Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
1. razred – srednja škola – A-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Odredite sve dvoznamenkaste prirodne brojeve za koje vrijedi da su točno tri puta veći od umnoška svojih znamenaka.

Rješenje:

Označimo traženi broj s $\overline{ab}$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti

$$10a + b = 3ab.$$

Odnosno

$$b = \frac{10a}{3a-1},$$ 1 bod

pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $3a-1 \neq 0$ budući $a = \frac{1}{3}$ nije prirodan broj.

Ako je a neparna znamenka, tada je nazivnik ovog razlomka paran. Da bi broj b bio prirodan, u tom slučaju mora biti $3a-1=2$, odnosno $a=1$ i $b=5$. 2 boda

Ako je a parna znamenka, tada je nazivnik ovog razlomka neparan. Da bi broj b bio prirodan, u tom slučaju mora biti $3a-1=5$, odnosno $a=2$ i $b=4$. 2 boda

Prema navednom, jedina dva broja koja zadovoljavaju uvjete zadatka su 15 i 24. 1 bod

Napomena: Ako učenik do točnog rješenja dođe drugačijom provjerom i eksplicitno pokaže da je našao sva rješenja dobiva sve bodove. Ako pogodi rješenja, a ne dokaže da su to jedina rješenja dobiva tri boda, a ako pogodi samo jedno rješenje dobiva jedan bod.

2. (6 bodova) Neka su a i b pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$a^2 + b^2 = 10 \qquad \text{i} \qquad a^4 + b^4 = 82.$$

Odredite vrijednost izraza $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3}$.

Rješenje:

Kvadriranjem izraza $a^2 + b^2$ dobivamo:

$$(a^2+b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2.$$

Uvrštavanjem zadanih uvjeta slijedi:

$$10^2 = 82 + 2a^2b^2,$$

odnosno

$$a^2b^2 = 9.$$

Zbog pozitivnosti brojeva a i b slijedi da je $ab = 3$. 2 boda

Kvadriranjem izraza $a + b$ dobivamo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 10 + 2 \cdot 3 = 16,$$

pa zbog pozitivnosti brojeva a i b slijedi da je $a + b = 4$. 2 boda

Sada imamo:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3+b^3}{a^3b^3} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(ab)^3} = \frac{4 \cdot (10-3)}{3^3} = \frac{4 \cdot 7}{27} = \frac{28}{27}.$$ 2 boda

3. (6 bodova) Dokažite da je broj $2030^{12} - 2020^{12}$ djeljiv s brojem 2025.

Rješenje 1: Primjenom formule za razliku kubova dobivamo:

$$2030^{12} - 2020^{12} = (2030^4)^3 - (2020^4)^3 = (2030^4 - 2020^4)(2030^8 + 2030^4 2020^4 + 2020^8).$$ 2 boda

Nadalje, primjenom formule za razliku kvadrata slijedi:

$$2030^4 - 2020^4 = (2030^2 - 2020^2)(2030^2 + 2020^2)$$ 1 bod

$$= (2030 - 2020)(2030 + 2020)(2030^2 + 2020^2) = 10 \cdot 4050 \cdot (2030^2 + 2020^2).$$ 2 boda

Kako je $4050 = 2 \cdot 2025$ zadana tvrdnja je dokazana. 1 bod

Rješenje 2: Primijenimo formulu:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$ 1 bod

Uvrstimo li $n = 6$, $a = 2030^2$ i $b = 2020^2$ u gornju formulu i raspišemo li razliku kvadrata dobivamo:

$$(2030^2)^6 - (2020^2)^6 = (2030^2 - 2020^2)\left[(2030^2)^5 + (2030^2)^4 \cdot 2020^2 + (2030^2)^3(2020^2)^2 + \right.$$
$$\left. +(2030^2)^2(2020^2)^3 + 2030^2(2020^2)^4 + (2020^2)^5\right].$$ 2 boda

Pa imamo da je

$$(2030^2)^6 - (2020^2)^6 = (2030 - 2020)(2030 + 2020)(2030^{10} + 2030^8 \cdot 2020^2 + 2030^6 \cdot 2020^4 +$$
$$+2030^4 \cdot 2020^6 + 2030^2 \cdot 2020^8 + 2020^{10}) = 10 \cdot 4050 \cdot x$$ 2 boda

Kako je $4050 = 2 \cdot 2025$ zadana tvrdnja je dokazana. 1 bod

Rješenje 3: Zadatak se može riješiti korištenjem modularne aritmetike. Uočimo da vrijedi:

$$2030 \equiv 5 \pmod{2025}, \quad 2020 \equiv -5 \pmod{2025},$$ 2 boda

pri čemu se koristi činjenica da su brojevi 2030 i 2020 za 5 veći, odnosno manji od višekratnika broja 2025.

Zatim imamo da je

$$2030^{12} \equiv 5^{12} \pmod{2025}, \quad 2020^{12} \equiv (-5)^{12} \pmod{2025}.$$ 1 bod

S obzirom da je eksponent paran broj, vrijedi da je $(-5)^{12} = 5^{12}$. 1 bod

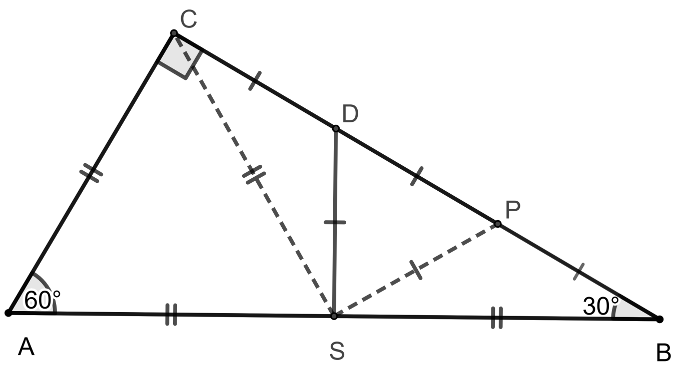
Promotrimo razliku:

$$2030^{12} - 2020^{12} \equiv 5^{12} - 5^{12} = 0 \pmod{2025},$$ 1 bod

čime smo pokazali da je dani izraz djeljiv s brojem 2025. 1 bod

4. (6 bodova) Jedan kut pravokutnog trokuta ΔABC iznosi 30°, a kraća kateta duljine je 3 cm. U polovištu S hipotenuze $\overline{AB}$ podignuta je okomica na hipotenuzu i njezino sjecište s duljom katetom označeno je s D. Odredite duljinu dužine $\overline{SD}$.

Rješenje 1: Promotrimo sliku:



Središte svakom pravokutnom trokutu opisane kružnice nalazi se u polovištu hipotenuze (točka S), pa je trokut ΔASC je jednakokračan ($|AS| = |SC|$). 1 bod

U jednakokračnom trokutu ΔASC jedan je kut uz osnovicu mjere 60°, iz čega slijedi da su mu svi unutarnji kutovi sukladni te je ΔASC jednakostraničan trokut. 1 bod

Kako je $|AS| = |AC| = 3$ cm, onda je duljina hipotenuze $c = 6$ cm, te primjenom Pitagorinog poučka možemo odrediti duljinu duže katete trokuta ΔABC. Slijedi $a^2 = c^2 - b^2 = 36 - 9 = 27$, pa je $a = 3\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Trokut ΔSDC je jednakokračan jer vrijedi da je $|\measuredangle DSC| = |\measuredangle SCD| = 90° - 60° = 30°$. Pa slijedi da je $|CD| = |SD|$, te $|\measuredangle CDS| = 120°$. 1 bod

Označimo s P polovište dužine $\overline{BD}$. Trokut ΔSPD je jednakostraničan jer je trokut ΔSBD pravokutan pa je $|SP| = |DP| = |PB|$, te je u trokutu ΔSPD mjera kuta uz osnovicu jednaka $|\measuredangle SDP| = 180° - 120° = 60°$ što zapravo znači da su mu svi unutarnji kutevi sukladni. Pa imamo da je $|SD| = |DP|$. 1 bod

Kako je $|SD| = |CD| = |DP| = |PB|$ to je $|SD| = \frac{1}{3}|BC| = \frac{a}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ cm. 1 bod

Rješenje 2:

Na isti način kao i u 1. rješenju možemo zaključiti da je trokut ΔASC jednakostraničan, odakle slijedi da je $|AC| = |AS| = |SB| = 3$ cm. 2 boda

Promotrimo pravokutan trokut ΔSBD (mjere njegovih unutrašnjih kutova su 30°, 60° i 90°). 1 bod

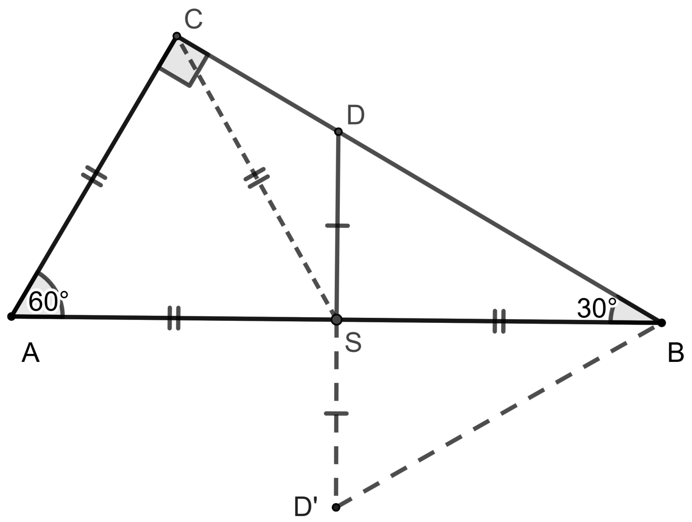
Primjenjujući svojstva pravokutnog trokuta (odnosno trigonometrijski omjer) na taj trokut dobivamo da je $\frac{|SD|}{|SB|} = \text{tg } 30°$, pri čemu je $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 2 boda

Stoga, vrijedi da je $|SD| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ cm. 1 bod

Rješenje 3:

Promotrimo pravokutan trokut ΔSBD (mjere njegovih unutrašnjih kutova su 30°, 60° i 90°). 1 bod

Taj trokut možemo nadopuniti do jednakostraničnog trokuta $\Delta DD'B$ kao na slici.



