:

$$a^2 - b^2 = 40^2 - 4^2.$$

1 bod

Oduzmemo li treću i četvrtu imamo:

$$a^2 - b^2 = x^2 - 21^2.$$

1 bod

Usporedimo li desne strane obiju jednakosti, možemo pisati:

$$x^2 - 21^2 = 40^2 - 4^2$$

pa je $x^2 = 40^2 + 21^2 - 4^2 = 2025$, odnosno $x = |\overline{DM}| = 45$.

1 bod

3. (6 bodova) Neka je zadana funkcija f sa svojstvom $f(3n) = n \cdot f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka za tu funkciju vrijedi da je $f(1) = 1$. Izračunajte $f(243)$.

Rješenje:

Treba prepoznati da je $f(243) = f(3^5)$. 1 bod

Raspisujemo $f(3^5) = f(3 \cdot 3^4)$. Analogijom raspisujemo dalje i koristimo svojstvo funkcije $f(3n) = n \cdot f(n), \forall n \in \mathbb{N}$ i dobivamo: 1 bod

$$
\begin{aligned}
f(3^5) &= f(3 \cdot 3^4) = 3^4 \cdot f(3^4) = 3^4 \cdot f(3 \cdot 3^3) = 3^4 \cdot 3^3 \cdot f(3^3) = \\
&= 3^4 \cdot 3^3 \cdot f(3 \cdot 3^2) = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot f(3^2) = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot f(3 \cdot 3^1) = && \text{1 bod} \\
&= 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot f(3) = 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot f(3 \cdot 3^0) && \text{1 bod} \\
&= 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^1 \cdot f(1) && \text{1 bod} \\
&= 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 1 = 3^{10}. && \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

4. (6 bodova) Dokažite da jednadžba $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 11$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje 1: Zadatak ćemo riješiti metodom faktorizacije. Zadanu jednadžbu raspišemo:

$$
\begin{aligned}
3x^2 + xy - 6xy - 2y^2 &= 11 \\
x(3x + y) - 2y(3x + y) &= 11
\end{aligned}
$$
1 bod

Nakon sređivanja izraza dobivamo

$$(x - 2y)(3x + y) = 11$$
1 bod

Djelitelji broja 11 su: $\pm 1, \pm 11$. Dobivamo sustave:

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = -11 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ 2 boda

Rješenja sustava su redom

$$\left(\frac{23}{7}, \frac{8}{7}\right), \quad \left(-\frac{23}{7}, -\frac{8}{7}\right), \quad \left(\frac{13}{7}, -\frac{32}{7}\right), \quad \left(-\frac{13}{7}, \frac{32}{7}\right).$$
1 bod

Kako su rješenja racionalni brojevi, jednadžba nema rješenje u skupu cijelih brojeva. 1 bod

Rješenje 2:

Raspisati izraz nadopunjavanjem na potpuni kvadrat:

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 5xy - 2y^2 &= 11 \\
3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \left(\frac{5}{6}y\right)^2 - \left(\frac{5}{6}y\right)^2\right) - 2y^2 &= 11 \\
3\left(x^2 - \frac{5}{3}xy + \left(\frac{5}{6}y\right)^2\right) - \frac{25}{12}y^2 - 2y^2 &= 11
\end{aligned}
$$
1 bod

Svodimo na razliku kvadrata:

$$3\left(x-\frac{5}{6}y\right)^2-\frac{49}{12}y^2=11$$
$$3\left(\left(x-\frac{5}{6}y\right)^2-\frac{49}{36}y^2\right)=11$$

Iz razlike kvadrata i uz pomoć faktorizacije dobivamo:

$$(3x+y)(x-2y)=11.$$ 1 bod

Djelitelji broja 11 su: $\pm1, \pm11$. Dobivamo sustave:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+y=-11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y=11 \\ 3x+y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y=-11 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ 2 boda

Rješenja sustava su redom

$$\left(\frac{23}{7},\frac{8}{7}\right),\quad \left(-\frac{23}{7},-\frac{8}{7}\right),\quad \left(\frac{13}{7},-\frac{32}{7}\right),\quad \left(-\frac{13}{7},\frac{32}{7}\right).$$ 1 bod

Kako su rješenja racionalni brojevi, jednadžba nema rješenje u skupu cijelih brojeva. 1 bod

5. (6 bodova) Domagoj je na kreditnoj kartici imao iznos koji je pokazivao x eura i y centi. U trgovini je potrošio točno polovinu novca. Nakon kupovine iznos na kreditnoj kartici koji se odnosi na cente bio je jednak iznosu koji se odnosio na eure prije kupovine, dok je iznos koji se odnosi na eure bio jednak polovici iznosa koji se odnosio na cente prije kupovine. Koji je iznos novca Domagoj imao na kreditnoj kartici pri ulasku u trgovinu?

