**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**

**ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**
**4. razred – osnovna škola**
**14. veljače 2025.**

**RJEŠENJA ZADATAKA**

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Učenici jedne škole prikupljaju plastične boce koje će odnijeti u reciklažno dvorište i zamijeniti za novac. Prvog su dana skupili 668 boca, drugog dana 656 boca više nego prvi dan, trećeg dana 173 boce manje nego drugog dana, a četvrtog dana kao drugog i trećeg dana zajedno.

   Koliko su plastičnih boca prikupili u sva četiri dana? Ako za svaku plastičnu bocu dobiju 10 centi, koliko će novaca zaraditi? Odgovor izrazite u eurima.

**Rješenje:**

Prvog su dana skupili 668 boca.

Drugog su dana skupili $668 + 656 = 1324$ boce. 1 bod

Trećeg su dana skupili $1324 - 173 = 1151$ bocu. 1 bod

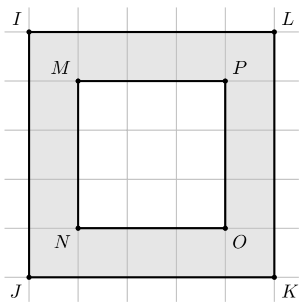
Četvrtog su dana skupili $1324 + 1151 = 2475$ boca. 1 bod

U sva četiri dana skupili su $668+1324+1151+2475 = 668+2\cdot 2475 = 668+4950 = 5618$ boca. 2 boda

Zaradili su $5618 \cdot 10 = 56180$ centa.

To je 561 euro i 80 centa. 1 bod

2. (6 bodova) U kvadratnoj mreži nacrtani su kvadrati $JKLI$ i $NOPM$. Opseg kvadrata $JKLI$ iznosi 100 cm. Koliki je opseg kvadrata $NOPM$?




**Rješenje:**

Opseg kvadrata $JKLI$ je 100 cm.

Duljina stranice kvadrata $JKLI$ je $100 : 4 = 25$ cm. 2 boda

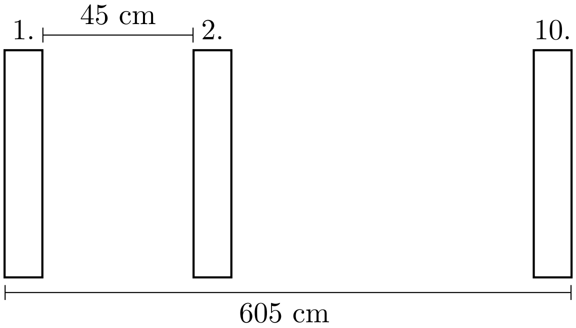
Duljina stranice jediničnog kvadrata je $25 : 5 = 5$ cm. 1 bod

Duljina stranice kvadrata $NOPM$ je $3 \cdot 5 = 15$ cm. 1 bod

Opseg kvadrata $NOPM$ je $4 \cdot 15 = 60$ cm. 2 boda

3. (6 bodova) U polju je, u nizu, postavljeno 10 stupova jednake širine. Razmak između svaka dva stupa iznosi 45 cm, a udaljenost od početka 1. do kraja 10. stupa iznosi 6 m i 5 cm. Kolika je širina jednog stupa?

**Rješenje:**




Između 10 stupova je 9 razmaka. 1 bod

Ukupna duljina svih razmaka je $9 \cdot 45 = 405$ cm. 1 bod

Udaljenost od početka prvog do kraja desetog stupa izražena u centimetrima je 6 m i 5 cm, odnosno 605 cm. 1 bod

Ako od udaljenosti od početka 1. do kraja 10. stupa oduzmemo ukupnu duljinu svih razmaka, dobijemo ukupnu širinu svih stupova.

$$605 - 405 = 200$$ 2 boda

10 stupova ima širinu 200.

$$200 : 10 = 20$$

Širina jednog stupa iznosi 20 cm. 1 bod

4. (6 bodova) Prikažite broj 91 265 kao zbroj tri pribrojnika tako da je prvi sedam puta veći od drugog, a treći za 121 manji od drugog.

**Rješenje:**

Prvi pribrojnik + drugi pribrojnik + treći pribrojnik = 91 265.

Ako je prvi pribrojnik sedam puta veći od drugog te treći pribrojnik manji za 121 od drugog pribrojnika, slijedi da je broj 91 265 uvećan za 121 devet puta veći od drugog pribrojnika. 1 bod

$$91\ 265 + 121 = 91\ 386$$ 1 bod

Drugi je pribrojnik $91\ 386 : 9 = 10\ 154$. 1 bod

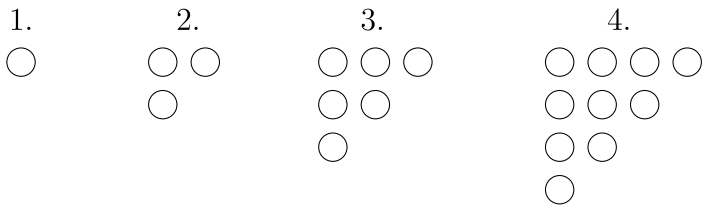
Prvi je pribrojnik $10\ 154 \cdot 7 = 71\ 078$. 1 bod