1 bod

$\overline{SB}$ je visina trokuta $\Delta DD'B$ i njezina duljina iznosi 3 cm (do zaključka se može doći kao u rješenju 1 ili primjenom trigonometrijskih omjera u pravokutnom trokutu ΔABC). 2 boda

Duljinu stranice jednakostraničnog trokuta $\Delta DD'B$ možemo izraziti pomoću duljine visine tog trokuta, odnosno $|SB| = \frac{|DD'| \cdot \sqrt{3}}{2}$, odakle slijedi da je $\frac{2 \cdot |SD| \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$ pa je $|SD| = \sqrt{3}$ cm. 2 boda

Rješenje 4:

Uočimo da su trokuti ΔABC i ΔSBD slični (sukladni su im kutevi), pa vrijedi

$$|SD| : |AC| = |SB| : |CB| \quad (*)$$

1 bod

Duljinu stranice $\overline{SB}$ moguće je izračunati na jedan od spomenutih načina u prethodnim varijantama rješenja, npr. $\cos 60° = \frac{|AC|}{2|SB|}$, pa je $|SB| = 3$ cm. 2 boda

Duljinu stranice $\overline{CB}$ u trokutu ΔABC moguće je izračunati na nekoliko načina:

- primjenom Pitagorinog poučka (odnosno $|CB| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = 3\sqrt{3}$ cm),
- primjenom trigonometrijskih omjera (npr. $|CB| = |AC| \cdot \text{tg } 60° = 3\sqrt{3}$ cm),
- uočavanjem da se trokut ΔABC može nadopuniti do jednakostaničnog trokuta kojemu je $\overline{CB}$ visina, pa je $|CB| = \frac{2 \cdot |AC| \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm. 2 boda

Uvrštavanjem svih poznatih vrijednosti u $(*)$ dobivamo da je

$$|SD| = \frac{|SB||AC|}{|CB|} = \sqrt{3} \text{ cm.}$$ 1 bod

5. (6 bodova) Odredite zadnju znamenku zbroja $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025}$.

Rješenje 1:

Uočimo da vrijedi:

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} = 2^n(1 + 2 + 4 + 8) = 2^n \cdot 15 = 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 10,$$

za sve $n \geq 1$.

Kako je broj $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$ djeljiv s 10, njegova zadnja znamenka je 0. 2 boda

Prema tome, grupiranjem po četiri odgovarajuća pribrojnika, polazni zbroj poprima oblik:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025} = 1 + 10 \cdot m + 2^{2025}.$$

Iz ovoga zaključujemo da zadnja znamenka zadanog broja ovisi o zadnjoj znamenki broja $2^{2025} = 2 \cdot 2^{2024} = 2 \cdot (2^4)^{506}$. 2 boda

Uočimo da je $2^4 = 16 = 10 + 6$. Kvadriranjem slijedi $(2^4)^2 = 100 + 120 + 36 = 250 + 6$, pa zaključujemo da vrijedi:

$$(2^4)^{2n} = 10 \cdot k + 6.$$

Sada je $2 \cdot (2^4)^{506} = 2(10 \cdot k + 6) = 20 \cdot k + 12$, pa je zadnja znamenka broja 2^{2025} jednaka 2. 1 bod

Kako je polazni zbroj oblika $1 + 10 \cdot m + 2^{2025}$, zaključujemo da je njegova zadnja znamenka $1 + 2 = 3$. 1 bod

Napomena: Učeniku koji je zadnju znamenku broja 2^{2025} odredio temeljem zaključka o cikličkom ponavljanju zadnjih znamenki potencija broja 2 uz odgovarajuće obrazloženje priznati sve pripadne bodove.

Rješenje 2:

Uočimo da vrijedi

$$2^{2026} - 1 = (2 - 1)(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025}),$$

odnosno

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2025} = 2^{2026} - 1.$$ 2 boda

Uočimo da je $2^{2026} = 4 \cdot 2^{2024} = 4 \cdot (2^4)^{506}$. 1 bod

Na isti način kao i u prvom rješenju zaključujemo da je $(2^4)^{2n} = 10 \cdot k + 6$, pa slijedi

$$4 \cdot (2^4)^{506} = 4(10 \cdot k + 6) = 40 \cdot k + 24$$

te je zadnja znamenka broja 2^{2026} jednaka 4. 2 boda

Zadnja znamenka broja $2^{2026} - 1$, odnosno polaznog zbroja, jednaka je $4 - 1 = 3$. 1 bod

6. (10 bodova) Koliko ima brojeva u skupu $S = \{1, 2, \ldots, 300\}$ koji nisu djeljivi ni s jednim od brojeva 3, 5 i 7?

Rješenje 1:

Označimo s $k(A)$ broj elemenata skupa A. Očito je $k(S) = 300$. Nadalje, označimo s A_3, A_5 i A_7 skupove onih brojeva iz S koji su djeljivi redom s 3, 5 i 7.

Svaki treći broj iz skupa S djeljiv je s 3. Stoga, elemenata u skupu A_3 ima $k(A_3) = \frac{300}{3} = 100$. 1 bod

Analogno dobivamo da je $k(A_5) = \frac{300}{5} = 60$. 1 bod

Nadalje, s obzirom da je $\frac{300}{7} = 42.857$, možemo zaključiti da u skupu S postoje točno 42 broja djeljiva s 7, odnosno $k(A_7) = 42$. 1 bod

Svaki petnaesti broj iz skupa S je djeljiv istovremeno s 3 i 5. Stoga je $k(A_3 \cap A_5) = \frac{300}{15} = 20$. 1 bod

Analogno dolazimo do zaključka da je broj elemenata iz S koji su djeljivi s 3 i 7 jednak $\frac{300}{21} = 14.286$, pa je $k(A_3 \cap A_7) = 14$. 1 bod

Broj elemenata iz S koji su djeljivi s 5 i 7 jednak je $\frac{300}{35} = 8.571$, odakle slijedi da je $k(A_5 \cap A_7) = 8$. 1 bod

Promotrimo sada skup $A_3 \cap A_5 \cap A_7$, odnosno skup elemenata iz S koji su djeljivi s 3, 5 i 7. Taj skup ima samo dva elementa, a to je broj $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ i broj 210, pa je $k(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = 2$. 1 bod

Primjenom formule uključivanja i isključivanja dobivamo:

$$k(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = k(A_3) + k(A_5) + k(A_7) - k(A_3 \cap A_5)$$

$$-k(A_3 \cap A_7) - k(A_5 \cap A_7) + k(A_3 \cap A_5 \cap A_7),$$

pa je $k(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162$. Drugim riječima 162 broja iz skupa S djeljiva su s barem jednim od brojeva 3, 5 ili 7. 1 bod

Konačno, brojeva brojeva iz skupa S koji nisu djeljivi s niti jednim od brojeva 3, 5 i 7 ima $k(S) - k(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = 300 - 162 = 138$. 2 boda

Napomena: Ako je učenik korektno označio skupove i točno odredio pripadne brojeve elemenata potrebno je priznati sve odgovarajuće bodove bez obzira na to je li detaljno obrazložio postupak ili ne.