Rješenje:

x – euri , y - centi.
Domagoj je na kartici prije ulaska imao $(100x+y)$ centi, $0<y\le100$. 1 bod

Nakon izlaska imao je pola, što znači $\left(50x+\frac{y}{2}\right)$ centi. 1 bod

Prema navedenome u zadatku, taj je iznos također jednak x centi i $\frac{y}{2}$ eura ili $x+50y$. Sada možemo izjednačiti izraze:

$$50x+\frac{y}{2}=x+50y$$ 1 bod

$x=\frac{99}{98}y$, odnosno omjer eura i centi jednak je 99 : 98. 1 bod

Kako x mora biti cijeli broj, tako y mora biti višekratnik broj 98. Najmanji takav je 98, a tada je x jednako 99. 1 bod

Iznos s kojim je Domagoj ušao u trgovinu je 99.98 eura. 1 bod

6. (10 bodova) Izračunajte zbroj:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\cdots+\frac{1}{9800}.$$

Rješenje:

Uočite da se može zapisati i kao:

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{98\cdot 100}.$$ 2 boda

Svaki razlomak sada ima oblik $\frac{1}{4k(k+1)}$, gdje je $k=1,2,3,\ldots,49$. 2 boda

Rastavimo razlomak kao

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{Ak+A+Bk}{k(k+1)} \tag{1}$$

$$A+B=0$$

$$A=1$$

$$B=-1$$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$ 2 boda

Sada početni zbroj možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right) \tag{2}$$ 2 boda

Izlučimo li $\frac{1}{4}$, dobit ćemo:

$$\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{49}{50}=\frac{49}{200}.$$

2 boda

Napomena: Postupak određivanja u (1) je 1 bod, ako ga nema, odnosno učenik je uspio pogađanjem, oduzima se jedan bod. Učenik dobiva 1 bod za bilo koji rastav nazivnika koji ne vodi do rješenja. Zaključak da je posljednji pribrojnik u (2) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)$ je 1 bod.

7. (10 bodova) Dokažite da je $\left(5+\sqrt{21}\right)\cdot\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$ cijeli broj.

Rješenje 1:

Prvi faktor treba zapisati u obliku:

$$\sqrt{\left(5+\sqrt{21}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$$ 1 bod

Raspisom se dobije razlika kvadrata ispod korijena

$$\begin{aligned}\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}} &=\\ &=\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{5^2-\sqrt{21}^2}\\ &=\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{25-21}\end{aligned}$$ 2 boda

Izlučivanjem $\sqrt{2}$ dobivamo:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{4}=\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2.$$ 1 bod

Izraz ispod korijena svodimo na kvadrat zbroja:

$$\sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2$$ 2 boda

$$=\sqrt{10+2\sqrt{21}}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2$$ 1 bod

$$=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2$$ 1 bod

Dobiva se razlika kvadrata:

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot 2=\left(\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2\right)\cdot 2=8.$$

Dobili smo broj 8 i pokazali što je trebalo dokazati. 2 boda

Rješenje 2: Cijeli izraz izjednačimo s a i kvadriramo:

$$(5+\sqrt{21})\cdot(\sqrt{14}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}=a$$

1 bod

Kvadriranjem dobivamo:

$$(5+\sqrt{21})^2\cdot(\sqrt{14}-\sqrt{6})^2\cdot\left(\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2=a^2$$

$$(46+10\sqrt{21})\cdot(20-2\sqrt{84})\cdot(5-\sqrt{21})=a^2$$ 1 bod

Izlučivanjem iz zagrada dobivamo:

$$2 \cdot 2 \cdot (23 + 5\sqrt{21}) \cdot (10 - \sqrt{84}) \cdot (5 - \sqrt{21}) = a^2$$ 1 bod

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$2 \cdot 2 \cdot (23 + 5\sqrt{21}) \cdot (10 - 2\sqrt{21}) \cdot (5 - \sqrt{21}) = a^2$$ 1 bod

$$8 \cdot (23 + 5\sqrt{21}) \cdot (5 - \sqrt{21}) \cdot (5 - \sqrt{21}) = a^2$$ 1 bod

Množenjem zagrada:

$$2 \cdot 2 \cdot 2(23 + 5\sqrt{21}) \cdot (5 - \sqrt{21})^2 = a^2$$

$$8 \cdot (23 + 5\sqrt{21}) \cdot (46 - 10\sqrt{21}) = a^2.$$ 1 bod

Izlučivanjem broja dobivamo razliku kvadrata:

$$16 \cdot (23 + 5\sqrt{21}) \cdot (23 - 5\sqrt{21}) = a^2$$ 1 bod

$$16 \cdot (23^2 - (5\sqrt{21})^2) = a^2$$ 1 bod

$$16 \cdot (529 - 525) = a^2$$

$$16 \cdot 4 = a^2$$ 1 bod

$$a^2 = 64$$

$$a = 8.$$

Dobili smo broj 8 i pokazali što je trebalo dokazati. 1 bod

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
3. razred – srednja škola – B-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Kolika je vrijednost izraza $\cos\left(2025^{\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}}\cdot\pi\right)$?

Rješenje:

Kako je

$$\frac{\log_3 12+\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}=\frac{\log_3 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}+\frac{\log_4 12}{\log_3 12\cdot\log_4 12}$$ 1 bod

$$=\frac{1}{\log_4 12}+\frac{1}{\log_3 12}$$ 1 bod

$$=\log_{12}4+\log_{12}3$$ 1 bod

$$=\log_{12}12$$ 1 bod

$$=1,$$ 1 bod

tražena vrijednost iznosi

$$\cos(2025\pi)=-1.$$ 1 bod

2. (6 bodova) Odredite sve vrijednosti realnog parametra a tako da jednadžba

$$4^x-(a+3)2^x+4(a-1)=0$$

ima točno jedno realno rješenje.

Rješenje:

Zamijenimo li $2^x=t$, $t>0$, dobijemo kvadratnu jednadžbu $t^2-(a+3)t+4a-4=0$ čija su rješenja 1 bod

$$t_1=4$$ 1 bod

i

$$t_2=a-1.$$ 1 bod

Da bi jednadžba imala točno jedno realno rješenje iz $t_2\Rightarrow x=\log_2(a-1)$, mora biti:

$$a-1\leq 0\Rightarrow a\leq 1$$ 1 bod

ili

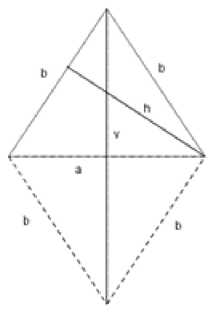
$$a-1=4\Rightarrow a=5.$$ 1 bod

Traženi parametar $a\in\langle-\infty,1]\cup\{5\}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik napiše da je diskriminanta jednaka nuli i izračuna da je tada $a=5$, bez intervala $\langle-\infty,1]$, dobiva 4 boda.

3. (6 bodova) Jednakokračni trokut rotira oko osnovice duljine a. Ako je duljina visine na osnovicu dvostruko veća od duljine visine na krak, koliko je oplošje nastalog rotacijskog tijela?

Rješenje:



To su dva stošca „slijepljena“ u bazama. Traženo oplošje jednako je dvostrukom plaštu jednog stošca. $O = 2r\pi s = 2vb\pi$. 1 bod

Znamo da je $v = 2h$ i $v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$. Površina trokuta je $P = \frac{av}{2} = \frac{bh}{2}$, tj. $av = bh$ iz čega slijedi da je $2a = b$. 2 boda

Sad imamo:

$$v^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow v = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$ 2 boda

Ukupno oplošje iznosi:

$$O = 2vb\pi = 2 \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{15} \cdot 2a \cdot \pi = 2\sqrt{15}\pi \cdot a^2.$$ 1 bod

4. (6 bodova) Poznato je da su $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2 - x + p = 0$, $p \in \mathbb{R}$ te vrijedi još i $\sin^2\beta + 2\cos^2\beta + p = \frac{5}{12}$. Odredite β ako je $0° \leq \beta \leq 180°$.

Rješenje 1: Za rješenja kvadratne jednadžbe vrijede Vièteove formule pa je $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$ i $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{p}{3}$. Kvadriranjem prve jednakosti dobije se

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{9},$$

tj. $1 + 2 \cdot \frac{p}{3} = \frac{1}{9}$ iz čega slijedi da je $p = -\frac{4}{3}$. 2 boda

Sad imamo da je $\sin^2\beta + 2\cos^2\beta - \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$, odnosno $\sin^2\beta + \cos^2\beta + \cos^2\beta - \frac{4}{3} = \frac{5}{12}$ pa ostaje da je $\cos^2\beta = \frac{5}{12} - 1 + \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$. 2 boda

Imamo dva slučaja, tj. dva rješenja za $0 \leq \beta \leq 180°$.