Rješenje 2:

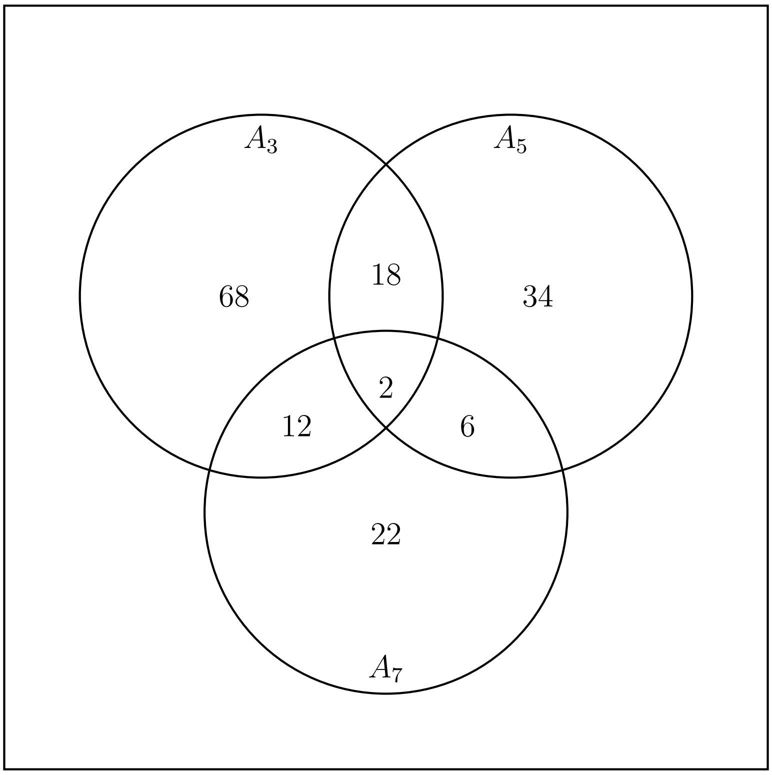
Kao i u prvom rješenju označimo s A_3, A_5 i A_7 skupove onih brojeva iz S koji su djeljivi redom s 3, 5 i 7 te prikažimo broj elemenata tih skupova pomoću Vennovog dijagrama.

Analognim postupkom kao i u prvom rješenju zaključujemo da se:

- u skupu A_3 nalazi 100 brojeva, 1 bod
- u skupu A_5 nalazi 60 brojeva, 1 bod
- u skupu A_7 nalaze 42 broja, 1 bod
- u skupu $A_3 \cap A_5$ nalazi 20 brojeva, 1 bod
- u skupu $A_3 \cap A_7$ nalazi 14 brojeva, 1 bod
- u skupu $A_5 \cap A_7$ nalazi 8 brojeva, 1 bod

- u skupu $A_3 \cap A_5 \cap A_7$ nalaze 2 broja. 1 bod

Temeljem ovih podataka konstruiramo Vennov dijagram kao na sljedećoj slici:



2 boda

Temeljem Vennovog dijagrama zaključujemo da brojeva iz skupa S koji nisu djeljivi s niti jednim od brojeva 3, 5 i 7 ima $300 - 68 - 34 - 22 - 18 - 12 - 6 - 2 = 138$. 1 bod

Napomena: Ako je učenik korektno označio skupove i ispunio Vennov dijagram potrebno je priznati sve odgovarajuće bodove bez obzira na to je li detaljno obrazložio postupak ili ne. U tom slučaju bodove priznavati tako da svako točno ispunjeno polje Vennova dijagrama nosi 1 bod.

7. (10 bodova) Lukin broj pratitelja na društvenoj mreži svake godine raste za 50, dok Markov broj pratitelja raste za 20. Trenutačno Luka ima tri puta više pratitelja nego što je Marko imao u trenutku kada je Lukin broj pratitelja bio jednak trenutačnom broju Markovih pratitelja. Pretpostavlja se da će Marku trebati 5 godina da dostigne trenutačan broj Lukinih pratitelja. Koliko pratitelja Luka i Marko imaju trenutačno?

Rješenje:

Označimo s L trenutni broj Lukinih pratitelja, a s M trenutni broj Markovih pratitelja.

Pretpostavimo da je Luka imao M pratitelja prije n godina. Kako Luka svake godine dobiva 50 pratitelja, vrijedi:

$$L = M + 50n.$$ 2 boda

Prema drugom uvjetu zadatka, odnosno prema zadanoj pretpostavci vrijedi:

$$M + 5 \cdot 20 = L.$$ 2 boda

Iz ovog sustava slijedi da je $n = 2$. 1 bod

Prema prvom uvjetu zadatka je:

$$L = 3(M - 20n) = 3M - 120.$$ 2 boda

Sada dobivamo sustav jednadžbi:

$$3M - L = 120, \qquad L = M + 100,$$ 1 bod

čijim rješavanjem dobivamo da je $M = 110$ i $L = 210$, odnosno Luka trenutno ima 210, a Marko 110 pratitelja. 2 boda

Napomena: Ako učenik do točnog rješenja dođe drugačijom provjerom i eksplicitno pokaže da je našao sva rješenja dobiva sve bodove. Ako pogodi rješenja, a ne dokaže da su to jedina rješenja dobiva tri boda, a ako pogodi samo jedno rješenje dobiva jedan bod.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
2. razred – srednja škola – A – varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Odredite realan parametar m za koji je kvadrat razlike rješenja jednadžbe $x^2 + 2mx + m = 1$ najmanji te odredite najmanju pripadnu vrijednost.

Rješenje 1: Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe.
Primjenom Vieteovih formula za $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ slijedi

$$x_1 + x_2 = -2m \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = m - 1.$$ 1 bod

Iskaže se kvadrat razlike rješenja koristeći Vieteove formule:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = && \text{1 bod}\\ &= 4m^2 - 4m + 4 && \text{1 bod}\\ &= (2m-1)^2 + 3 && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Kvadrati realnih brojeva nisu negativni pa za svaki $m \in \mathbb{R}$ je $(2m-1)^2 \geq 0$. 1 bod
Dodavanjem broja 3 na obje strane nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}(2m-1)^2 &\geq 0 \quad \big/ + 3\\ (2m-1)^2 + 3 &\geq 3\\ (x_1 - x_2)^2 &\geq 3\end{aligned}$$

Kvadrat razlike rješenja iznosit će najmanje 3 i tu vrijednost postiže za $m = \frac{1}{2}$. 1 bod

Rješenje 2: Alternativno, nakon što učenik zapiše $(x_1 - x_2)^2 = 4m^2 - 4m + 4$, umjesto svođenja na potpuni kvadrat do rješenja može doći računajući koordinate tjemena parabole koja je graf kvadratne funkcije $p(m) = 4m^2 - 4m + 4$.

2. (6 bodova) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija f, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

rastuća.

Rješenje:

Primjenom identiteta za kvadrat zbroja, tj. razlike, početni se izraz može napisati na sljedeći način:

$$f(x) = \sqrt{(x^2-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$$

iz čega slijedi:

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x + 1|$$ 1 bod

Iz $x^2 - 1 = 0$ dobije se $x_{1,2} = \pm 1$.

Iz $x + 1 = 0$ dobije se $x_3 = -1$.

U ovisnosti o predznaku vrijednosti navedenih izraza promotrimo sljedeća tri slučaja:

1. $x \in <-\infty, -1]$

$$f = f_1(x) = x^2 - 1 - x - 1$$
$$f_1(x) = x^2 - x - 2$$ 1 bod

2. $x \in <-1, 1]$

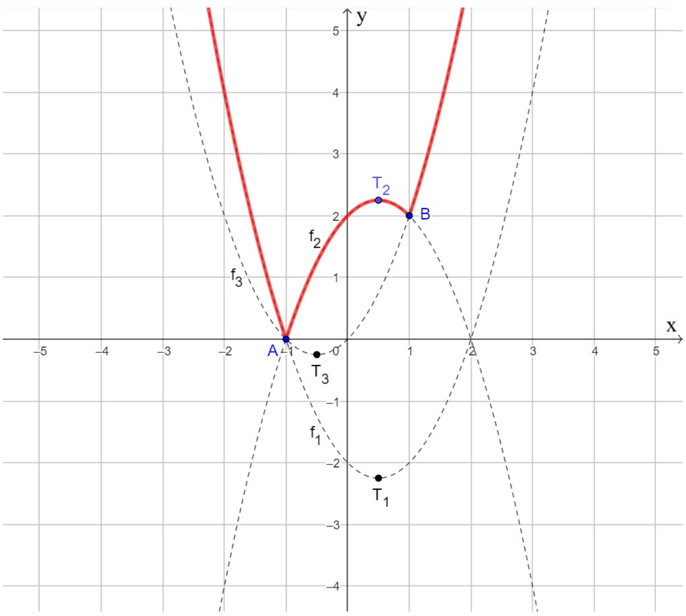
$$f = f_2(x) = -x^2 + 1 + x + 1$$
$$f_2(x) = -x^2 + x + 2$$ 1 bod

3. $x \in <1, +\infty]$

$$f = f_3(x) = x^2 - 1 + x + 1$$
$$f_3(x) = x^2 + x$$ 1 bod

Nultočke funkcija f_1 i f_2 su -1 i 2, a nultočke funkcije f_3 su -1 i 0. Tjemena pripadnih parabola redom su točke $T_1\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$, $T_2\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $T_3\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

Koristeći prethodno skicirajmo graf funkcije f:



Kako bismo odredili interval rasta funkcije f, potrebne su apscise točaka A, B i T_2. Apscisa točke A iznosi $x_A = -1$, apscisa točke T_2 iznosi $x_{T_2} = \frac{1}{2}$. Kako bismo odredili apscisu x_B točke B, potrebno je odrediti sjecišta grafova funkcija f_2 i f_3.