1. $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\beta_1 = 30°$ 1 bod
2. $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\beta_2 = 150°$ 1 bod

Rješenje 2: Za rješenja kvadratne jednadžbe vrijede Vièteove formule pa je $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$ i $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{p}{3}$. Kvadriranjem prve jednakosti dobije se

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{9},$$

tj. $1+2\cdot\frac{p}{3}=\frac{1}{9}$ iz čega slijedi da je $p=-\frac{4}{3}$. 2 boda

Iz $\sin^2\beta+2\cos^2\beta-\frac{4}{3}=\frac{5}{12}$ dobijemo $\sin^2\beta+2(1-\sin^2\beta)-\frac{4}{3}=\frac{5}{12}$, tj.
$\sin^2\beta=-\frac{5}{12}+2-\frac{4}{3}=\frac{1}{4}$. 2 boda

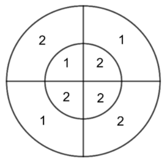
Zbog uvjeta $0\leq\beta\leq 180°$ je $\sin\beta=\frac{1}{2}$, tj.

$$\beta_1=30°$$ 1 bod

i

$$\beta_2=150°.$$ 1 bod

5. (6 bodova) Antina je omiljena igra pikado, no ovaj je put umjesto tradicionalne ploče odlučio koristiti metu sa skice. Polumjer unutrašnjega kruga dvostruko je manji od polumjera vanjskoga, a istaknuti promjeri međusobno su okomiti. Kolika je vjerojatnost da zbroj bodova koje Ante ostvari u dva bacanja strelice bude paran?



Rješenje 1: Neka unutrašnji krug ima polumjer r, a vanjski $2r$. Veliki je krug promjerima i manjim krugom podijeljen na 8 dijelova (polja). Površina manjega od tih dijelova (četvrtine manjega kruga) je $\frac{r^2\pi}{4}$,a površina većega (četvrtine kružnog vijenca) je $\frac{(2r)^2\pi-r^2\pi}{4}=\frac{3r^2\pi}{4}$. Istaknimo događaje: 1 bod

- A={pogođena je četvrtina manjega kruga}
- B={pogođena je četvrtina kružnog vijenca}
- C={pogođeno je polje s brojem 1}
- D={pogođeno je polje s brojem 2}

Pripadajuće su vjerojatnosti:

$$P(A)=\frac{\frac{r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{1}{16},$$ 1 bod

$$P(B)=\frac{\frac{3r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{3}{16},$$ 1 bod

$$P(C)=1\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$$ 1 bod

$$P(D)=3\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{3}{16}=\frac{9}{16}\text{ ili }1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$ 1 bod

Zbroj će u dva gađanja biti paran ako pogodi $(1,1)$ ili $(2,2)$, pa tražena vjerojatnost iznosi

$$P = \frac{7}{16}\cdot\frac{7}{16}+\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{16}=\frac{65}{128}.$$ 1 bod

Rješenje 2: Neka unutrašnji krug ima polumjer r, a vanjski $2r$. Veliki je krug promjerima i manjim krugom podijeljen na 8 dijelova (polja). Površina manjega od tih dijelova (četvrtine manjega kruga) je $\frac{r^2\pi}{4}$,a površina većega (četvrtine kružnog vijenca) je $\frac{(2r)^2\pi - r^2\pi}{4}=\frac{3r^2\pi}{4}$. Istaknimo događaje: 1 bod

- A={pogođena je četvrtina manjega kruga}
- B={pogođena je četvrtina kružnog vijenca}
- C={pogođeno je polje s brojem 1}
- D={pogođeno je polje s brojem 2}

Vjerojatnost da strelica pogodi dio (polje) s brojem 1 je

$$P(C)=\frac{2\cdot\frac{3r^2\pi}{4}+\frac{r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{\frac{7r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{7}{16},$$ 2 boda

(1 bod ako je učenik promatrao omjer površina, ali je napravio proceduralnu pogrešku), a vjerojatnost da pogodi dio (polje) s brojem 2 je

$$P(D)=\frac{2\cdot\frac{3r^2\pi}{4}+3\cdot\frac{r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{\frac{9r^2\pi}{4}}{(2r)^2\pi}=\frac{9}{16}\text{ ili}P(D)=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}.$$ 2 boda

(1 bod ako je učenik promatrao omjer površina, ali je napravio proceduralnu pogrešku) Zbroj će u dva gađanja biti paran ako pogodi $(1,1)$ ili $(2,2)$, odnosno

$$P = \frac{7}{16}\cdot\frac{7}{16}+\frac{9}{16}\cdot\frac{9}{16}=\frac{65}{128}.$$ 1 bod

6. (10 bodova) Odredite skup svih vrijednosti koje funkcija

$$f(x)=(\log_3 x)^4+16(\log_3 x)^2\cdot\log_3\frac{81}{x}$$

poprima na intervalu $[1,3^8]$. Za koji x iz tog intervala funkcija postiže najveću vrijednost?