Odredimo sjecišta grafova funkcija f_2 i f_3.

$$x^2 + x = -x^2 + x + 2$$
$$2x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su -1 i 1 pa vrijedi $x_B = 1$. 1 bod

Sada smo odredili sve potrebno kako bismo odredili interval rasta funkcije f.

Funkcija f rastuća je na skupu $< -1, \frac{1}{2} > \cup < 1, +\infty >$. (Za svaki se interval dodjeljuje 0.5 bodova.) 1 bod

3. (6 bodova) Odredite sve one troznamenkaste prirodne brojeve koji su jednaki zbroju svoje znamenke stotice, kvadrata znamenke desetice i kuba znamenke jedinice.

Rješenje:

Neka je a znamenka stotice, b znamenka desetice i c znamenka jedinice. Troznamenkasti broj zapisan tim znamenkama glasio bi $100a + 10b + c$, gdje su $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ uz uvjet $a \neq 0$ (inače broj ne bi bio troznamenkast). 1 bod

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti

$$100a + 10b + c = a + b^2 + c^3.$$ 1 bod

Jednadžba se može zapisati kao

$$99a + b(10 - b) = (c - 1)c(c + 1).$$ 1 bod

Uzevši u obzir da su a, b, c znamenke broja, možemo provesti postupak analize slučajeva. Tablično ćemo prikazati sve moguće iznose triju članova jednadžbe.

a,b,c	99a	b(10-b)	(c-1)c(c+1)
0	ne može	0	0
1	99	9	0
2	198	16	6
3	297	21	24
4	396	24	60
5	495	25	120
6	594	24	210
7	693	21	336
8	792	16	504
9	891	9	720

1 bod

U tablici je lako uočiti koja kombinacija pribrojnika iz drugog i trećeg stupca odgovara nekoj vrijednosti iz četvrtog stupca.

Budući da je $99 + 21 = 120$, što se postiže za $a = 1$, $b \in \{3, 7\}$ i $c = 5$, zaključujemo da su traženi brojevi 135 i 175. 1 bod

Također je $495 + 9 = 504$, što se postiže za $a = 5$, $b \in \{1, 9\}$ i $c = 8$, zaključujemo da su traženi brojevi 518 i 598. 1 bod

4. (6 bodova) Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ međusobno različiti realni brojevi, za neki realan parametar c, dokažite da tada korijeni jednadžbe

$$(1 + c)(x^2 + 2x + c) - 2(c - 1)(x^2 + 1) = 0$$

ne mogu biti realni.

Rješenje:

Da bi korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ bili realni i različiti, mora vrijediti da je diskriminanta D' kvadratne jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ pozitivna tj. $D' > 0$ tj. $D' = 4 - 4c > 0$.

Zaključujemo da to vrijedi za svaki realan broj c takav da je $c < 1$. 1 bod

Promotrimo jednadžbu $(1+c)(x^2+2x+c)-2(c-1)(x^2+1)=0, c \in \mathbb{R}$. Raspisivanjem i množenjem dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu: $(3-c)x^2+(2+2c)x+c^2-c+2=0$ Diskriminanta dobivene jednadžbe jednaka je: $D=(2+2c)^2-4(3-c)(c^2-c+2)=4(c^3-3c^2+7c-5)$ 1 bod

Dalje, faktoriziramo dobiveni izraz:

$$\begin{aligned} D &= 4(c^3-c^2-2c^2+7c-5) \\ &= 4(c^2(c-1)-(2c^2-7c+5) \\ &= 4(c^2(c-1)-2(c-1)(c-\frac{10}{4}) \\ &= 4(c^2(c-1)-(c-1)(2c-5) \\ &= 4(c-1)(c^2-2c+5) \end{aligned}$$ 2 boda

Budući da je $c<1$, a vrijednost izraza c^2-2c+5 uvijek pozitivna jer je vodeći koeficijent pozitivan i diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe negativna, slijedi da je diskriminanta D negativna, tj. $D<0$ pa korijeni jednadžbe $(1+c)(x^2+2x+c)-2(c-1)(x^2+1)=0, c \in \mathbb{R}$ nikada nisu realni. 2 boda

5. (6 bodova) Ako je

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

koliko je $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3$?

Rješenje:

Izraz $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ kvadrirajmo.

Dobivamo sljedeće: $x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}=a^2$ 1 bod

Pojednostavimo izraz $2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})}$ tako da pomnožimo izraze u zagradi.

$$\begin{aligned} 2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})} &= 2\cdot\sqrt{2x^2y^2+\sqrt[3]{x^4y^4}(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4})} \\ &= 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^4}(2\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{x^4})} \\ &= 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^2} \\ &= 2\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}) \end{aligned}$$

1 bod

2 bod

Vratimo se u početni izraz te dobivamo:

$$\begin{aligned} x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+2\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4} &= a^2 \\ x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2 &= a^2 \\ (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3 &= a^2. \end{aligned}$$

1 bod

1 bod

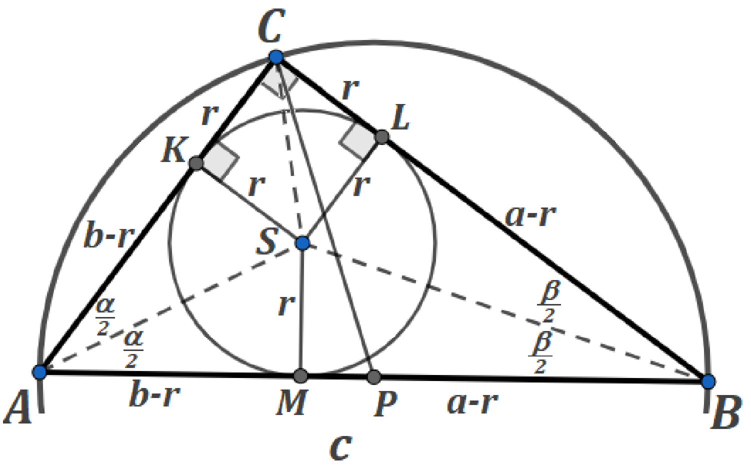
6. (10 bodova) Neka je trokut ABC proizvoljni pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C, katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c.

a) Dokažite da će u svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta umanjen za duljinu hipotenuze biti jednak duljini promjera tom trokutu upisane kružnice.

b) U kojem su omjeru duljine stranica pravokutnog trokuta ako se duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice i duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice odnose kao $5 : 2$?

Rješenje:

Rješenje 1: Neka je zadan trokut s vrhovima A, B, C, a pravim kutom u vrhu C te neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Slovima R i r označimo duljine polumjera tom trokutu opisane i upisane kružnice.



Najprije pokažimo tvrdnju iz a) dijela zadatka. Središte S tom trokutu upisane kružnice jest sjecište simetrala kutova trokuta. Polumjeri $\overline{SK}$, $\overline{SL}$ i $\overline{SM}$ okomiti su na stranice trokuta, i to redom na stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, i $\overline{AB}$, i zato je četverokut CLSK kvadrat. Posljedično $|CK| = |CL| = r$, $|AK| = b - r$ i $|BL| = a - r$. 1 bod

Trokuti AMS i ASK sukladni su prema SSK poučku: pravokutni su i podudaraju se u dvije stranice: $|SK| = |SM| = r$ i $\overline{AS}$ im je zajednička (dodatno i kutovi u vrhu A su im sukladni jer je AS simetrala kuta α). Stoga je $|AM| = |AK| = b - r$. Analognim zaključivanjem pokaže se $BMS \cong BLS$ i $|MB| = |BL| = a - r$. 1 bod

Sada je očito $c = a - r + b - r$ što daje tvrdnju $a + b - c = 2r$ iz a) dijela zadatka. 1 bod

Za b) dio zadatka treba uzeti u obzir da je svakom pravokutnom trokutu središte opisane kružnice u polovištu hipotenuze. Stoga je duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka polovini duljine hipotenuze: $R = |PC| = |PA| = |PB| = \frac{c}{2}$. 1 bod

Iz danog omjera duljina polumjera slijedi

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 5a + 5b = 7c \quad / : c \quad / : 5$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}.$$ 1 bod

Budući da je trokut ABC pravokutan, iz Pitagorina poučka slijedi

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$ 1 bod

Sada treba riješiti sustav

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$ 1 bod

u terminima omjera $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$. Supstitucijom iz prve jednadžbe $\frac{b}{c} = \frac{7}{5} - \frac{a}{c}$ dobit će se kvadratna jednadžba

$$25\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 35 \cdot \frac{a}{c} + 12 = 0$$ 1 bod

čija rješenja glase $\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$ ili $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$. Odatle slijedi $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ odnosno $\frac{b}{c} = \frac{4}{5}$. 1 bod
U oba su slučaja duljine kateta u istom omjeru prema duljini hipotenuze, razlikuju se samo u postavljenim oznakama za duljine kateta. Zato je dovoljno gledati samo jedan slučaj. Omjeri duljina stranica dobit će se spajanjem tih omjera.

Iz $b : c = 3 : 5$ je $c : b = 5 : 3$ što zajedno s $a : c = 4 : 5$ daje $a : c : b = 4 : 5 : 3$, odnosno $a : b : c = 4 : 3 : 5$. Odnosno, ako bismo gledali drugi slučaj (što nije nužno), iz $a : c = 3 : 5$ i $b : c = 4 : 5$ slijedilo bi $a : b : c = 3 : 4 : 5$. 1 bod

Rješenje 2: Alternativno, u rješavanju *b*) dijela zadatka druga jednadžba sustava jednadžbi može se dobiti iz relacije $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}$ tako što bismo nju kvadrirali, a potom primijenili Pitagorin poučak.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5} \quad /^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{2ab}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{49}{25}$$
$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{49}{25}.$$

Sada se primjenom Pitagorina poučka dobiva jednadžba $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{12}{25}$.
Tako se dolazi do (ekvivalentnog) sustava jednadžbi

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}$$
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{12}{25}$$

Daljnji postupak slijedi analogno.

7. (10 bodova) Promotrimo tablicu brojeva s 50 redaka i 50 stupaca, oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,49} & a_{1,50} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,49} & a_{2,50} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{49,50} & a_{49,50} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{50,50} \end{bmatrix}$$

pri čemu oznaka $a_{i,j}$ označava broj koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu i pri čemu su brojevi $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{50,50}$ iz skupa $S = \{2, 3 \dots, 22\}$. Odredite broj tablica navedenog oblika koje u svakom retku imaju točno jedan neparan broj. (Napomena: konačno rješenje može se napisati u obliku umnoška, bez dodatnog računanja.)

Rješenje:

U skupu S postoji 11 parnih brojeva i 10 neparnih brojeva.

U prvom se retku nalazi 50 elemenata, te za odabir neparnog broja u prvom retku postoji 50 mogućnosti. U skupu S postoji 10 neparnih brojeva, što je ukupno $50 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj u prvom retku. Preostalih 49 elemenata u prvom retku parni su brojevi, te za odabir svakog parnog broja postoji 11 mogućnosti, što je ukupno 11^{49} mogućnosti. Dakle, broj mogućnosti za elemente prvog retka, uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj, jest $50 \cdot 10 \cdot 11^{49}$. 3 boda

Analogno, za odabir neparnog broja u drugom retku postoji 49 mogućnosti. U skupu S postoji 10 neparnih brojeva, što je ukupno $49 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj u drugom retku. Preostalih 48 elemenata u drugom retku parni su brojevi, te za odabir svakog parnog broja postoji 11 mogućnosti, što je ukupno 11^{48} mogućnosti. Dakle, broj mogućnosti za elemente drugog retka uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj jest $49 \cdot 10 \cdot 11^{48}$. 3 boda

$\vdots$

U pretposljednjem retku postoji $2 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj, te 11 mogućnosti za paran broj. Dakle, broj mogućnosti za elemente 49. retka, uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj, jest $2 \cdot 10 \cdot 11$. 2 boda

U posljednjem je retku jedan broj koji zbog uvjeta u zadatku mora biti neparan. Postoji 10 mogućnosti za neparan broj u posljednjem retku. 1 bod

Konačno je rješenje:

$$(50 \cdot 49 \cdots 1) \cdot 10^{50} \cdot (11^{49} \cdot 11^{48} \cdots 11^{1}).$$ 1 bod

Napomena: Konačno rješenje može se zapisati i na sljedeći način:

$$50! \cdot 10^{50} \cdot 11^{1225}.$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
3. razred – srednja škola – A – varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Neka su a i b znamenke za koje vrijedi

$$\overline{aaa}+\overline{aab}+\overline{abb}+\overline{bbb}=1503.$$

Koliko je tada a^b+b^a?

Rješenje 1: Kako je

$$\begin{aligned}\overline{aaa}&=100a+10a+a=111a,\\ \overline{aab}&=100a+10a+b=110a+b,\\ \overline{abb}&=100a+10b+b=100a+11b,\\ \overline{bbb}&=100b+10b+b=111b,\end{aligned}$$ 1 bod

početni uvjet sada postaje

$$321a+123b=1503\Rightarrow 41b=501-107a.$$ 1 bod

S obzirom na to da su a i b znamenke, uvrštavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}&a=1\Rightarrow b=\frac{394}{41}\notin\mathbb{N},\\ &a=2\Rightarrow b=\frac{287}{41}=7,\\ &a=3\Rightarrow b=\frac{180}{41}\notin\mathbb{N}\\ &a=4\Rightarrow b=\frac{73}{41}\notin\mathbb{N}\\ &a>4\Rightarrow b<0.\end{aligned}$$ 3 boda

Zaključujemo da je jedino rješenje $(a,b)=(2,7)$ pa je

$$a^b+b^a=2^7+7^2=177.$$ 1 bod

Napomena: Ako učenik nije ispitao sve slučajeve, a naveo je točno rješenje treba dobiti 2 boda. Ako je učenik točno ispitao barem dva slučaja i nema konačno rješenje treba dobiti 1 bod.

Rješenje 2: Jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način

$$300a + 100b + 20a + 20b + a + 3b = 1503.$$ 1 bod

Znamenka jedinica na desnoj strani je 3, što znači da $a + 3b$ mora završiti tom znamenkom, pa su jedine mogućnosti za taj zbroj 3, 13 i 23. Ispitajmo sada svaki mogući slučaj znamenke b: 2 boda

Ako je $b = 0$, onda a mora biti jednako 3, a to nije moguće jer je tada lijeva strana jednaka 963.

Ako je $b = 1$, onda a mora biti jednako 0, što daje manji broj od 1503.

Ako je $b = 2$, onda a mora biti jednako 7, što daje veći broj od 1503. Ako je $b = 3$, onda a mora biti jednako 4, što daje veći broj od 1503.

Ako je $b = 4$, onda a mora biti jednako 1, što daje manji broj od 1503.

Ako je $b = 5$, onda a mora biti jednako 7, što daje veći broj od 1503.

Ako je $b = 6$, onda a mora biti jednako 5, što daje veći broj od 1503.

Ako je $b = 7$, onda a mora biti jednako 2, i u ovom slučaju dobivamo 1503.

Ako je $b = 8$, onda a mora biti jednako 9, što daje veći broj od 1503.

Ako je $b = 9$, onda a mora biti jednako 6, što daje veći broj od 1503.

2 boda

Prema tome, jedino je rješenje $a = 2$, $b = 7$ pa je $a^b + b^a = 2^7 + 7^2 = 128 + 49 = 177$. 1 bod

2. (6 bodova) Ako je $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, koliko je $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \cos^4\alpha$?

Rješenje 1: Iz $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, slijedi $\cos^2\alpha = \sin\alpha$, pa uvrštavanjem u osnovni trigonometrijski identitet $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ dobivamo

$$\sin\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

2 bod

Supstitucijom $x = \sin\alpha$ rješavamo kvadratnu jednadžbu $x^2 + x - 1 = 0$ čija su rješenja $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Kako je $\sin\alpha = \cos^2\alpha$, to je jedino rješenje $\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 1 bod

Sada je

$$\cos^4 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

1 bod

pa je

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \cos^4\alpha = 2.$$

1 bod

Rješenje 2: Iz osnovnog trigonometrijskog indentiteta $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dijeleći s $\cos^2\alpha$ i koristeći pretpostavku $\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ dobivamo

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha},$$ 1 bod

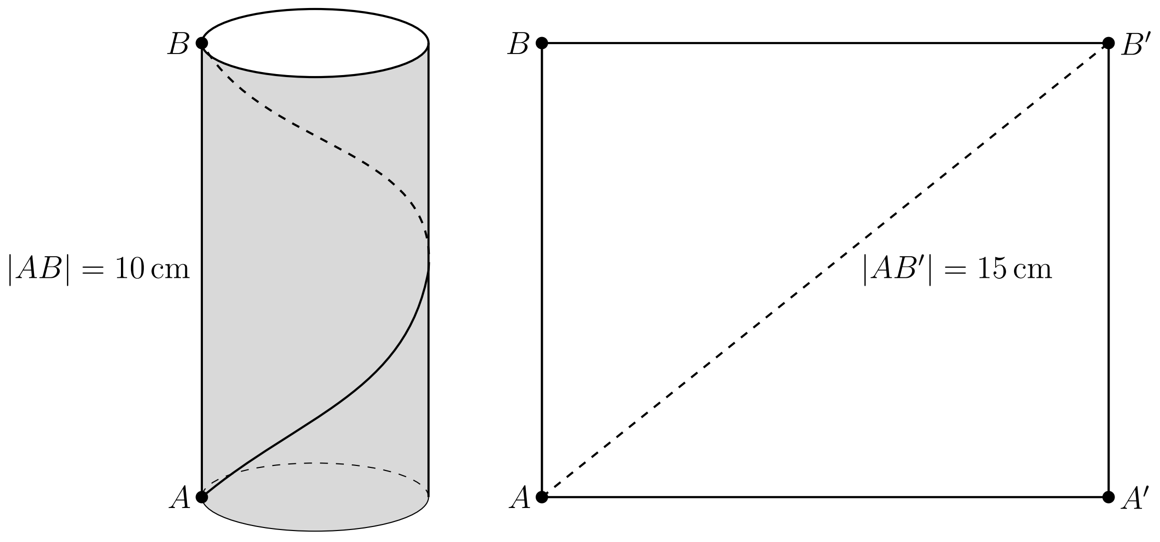
$$\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha = 1.$$ 1 bod