Rješenje:

Zapišimo funkciju u obliku:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_3 x)^4+16(\log_3 x)^2\cdot(\log_3 81-\log_3 x)\\ &= (\log_3 x)^4+16(\log_3 x)^2\cdot(4-\log_3 x). \end{aligned}$$ 1 bod

Uvedemo li zamjenu $t=\log_3 x$, dobivamo:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4+16t^2(4-t) \\ &= t^2(t^2-16t+64)=(t(t-8))^2. \end{aligned}$$ 1 bod 1 bod

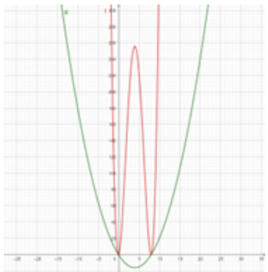
Za granične vrijednosti domene u varijabli t dobivamo:

$$t_1 = \log_3 1 = 0,\ t_2 = \log_3 6561 = 8,\ \text{ tj. } t \in [0, 8].$$ 1 bod

Funkcijske vrijednosti u graničnim vrijednostima domene t_1, t_2 su: $f(0) = 0,\ f(8) = 0$. 1 bod

Napomena: mogu se odrediti i uvrštavanjem u početni zapis funkcije za granične vrijednosti varijable x.

Uočimo da je $f(t) = (g(t))^2$, pri čemu je $g(t) = t(t-8)$ kvadratna funkcija s nultočkama t_1 i t_2 (vidi skicu), pa funkcija g minimalnu vrijednost postiže u apscisi tjemena $t_0 = \frac{t_1+t_2}{2} = 4$. 1 bod



Vrijednosti funkcije g na intervalu $t \in [0, 8]$ negativne su, a minimum funkcije g je u tjemenu te vrijedi $g(4) = -16$ što je minimalna vrijednost funkcije g. 1 bod*

Funkcija $f(t)$ koja je kvadrat funkcije g postiže maksimalnu vrijednost upravo u točki ekstrema funkcije g, tj. u $t_0 = 4$. Maksimalna vrijednost funkcije f je jednaka

$$\max f = f(4) = (4(4-8))^2 = 256.$$ 1 bod

Argument x_M u kojemu funkcija postiže maksimalnu vrijednost na zadanom intervalu izračunamo iz jednadžbe:

$$\log_3 x_M = 4 \Rightarrow x_M = 3^4 = 81.$$

Prema tome funkcija f na zadanom intervalu poprima vrijednosti iz intervala $[0, 256]$. 1 bod

Maksimalnu vrijednost f postiže za argument $x_M = 81$. 1 bod

Napomena: Bod označen s * učenik automatski dobiva ako izračuna $f(4) = (4(4-8))^2 = 256$, tj. u slučaju da nije posebno izračunao minimum funkcije g, već ga primjenjuje dalje u računu maksimuma funkcije f.

Graf funkcija $f(t)$ i $g(t)$ nije nužno prikazati, ali može zamijeniti bodove s izračunom granica domene, nultočaka te ekstrema ako su te vrijednosti prikazane na slici.

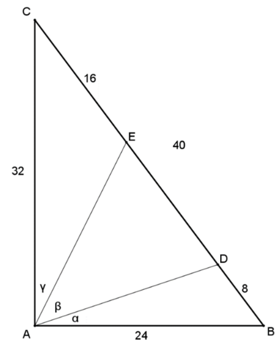
7. (10 bodova) Duljine stranica trokuta ABC su $|AB| = 24\,cm$, $|AC| = 32\,cm$, $|BC| = 40\,cm$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrane su točke D i E tako da je $|BD| = 8\,cm$, $|CE| = 16\,cm$. Kolika je mjera kuta $\measuredangle DAE$?

Rješenje:

Vrijedi

$$24^2 + 32^2 = 576 + 1204 = 1600 = 40^2$$

pa je trokut $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom u vrhu A. 2 boda



Označimo: $\alpha = |\measuredangle BAD|$, $\beta = |\measuredangle DAE|$, $\gamma = |\measuredangle EAC|$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$ 1 bod

Sada imamo

$$|DE| = 40 - 16 - 8 = 16\,cm.$$ 1 bod

$$\Rightarrow |BE| = 8 + 16 = 24\,cm \;\Rightarrow\; \triangle ABE \text{ je jednakokračni}$$ 1 bod

$$\Rightarrow\; |\measuredangle AEB| = \alpha + \beta$$ 1 bod

$$\Rightarrow |CE| = 16 + 16 = 32\,cm \;\Rightarrow\; \triangle ACD \text{ je jednakokračni}$$ 1 bod

$$\Rightarrow\; |\measuredangle ADC| = \beta + \gamma$$ 1 bod

Za kutove $\triangle ADE$ sad vrijedi:

$$\beta + (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ$$ 1 bod

$$90^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

Traženi kut iznosi: $\beta = 45^\circ$. 1 bod

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – B-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Izračunajte zbroj rješenja jednadžbe

$$\sin x + \cos x + |\sin x - \cos x| = 1,$$

za $x \in [0, 2\pi]$.