S druge strane, za traženi izraz vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha}+\cos^4\alpha && \text{1 bod}\\ &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}^4\alpha && \text{1 bod}\\ &= \left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)+\operatorname{tg}^4\alpha\\ &= \left(\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\right)+1 && \text{1 bod}\\ &= 1+1\\ &= 2. && \text{1 bod}\end{aligned}$$

3. (6 bodova) Dan je valjak s visinom duljine 10 cm. Na obodima njegovih osnovki su točke A i B takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka po plaštu, njezina će duljina biti 15 cm. Kolika je duljina najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B?

Neka su valjak i pripadni plašt (pravokutnik $AA'B'B$) kao na slici.



1 bod

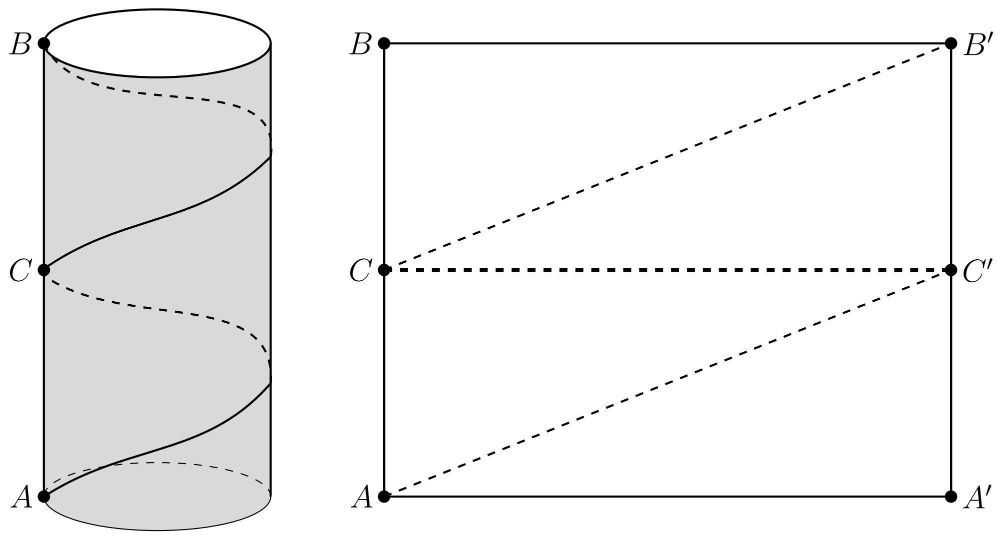
Iz uvjeta zadatka slijedi da je

$$|AB| = 10, \quad |AB'| = 15$$

pa prema Pitagorinu poučku slijedi

$$|AA'| = \sqrt{|AB'|^2 - |AB|^2} = 5\sqrt{5}. \qquad \text{1 bod}$$

Najkraća linija koja dvaput obilazi oko valjka i spaja točke A i B dana je kao na slici.



$$d = |AC'| + |CB'| = 2|AC'|$$

Ponovnom primjenom Pitagorina poučka slijedi 1 bod

$$|AC'| = \sqrt{|AA'|^2 + \frac{1}{4}|AB|^2} = 5\sqrt{6},$$ 1 bod

pa je tražena duljina

$$|AC'| + |CB'| = 2|AC'| = 10\sqrt{6}.$$

2 boda

4. (6 bodova) Riješite jednadžbu

$$\log_{2x+7}(4 + 12x + 9x^2) + \log_{3x+2}(6x^2 + 25x + 14) = 4$$

u skupu realnih brojeva.

Iz $2x + 7 > 0$, $3x + 2 > 0$, $2x + 7 \neq 1$, $3x + 2 \neq 1$ slijedi da rješenje jednadžbe pripada skupu $\langle -\frac{2}{3}, +\infty\rangle \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. 1 bod

Kako je $4+12x+9x^2 = (3x+2)^2$ i $6x^2+25x+14 = (3x+2)(2x+7)$ dana se jednadžba može zapisati u obliku

$$2(\log_{2x+7}(3x + 2))^2 - 3\log_{2x+7}(3x + 2) + 1 = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja 2 boda

$$\log_{2x+7}(3x + 2) = 1, \quad \text{i} \quad \log_{2x+7}(3x + 2) = \frac{1}{2},$$

tj. dobivamo $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{-5+2\sqrt{13}}{9}$, $x_3 = \frac{-5-2\sqrt{13}}{9}$. 2 boda

Rješenje x_3 ne pripada skupu $\langle -\frac{2}{3}, +\infty\rangle \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ pa su rješenja zadane jednadžbe $x_1 = 5$ i $x_2 = \frac{-5+2\sqrt{13}}{9}$. 1 bod

5. (6 bodova) Može li se broj

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2025}$$

zapisati u obliku $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$ za neke prirodne brojeve a, b i c?

Tražimo prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2025}.$$

Kvadriranjem obiju strana dobivamo 1 bod

$$2ab\sqrt{6}+2ac\sqrt{10}+2bc\sqrt{15}+2a^2+3b^2+5c^2=104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2025.$$

Kako su a, b i c prirodni brojevi, izjednačavanjem članova uz odgovarajuće korijene imamo 1 bod

$$2ab=104, \quad 2ac=468, \quad 2bc=144, 2a^2+3b^2+5c^2=2025$$ 1 bod

iz čega slijedi

$$ab=52, \quad ac=234, \quad bc=72.$$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi

$$\frac{b}{c}=\frac{ab}{ac}=\frac{234}{52}=\frac{117}{26}$$

što zajedno s trećom daje

$$b\cdot\frac{117}{26}b=72\Rightarrow b=4.$$

Uvrštavanjem dobivenog slijedi $a=13$ i $c=18$. 1 bod

Kako je

$$2a^2+3b^2+5c^2=2\cdot 13^2+3\cdot 4^2+5\cdot 18^2=2006\neq 2025,$$

zaključujemo da ne postoje traženi prirodni brojevi a, b i c. Drugim riječima, broj 1 bod

$$\sqrt{104\sqrt{6}+468\sqrt{10}+144\sqrt{15}+2025}$$

ne može se zapisati u obliku $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$ za prirodne brojeve a, b i c. 1 bod

6. (10 bodova) Riješite jednadžbu

$$2^x=3^y+1$$

u skupu cijelih brojeva.

Ako je $x\leq 0$, tada je $2^x\leq 1<1+3^y$ pa jednadžba nema rješenja. 1 bod

Ako je $y<0$, tada je $1<1+3^y<2$ pa jednadžba nema rješenja. 1 bod

Ako je $y=0$, dobivamo $x=1$, pa je jedno rješenje početne jednadžbe $(1,0)$. 1 bod

Pretpostavimo da je $x>0$ i $y>0$.

Kako je $2^x=3^y+1$, 2^x je oblika $3k+1$, što je moguće ako i samo ako je x paran broj, tj. $x=2z$. 2 boda

Sada je

$$\begin{aligned} 2^{2z} &= 3^y + 1 \\ 2^{2z} - 1 &= 3^y \\ (2^z - 1)(2^z + 1) &= 3^y. \end{aligned}$$

Iz gornjeg slijedi 1 bod

$$2^z - 1 = 3^{y_1} \quad \text{i} \quad 2^z + 1 = 3^{y_2},$$

gdje su $y_1, y_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $y_1 + y_2 = y$ i $y_1 < y_2$. 2 boda

Kako je

$$2 = (2^z + 1) - (2^z - 1) = 3^{y_2} - 3^{y_1} = 3^{y_1}(3^{y_2 - y_1} - 1),$$

to slijedi $y_1 = 0$, pa je $z = 1$, odnosno dobivamo drugo rješenje $(x, y) = (2, 1)$.

Dakle, jedina cjelobrojna rješenja su $(1, 0)$ i $(2, 1)$. 2 boda

7. (10 bodova) Odredite sve moguće vrijednosti prostog broja $p \geq 5$ za koje postoji barem jedan par prirodnih brojeva (x, y) koji je rješenje jednadžbe

$$\frac{16}{x} + \frac{25}{y} = p.$$

Rješenje 1:

S obzirom na to da je $x \geq 1$ i $y \geq 1$, imamo

$$p = \frac{16}{x} + \frac{25}{y} \leq 16 + 25 = 41.$$

Kako je $p \geq 5$ prost broj, jedine su dopuštene vrijednosti

$$p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}.$$ 1 bod

S druge strane, početna jednadžba ekvivalentna je sljedećoj

$$(px - 16)(py - 25) = 400 = 5^2 \cdot 2^4. \qquad (1)$$ 3 boda

Pokažimo najprije da za sve moguće izbore prostih brojeva p faktori $px - 16$ i $py - 25$ ne mogu biti negativni. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji prost broj $p \geq 5$ i prirodni brojevi x i y takvi da je $px - 16 < 0$. Kako je $p \geq 5$ i $x \geq 1$ slijedi

$$px - 16 \geq -11$$

pa mora vrijediti

$$px - 16 \in \{-1, -2, -4, -5, -8, -10\}.$$

Uvrštavanjem dobivenih faktora u jednadžbu (1) slijedi $py < 0$ za sve moguće vrijednosti, a to nije moguće pa smo dobili kontradikciju. Prema tome, $px - 16$ i $py - 16$ moraju biti pozitivni djelitelji broja 400 koji u produktu daju upravo 400. 2 boda

Tako definiranih produkata ima ukupno 15. 1 bod

Razmotrimo svaki slučaj zasebno:

- $px - 16 = 1, py - 25 = 400 \quad \Rightarrow \quad p = 17, x = 1, y = 25$
- $px - 16 = 2, py - 25 = 200 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 4, py - 25 = 100 \quad \Rightarrow \quad p = 5, x = 4, y = 25$
- $px - 16 = 5, py - 25 = 80 \quad \Rightarrow \quad p = 7, x = 3, y = 15$
- $px - 16 = 8, py - 25 = 50 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 10, py - 25 = 40 \quad \Rightarrow \quad p = 13, x = 2, y = 5$
- $px - 16 = 16, py - 25 = 25 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 20, py - 25 = 20 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 25, py - 25 = 16 \quad \Rightarrow \quad p = 41, x = 1, y = 1$
- $px - 16 = 40, py - 25 = 10 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 50, py - 25 = 8 \quad \Rightarrow \quad p = 11, x = 6, y = 3$
- $px - 16 = 80, py - 25 = 5 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 100, py - 25 = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 29, x = 4, y = 1$
- $px - 16 = 200, py - 25 = 2 \quad \Rightarrow$ nema rješenja
- $px - 16 = 400, py - 25 = 1 \quad \Rightarrow$ nema rješenja. 2 boda

Zaključujemo da su jedine moguće vrijednosti prostog broja p

$$5, 7, 11, 13, 17, 29, 41.$$

1 bod

Rješenje 2: Učenik na početku zaključuje isto kao u prvom rješenju do zaključno jednadžbe (1) (prva 4 boda). Potom učenik traži rješenja svih 11 mogućih jednadžbi s obzirom na dopuštene vrijednosti prostog broja p.

- Ako učenik pokaže da postoji par (x, y) kao rješenje jednadžbe za svaki $p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 29, 41\}$, ali ne dokaže da ostale jednadžbe nemaju rješenja, treba dobiti dodatna 3 boda.
- Ako učenik pokaže da postoji par (x, y) kao rješenje jednadžbe za svaki $p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 29, 41\}$ i pokaže da barem jedna (ali ne sve) preostala jednadžba nema rješenja, treba dobiti dodatna 4 bodova.
- Ako učenik pokaže da postoji par (x, y) kao rješenje jednadžbe za svaki $p \in \{5, 7, 11, 13, 17, 29, 41\}$ i pokaže da preostale jednadžbe nemaju rješenja, treba dobiti sve preostale bodove (6 bodatnih bodova).

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
4. razred – srednja škola – A-varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

1. (6 bodova) Odredite zbroj koeficijenata uz sve neparne potencije od x u razvoju zbroja binoma
$$\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5,$$
gdje je $x>1$.

Rješenje 1: Prema binomnom poučku vrijedi

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\ (a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.\end{aligned}$$ 1 bod

Iz gornjeg slijedi

$$(a+b)^5+(a-b)^5=2(a^5+10a^3b^2+5ab^4). \qquad (1)$$ 1 bod

Sada uvedemo supstituciju
$$a=x,\ b=\sqrt{x^3-1}.$$ 1 bod

Uvrštavanjem u jednadžbu (1) dobivamo

$$\begin{aligned}\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5 &= 2\left(x^5+10x^3(x^3-1)+5x(x^3-1)^2\right)=\\ &= 2(x^5+10x^6-10x^3+5x^7-10x^4+5x).\end{aligned}$$

2 boda

Konačno, zbroj koeficijenata svih neparnih stupnjeva u gornjem razvoju jednak je

$$\sum=2(1-10+5+5)=2.$$ 1 bod

Rješenje 2: Iskoristimo li binomnu formulu, dobivamo

$$\begin{aligned}&\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5=\\ &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}\sqrt{x^3-1}^{\,k}+\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-1)^k x^{5-k}\sqrt{x^3-1}^{\,k}= && \text{2 boda}\\ &= 2\left[x^5+\binom{5}{2}x^3\sqrt{x^3-1}^{\,2}+\binom{5}{4}x\sqrt{x^3-1}^{\,4}\right]= && \text{2 boda}\\ &= 2\left[x^5+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^3(x^3-1)+5x(x^3-1)^2\right]= && \text{1 bod}\\ &= 2(x^5+10x^6-10x^3+5x^7-10x^4+5x).\end{aligned}$$

Prema tome, zbroj koeficijenata svih neparnih stupnjeva u gornjem razvoju jednak je

$$\sum=2(1-10+5+5)=2.$$ 1 bod

2. (6 bodova) Neka je z kompleksan broj takav da vrijedi

$$z + z^{-1} = 1.$$

Odredite $z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50}$.

Rješenje 1: Zapišimo traženi izraz u obliku

$$z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} = z^{48}(z^{-2} + z^{-1} + 1 + z + z^2). \tag{2}$$ 1 bod

Kvadriranjem uvjeta zadatka dobivamo

$$z^2 + z^{-2} = -1,$$ 1 bod

a kubiranjem uvjeta zadatka

$$z^3 + 2 + z^{-3} = 0.$$ 1 bod

Pomnožimo li gornju jednadžbu sa z^3, slijedi

$$\begin{aligned} z^6 + 2z^3 + 1 &= 0 \\ (z^3 + 1)^2 &= 0 \\ z^3 &= -1. \end{aligned}$$ 1 bod

Napokon, uvrštavanjem u (2) slijedi

$$\begin{aligned} z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} &= \left(z^3\right)^{16} \left(\left(z^{-2} + z^2\right) + \left(z^{-1} + z\right) + 1\right) = \\ &= (-1)^{16}(-1 + 1 + 1) = 1. \end{aligned}$$ 2 boda

Rješenje 2: Pomnožimo li uvjet zadatka sa z, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$z^2 - z + 1 = 0,$$

a množenjem ove jednadžbe sa $(z + 1)$ dobivamo zbroj kubova

$$z^3 + 1 = 0.$$ 2 boda

Prema tome je $z^3 = -1$. Zapišimo sada izraz

$$\begin{aligned} z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} &= z^{3\cdot15+1} + z^{3\cdot15+2} + z^{3\cdot16} + z^{3\cdot16+1} + z^{3\cdot16+2} = \\ &= (z^3)^{15}z + (z^3)^{15}z^2 + (z^3)^{16} + (z^3)^{16}z + (z^3)^{16}z^2. \end{aligned}$$ 2 boda

Uvrštavajući $z^3 = -1$ u gornji izraz, slijedi

$$z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50} = -z - z^2 + 1 + z + z^2 = 1.$$ 2 boda

3. (6 bodova) Zadan je pravac s jednadžbom $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$. Dokažite da je udaljenost svake točke s cjelobrojnim koordinatama do zadanog pravca veća od $\frac{1}{30}$.