Rješenje:

Da bismo riješili zadanu jednadžbu s apsolutnom vrijednošću, potrebno je promatrati dva slučaja. 1 bod

- Prvi slučaj:
  Ako je $\sin x - \cos x \geq 0$, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x + \sin x - \cos x &= 1 \\ 2\sin x &= 1. \end{aligned}$$

  Rješavanjem jednadžbe $\sin x = \frac{1}{2}$ dobivamo rješenja $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
  Iz uvjeta zadatka da je $x \in [0, 2\pi]$ slijedi $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. 1 bod

  Kako smo razmatrali slučaj u kojemu je $\sin x - \cos x \geq 0$, tj. $\sin x \geq \cos x$, uviđamo da dobiveno rješenje x_1 taj uvjet ne zadovoljava. Rješenje zadane jednadžbe je samo $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. 1 bod

- Drugi slučaj:
  Ako je $\sin x - \cos x < 0$, vrijedi da je:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x - (\sin x - \cos x) &= 1 \\ 2\cos x &= 1. \end{aligned}$$

  Rješavanjem jednadžbe $\cos x = \frac{1}{2}$ dobivamo rješenja $x_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_4 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Iz uvjeta zadatka da je $x \in [0, 2\pi]$ slijedi $x_3 = \frac{\pi}{3}$, $x_4 = \frac{5\pi}{3}$. 1 bod

  Kako smo razmatrali slučaj u kojemu je $\sin x - \cos x < 0$, tj. $\sin x < \cos x$, uviđamo da dobiveno rješenje x_3 taj uvjet ne zadovoljava. Rješenje zadane jednadžbe je samo $x_4 = \frac{5\pi}{3}$. 1 bod

Zbroj rješenja zadane jednadžbe je:

$$x_2 + x_4 = \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{2}.$$ 1 bod

2. (6 bodova) Odredite duljinu tetive koju kružnica $(x+4)^2+(y-3)^2=r^2$ odsijeca na osi ordinata, ako je poznato da je duljina tetive koju odsijeca na osi apscisa jednaka 6 jediničnih dužina.

Rješenje:

Ordinate krajnjih točaka tetive koja je na osi apscisa su $y = 0$. Uvrštavanjem te koordinate u jednadžbu kružnice $(x+4)^2+(y-3)^2=r^2$ dobivamo:

$$x^2+8x-r^2+25=0.$$ 1 bod

Rješavanjem dobivene kvadratne jednadžbe dobivamo da je:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{64-4(25-r^2)}}{2} \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16-(25-r^2)} \\ x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{r^2-9}. \end{aligned} \tag{1}$$ 1 bod

Duljina tetive jednaka je 6 jediničnih dužina pa vrijedi da je:

$$|x_1 - x_2| = 6. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi da je:

$$\left|\left(-4+\sqrt{r^2-9}\right)-\left(-4-\sqrt{r^2-9}\right)\right| = 6$$ 1 bod

$$\begin{aligned} &\left|2\sqrt{r^2-9}\right| = 6 \\ &\left|\sqrt{r^2-9}\right| = 3 \\ &r^2-9=9 \\ &r^2=18. \end{aligned}$$ 1 bod

Jednadžba zadane kružnice sada je jednaka:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=18. \tag{3}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu kružnice (3) dobivamo:

$$16+(y-3)^2=18 \Rightarrow y_{1,2}=3\pm\sqrt{2}.$$ 1 bod

Duljina tražene tetive jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike ordinata krajnjih točaka te tetive, tj.

$$|y_1-y_2| = \left|\left(3+\sqrt{2}\right)-\left(3-\sqrt{2}\right)\right| = 2\sqrt{2}$$

jediničnih dužina. 1 bod

Napomena: Ako učenik ima zapis za duljinu dužine bez apsolutne vrijednosti, a ima zapis ili skicu na osnovi koje može zaključiti koja je koordinata veća, a koja manja, bodovi mu se ne umanjuju.

3. (6 bodova) Odredite sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $\overline{z}i = z^2$.

Rješenje:

Označimo zadani kompleksni broj s: $z = x + yi$. Tada vrijedi da je:

$$\begin{aligned} (x - yi)i &= (x + yi)^2 \\ xi - yi^2 &= x^2 + 2xyi + y^2 i^2 \\ xi + y &= x^2 + 2xyi - y^2. \end{aligned}$$

Izjednačimo li realne te imaginarne dijelove gornje jednadžbe, dobivamo:

$$y = x^2 - y^2 \tag{4}$$

i

$$x = 2xy. \tag{5}$$ 1 bod

Iz jednakosti (5) slijedi da je $x - 2xy = 0$, tj. da je $x(1 - 2y) = 0$ pa imamo dva slučaja.

- Prvi slučaj:
  Ako je $x = 0$, tada je

  $$\begin{aligned} &y = 0^2 - y^2 \\ &y^2 + y = 0 \\ &y(y+1) = 0. \end{aligned}$$

  Rješenja dobivene jednadžbe su:

  $$y_1 = 0,\ y_2 = -1.$$ 2 boda

- Drugi slučaj:
  Ako je $y = \frac{1}{2}$ tada je

  $$\begin{aligned} &\frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{4} \\ &x^2 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

  Rješenja ove jednadžbe su $x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2 boda

Traženi kompleksni brojevi za koje vrijedi zadana jednakost su:

$$z_1 = 0,\ z_2 = -i,\ z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$ 1 bod

4. (6 bodova) Zadani su nizovi za koje vrijedi $a_1 = b_1 = 25$ i $b_n = a_n - a_{n-1} = 3n + 22$. Izračunajte a_{200} i b_{200}.

Rješenje:

Uvrstimo li da je $n = 200$ u izraz $b_n = 3n + 22$, dobivamo:

$$\begin{aligned} b_n &= 3n + 22 \\ b_{200} &= 3 \cdot 200 + 22 \\ b_{200} &= 622. \end{aligned}$$ 1 bod

Raspišemo li vrijednosti izraza $a_n - a_{n-1} = 3n + 22$ za $n = 1, \ldots, 200$, dobivamo jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= 25 \\ a_2 - a_1 &= 28 \\ a_3 - a_2 &= 31 \\ a_4 - a_3 &= 34 \\ &\vdots \\ a_{200} - a_{199} &= 322. \end{aligned}$$ 2 boda

Zbrajanjem jednakosti dobivamo:

$$a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_{200} - a_{199} = 25 + 28 + 31 + 34 + \cdots + 322.$$ 1 bod

Slijedi da je:

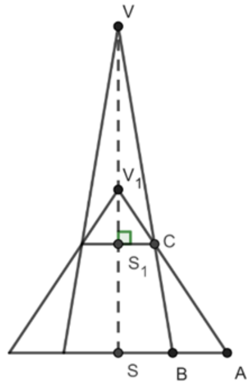
$$a_{200} = \frac{200(25 + 322)}{2} = 34700.$$ 2 boda

5. (6 bodova) Dva uspravna stošca imaju zajedničku os, a baze tih stožaca su koncentrični krugovi u istoj ravnini. Polumjer baze višeg stošca, kojemu je visina dva puta dulja od visine nižeg stošca, dva puta je kraći od polumjera baze nižeg stošca. Izračunajte duljinu kružnice koja je sjecište plaštova ovih dvaju stožaca, ako je dana duljina R polumjera baze nižeg stošca.

Rješenje:

U zadatku je navedeno da je duljina polumjera nižeg stošca jednaka R pa duljinu polumjera višeg stošca, koji je dva puta kraći, označimo s $\frac{R}{2}$. Analogno navedenome, ako visinu kraćeg stošca označimo s h, duljinu višeg stošca označit ćemo s $2h$. 1 bod

Skiciramo li osni presjek ovih stožaca, vidimo da su po poučku $K - K$ trokuti $\triangle SAV_1$ i $\triangle S_1CV_1$ slični.



Označimo li s $x = |\overline{S_1V_1}|$, vrijedi da je:

$$R : h = r : x \Rightarrow Rx = hr.$$

$$x = \frac{hr}{R}. \qquad (6)$$ 1 bod

Analogno gornjem zaključku, zaključujemo da su trokuti $\triangle S_1CV$ i $\triangle SBV$ slični pa vrijedi da je:

$$\frac{R}{2} : 2h = r : (h+x) \Rightarrow R(h+x) = 4hr.$$

$$Rx = 4hr - Rh$$

$$x = \frac{4hr - Rh}{R}. \qquad (7)$$ 2 boda

Izjednačavanjem jednakosti (6) i (7) dobivamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{hr}{R} &= \frac{4hr - Rh}{R} \\ hr &= 4hr - Rh \\ 3hr &= Rh \Rightarrow r = \frac{R}{3}. \end{aligned}$$ 1 bod

Duljina, odnosno opseg tražene kružnice iznosi $o = 2r\pi$, tj. $o = 2 \cdot \frac{R}{3} \cdot \pi = \frac{2}{3}R\pi$. 1 bod

6. (10 bodova) Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi da je

$$x! + 3 = y^2.$$

Rješenje:

Ako broj $x!$ nije djeljiv brojem 3, tada je $x = 1$ ili $x = 2$.