Rješenje:

Neka je T bilo koja točka s cjelobrojnim koordinatama (a, b) i p zadani pravac. Implicitni oblik jednadžbe pravca p glasi $25x - 15y + 12 = 0$, a udaljenost točke T do pravca p dana je s

$$d(T, p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}}.$$

1 bod

Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. neka postoji točka T za koju je

$$\frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} \leq \frac{1}{30},$$

tj.

$$|25a - 15b + 12| \leq \frac{\sqrt{34}}{6}.$$ 1bod

Kako su a i b cijeli brojevi, to je $25a - 15b + 12$ također cijeli broj, pa iz gornje nejednakosti zaključujemo da $25a - 15b + 12$ mora biti jednak 0. 1bod

Pokažimo sada da ne postoji par cijelih brojeva a, b koji zadovoljavaju jednadžbu $25a - 15b + 12 = 0$. Ako je $25a - 15b + 12 = 0$, onda je

$$b = \frac{25a + 12}{15} = 2a + 1 - \frac{5a + 3}{15}$$ 1bod

i to je cijeli broj ako je $\frac{5a+3}{15}$ cijeli broj. Ovo je pak nemoguće jer ne postoji cijeli broj a za koji je izraz $5a + 3$ djeljiv s 5. 1 bod

Prema tome, početna je pretpostavka kriva, tj.

$$d(T, p) = \frac{|25a - 15b + 12|}{5\sqrt{34}} > \frac{1}{30}.$$ 1 bod

4. (6 bodova) Pronađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 = 2025.$$

Rješenje 1:

Kako je $2025 = 45^2 = 9^2 \cdot 5^2$, promotrimo jednadžbu modulo 9 i 5. 1 bod

Za svaki kvadrat prirodnog broja vrijedi

$$n^2 \equiv 0, 1, 4 \text{ ili } 7 \pmod 9$$
$$n^2 \equiv 0, 1 \text{ ili } 4 \pmod 5.$$

1 bod

Kako je desna strana jednadžbe broj djeljiv s 9 i 5, to mora biti i lijeva strana, što implicira da su x i y prirodni brojevi djeljivi s 9, dok za djeljivost s 5 imamo dva slučaja: 1 bod

1) x i y su djeljivi s 5:
Sada je $x = 45k$ i $y = 45l$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo jednadžbu

$$k^2 + l^2 = 1$$

koja nema rješenja u skupu prirodnih brojeva. 1 bod

2) Jedan od njih daje ostatak 1, a drugi 2 pri dijeljenju s 5: Sada je jedan od brojeva oblika $45k + 36$, dok je drugi oblika $45l + 27$ za neke $k, l \in \mathbb{Z}$. Najmanji prirodni brojevi takvog oblika su 36 i 27, a kako je $36^2 + 27^2 = 2025$, zaključujemo da su jedina moguća rješenja početne jednadžbe $(36, 27)$ i $(27, 36)$. 2 bod

Rješenje 2:

Iz zadane jednadžbe zaključujemo da $x^2 < 2025$, tj. $x < 45$ pa je $x \in \{1, 2, \ldots, 43, 44\}$. (Isto vrijedi i za y). 1 bod

Kako je $2025 = 45^2 = 5^2 \cdot 9^2$, to je desna strana jednadžbe djeljiva s 9, pa mora biti i lijeva. 1 bod

Ostatak pri dijeljenju kvadrata prirodnog broja s 9 je 0,1,4 ili 7, pa i x i y moraju biti djeljivi s 9. 1 bod

To znači da je $x \in \{9, 18, 27, 36\}$. 1 bod

Sada jednostavnim uvrštavanjem ove četiri mogućnosti za x pronalazimo prirodan broj y za koji je $y^2 = 2025 - x^2$.
Za $x = 9$ slijedi $y^2 = 1944$, a njegov korijen nije prirodan broj.
Za $x = 18$ slijedi $y^2 = 1701$, čiji korijen također nije prirodan broj.
Za $x = 27$ slijedi $y^2 = 1296$ pa je $y = 36$.
Za $x = 36$ slijedi $y^2 = 729$ pa je $y = 27$. 1 bod

Prema tome, rješenja jednadžbe su $(27, 37)$ i $(36, 27)$. 1 bod

Rješenje 3: Kako je $x^2 + y^2 = 45^2$, to je $(x, y, 45)$ jedna Pitagorina trojka. 1 bod

Kako je desna strana neparan broj, to mora biti i lijeva strana, pa je jedan od brojeva x, y paran, a drugi neparan. 1 bod

U tom slučaju, koristimo formulu za sve Pitagorine trojke,

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2,$$

pri čemu su d, m, n prirodni, m, n relativno prosti i $m > n$. 1 bod

Kako mora vrijediti

$$45^2 = [d(m^2 + n^2)]^2,$$

tj.

$$5^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = d^2 \cdot (m^2 + n^2)^2,$$

to je $d \in \{3, 5, 9, 15\}$, a $m^2 + n^2 \in \{15, 9, 5, 3\}$ redom. 1 bod

S obzirom na to da ne postoje prirodni brojevi m, n takvi da je $m^2 + n^2 \in \{15, 9, 3\}$, slijedi da je $d = 9$, a $m^2 + n^2 = 5$, tj. $m = 2$, $n = 1$. 1 bod

Sada je $x = d(m^2 - n^2) = 9 \cdot (4 - 1) = 27$, a $y = 2dmn = 2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$, a rješenja jednadžbe su $(27, 36)$ i $(36, 27)$. 1 bod

5. (6 bodova) Zadan je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ takav da je $a_0 = a$, $a_1 = b$, gdje su a, $b \in \mathbb{R}$, i

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Odredite $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$.

Rješenje:

Uvedimo oznaku $A_n = a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$. Tada za $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} A_n + A_{n+1} &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = \\ &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n(a_n + a_{n+1}) = \\ &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} + a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n a_{n+1} = \\ &= a_{n+1}^2 - a_{n+1}(a_{n-1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = 0. \end{aligned}$$

3 boda

Kako je $A_n + A_{n+1} = 0$, to slijedi

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1^2 - a_0 a_2 = b^2 - a(a+b) = b^2 - a^2 - ab, \\ A_2 &= -A_1 \\ A_3 &= -A_2 = A_1 \\ &\vdots \\ A_n &= a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n-1}(b^2 - a^2 - ab). \end{aligned}$$

1 bod

1 bod

1 bod

6. (10 bodova) Koliko ima tročlanih podskupova skupa $S = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ kojima je umnožak članova djeljiv s 4?

Rješenje:

Neka je A skup svih tročlanih podskupova skupa S. Takvih skupova ukupno ima

$$|A| = \binom{50}{3} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 19600.$$ 2 boda

Umnožak tri broja nije djeljiv s 4 ako:

i) su svi brojevi neparni,

ii) su dva broja neparna i jedan paran, ali nije djeljiv sa 4. 2 boda

Razmotrimo sada ova dva slučaja:

i) Neka je B skup svih trojki kojima su svi elementi neparni. Neparnih je brojeva 25 pa je broj takvih trojki

$$|B| = \binom{25}{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$$ 2 boda

ii) Neka je C skup svih trojki kojima su dva broja neparna i jedan paran, ali nije djeljiv s 4. Dva neparna broja možemo izabrati na $\binom{25}{2} = 300$ načina. 1 bod

Parni brojevi koji nisu djeljivi sa 4 su 2, 6, 10,...,50 i ima ih 13. 1 bod

Prema tome, ukupan broj ovakvih trojki je

$$|C| = 13 \cdot 300 = 3900.$$ 1 bod

Konačno, tročlanih podskupova skupa S kojima je umnožak članova djeljiv sa 4 ima

$$|A| - |B| - |C| = 13400.$$ 1 bod

7. (10 bodova) Sinusi unutarnjih kutova nekog pravokutnog trokuta čine aritmetički niz. U kojem su omjeru duljine stranica tog trokuta?

Rješenje:

Neka su $a < b < c$ stranice, a $\alpha < \beta < \gamma = 90°$ kutovi pravokutnog trokuta. Pokažimo najprije da stranice bilo kojeg trokuta čine aritmetički niz kada sinusi unutarnjih kutova čine aritmetički niz.

Ako je $\sin\beta = \sin\alpha + d$, $\sin\gamma = \sin\alpha + 2d$, iz poučka o sinusima,

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$ 1 bod

slijedi

$$\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\alpha + d, \quad \frac{c\sin\alpha}{a} = \sin\alpha + 2d,$$

tj.

$$b = a + \frac{ad}{\sin\alpha}, \quad c = a + \frac{2ad}{\sin\alpha},$$ 1 bod

što odgovara članovima aritmetičkog niza $\left(a, \dfrac{ad}{\sin\alpha}\right)$. 1 bod

Prema prethodnom, iz

$$2\sin\beta = \sin\alpha + \sin\gamma$$ 1 bod

slijedi $2b = a + c$ tj.

$$a = 2b - c. \tag{3}$$

1 bod

Prema Pitagorinu poučku je $a^2 + b^2 = c^2$ pa uvrštavajući $a = 2b - c$ dobivamo

$$(2b - c)^2 + b^2 = c^2,$$

iz čega slijedi

$$5b^2 - 4bc = 0.$$ 1 bod

Dijenjenjem s $b \neq 0$ je

$$b = \frac{4}{5}c. \tag{4}$$ 1 bod

Iz (3) i (4) dobivamo $a = \dfrac{3}{5}c$ pa je 1 bod

$$a : b : c = \frac{3}{5}c : \frac{4}{5}c : c,$$ 1 bod

tj.

$$a : b : c = 3 : 4 : 5.$$ 1 bod