Za $x = 1 \Rightarrow x! + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$ pa je $y = 2$. 1 bod

Za $x = 2 \Rightarrow x! + 3 = 2 + 3 = 5$, a broj 5 nije kvadrat prirodnog broja pa takav y ne postoji.

Za $x = 3 \Rightarrow x! + 3 = 6 + 3 = 9 = 3^2$ pa je $y = 3$. 1 bod

Za $x = 4 \Rightarrow x! + 3 = 24 + 3 = 27$, a broj 27 nije kvadrat prirodnog broja pa takav y ne postoji.

Za $x = 5 \Rightarrow x! + 3 = 120 + 3 = 123$ pa prirodan broj y ni za ovaj slučaj ne postoji. 1 bod

Za $x \geq 3$, vrijedi da je broj $x!$ djeljiv brojem 3.

Ako je broj $x!$ djeljiv brojem 3, tada vrijedi da je i zbroj $x! + 3$ djeljiv brojem 3 pa je i y^2 djeljiv brojem 3, odakle slijedi da je y^2 djeljiv i brojem 9. Ako je y^2 djeljiv brojem 9, onda je i zbroj $x! + 3$ djeljiv brojem 9. 3 boda

Za $x \geq 6$ vrijedi da je $x! + 3 = 9k + 3 \Rightarrow x! + 3$ nije djeljiv brojem 9. To znači da ni y^2 ne može biti djeljiv brojem 9 što je u suprotnosti sa gornjim zaključkom. 2 boda

Zaključujemo da za $x \geq 6$ nema prirodnih brojeva za koje vrijedi zadana jednakost. 1 bod

Jedini parovi brojeva koji zadovoljavaju zadanu jednadžbu su $x = 1$, $y = 2$ i $x = 3$, $y = 3$. 1 bod

7. (10 bodova) Izračunajte vrijednost x u izrazu

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^n$$

razvoja binoma čiji je četvrti član jednak 200, a umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak je 30.

Rješenje:

Izraz $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^n$ je definiran za $x > 0$ i $\log x + 1 \neq 0$, tj. $x \neq 10^{-1}$ iz čega slijedi da je izraz definiran za $x \in \langle 0, \frac{1}{10}\rangle \cup \langle \frac{1}{10}, +\infty\rangle$. 1 bod

Da je umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak 30 zapisujemo:

$$\binom{n}{2} \cdot 2\binom{n}{n} = 30$$ 1 bod

$$\begin{aligned} \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot 2\binom{n}{0} &= 30 \\ n(n-1) &= 30 \\ n^2 - n - 30 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja gornje jednadžbe su $n_1 = 6$, $n_2 = -5$. 1 bod

Zbog uvjeta da je $n \geq 2$ i $n \geq 1$ slijedi da je rješenje jednadžbe samo $n_1 = 6$. 1 bod

Četvrti član razvoja binoma jednak je:

$$\begin{aligned} T_4 &= \binom{6}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\log x+1}}\right)^{6-3}\left(\sqrt[12]{x}\right)^3 \\ &= \binom{6}{3}\left(x^{\frac{1}{2(\log x+1)}}\right)^3 x^{\frac{1}{4}} \\ &= \binom{6}{3} x^{\frac{3}{2(\log x+1)}} x^{\frac{1}{4}} \\ &= \binom{6}{3} x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$ 1bod

Prema uvjetima zadatka slijedi da je $\binom{6}{3}x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 200$, tj. da je $x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = 10$. Rješavanjem dobivene jednadžbe dobivamo: 1 bod

$$\begin{aligned} &\log x^{\frac{3}{2(\log x+1)}+\frac{1}{4}} = \log 10 \\ &\left(\frac{3}{2(\log x+1)} + \frac{1}{4}\right)\log x = 1 \\ &\frac{6+\log x+1}{4(\log x+1)}\log x = 1 \\ &(7+\log x)\log x = 4(\log x+1) \\ &\log^2 x + 3\log x - 4 = 0. \end{aligned}$$ 1 bod

Supstitucijom da je $\log x = t$ dobivamo jednadžbu $t^2 + 3t - 4 = 0$, čija su rješenja: $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. 1 bod

Uvrštavanjem dobivenih rješenja u supstituirani izraz dobivamo rješenja dviju vrijednosti za traženi x, tj. da je $x_1 = 10^{-4}$, $x_2 = 10$. 2 boda