Treći je pribrojnik $10\ 154 - 121 = 10\ 033$. 1 bod

Prikaz zbroja triju pribrojnika:

$$91\ 265 = 71\ 078 + 10\ 154 + 10\ 033.$$ 1 bod

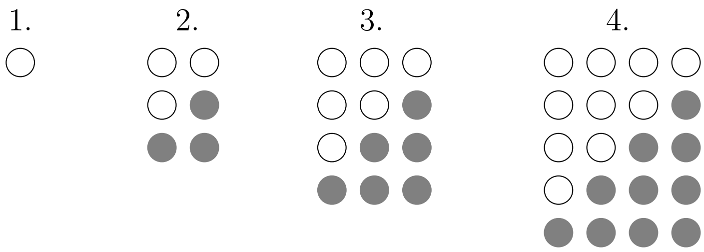
5. (6 bodova) Na ploči su s pomoću žetona posloženi oblici koji nastaju kao na slici:




Koliko žetona ima 150. oblik nastao na slikom opisani način?

**Rješenje:**

Strukture nadopunimo žetonima do pravokutnika i tada možemo uočiti pravilnost.




1 bod

Broj žetona u jednom obliku dvostruko je manji od ukupnog broja žetona u nadopunjenom pravokutniku. 1 bod

1. oblik: 1

2. oblik: $1 + 2 = 3$, odnosno $2 \cdot 3 : 2 = 6 : 2 = 3$

3. oblik: $1 + 2 + 3 = 6$, odnosno $3 \cdot 4 : 2 = 12 : 2 = 6$

4. oblik: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, odnosno $4 \cdot 5 : 2 = 20 : 2 = 10$ 2 boda

150. oblik: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 150 = 150 \cdot 151 : 2 = 22\,650 : 2 = 11\,325$

150. oblik ima 11 325 žetona. 2 boda

6. (10 bodova) Ivan ima digitalni sat (vidi sliku) koji pokazuje sate i minute. Koliko različitih vremena (sati i minuta) može prikazati Ivanov sat ako zbroj znamenaka sati i minuta iznosi 22? Rješenje zapišite u obliku kako je prikazano na slici (18:19).


**Rješenje:**

Najveći mogući broj na digitalnom satu koji se može prikazati u minutama je 59, a njegov zbroj znamenaka iznosi $5+9 = 14$, iz čega slijedi da za ukupan zbroj znamenaka nedostaje još

$$22–14 = 8$$

te za sate čiji je zbroj znamenaka manji od 8 nema rješenja (00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23). 1 bod

Provjerimo moguća rješenja kada sat pokazuje 08, 09, 17, 18 i 19 sati.

Ako sat pokazuje 08 sati, zbroj znamenaka iznosi $0+8=8$. Za ukupan zbroj nedostaje još 22–8 = 14.

Zbroj znamenaka minuta je 14 ako sat pokazuje 59 minuta ($5+9=14$).

Rješenje je 08:59. 1 bod

Ako sat pokazuje 09 sati, zbroj znamenaka iznosi $0+9=9$. Za ukupan zbroj nedostaje još 22–9 = 13.

Zbroj znamenaka minuta je 13 ako sat pokazuje 58 minuta ($5+8=13$), 49 minuta ($4+9=13$).

Rješenja su 09:49, 09:58. 2 boda

Ako sat pokazuje 17 sati, zbroj znamenaka iznosi $1+7=8$. Za ukupan zbroj nedostaje još 22–8 = 14.

Zbroj znamenaka minuta je 13 ako sat pokazuje 58 minuta ($5+9=14$). Rješenje je 17:59. 1 bod

Ako sat pokazuje 18 sati, zbroj znamenaka iznosi $1+8=9$. Za ukupan zbroj nedostaje još 22–9 = 13.

Zbroj znamenaka minuta je 13 ako sat pokazuje 58 minuta ($5+8=13$), 49 minuta ($4+9=13$).

Rješenja su 18:49, 18:58. 2 boda

Ako sat pokazuje 09 sati, zbroj znamenaka iznosi $0+9=9$. Za ukupan zbroj nedostaje još 22–9 = 13.

Zbroj znamenaka minuta je 13 ako sat pokazuje 57 minuta ($5+7=12$), 48 minuta ($4+8=12$), 39 minuta ($3+9=12$).

Rješenja su 19:39, 19:48 i 19:57. 3 boda

7. (10 bodova) Ana, Branimir i Cvijeta su se vagali. Ana i Branimir zajedno su dvostruko teži od Cvijete. Ana i Cvijeta zajedno imaju 68 kilograma, dok Branimir i Cvijeta zajedno teže 80 kilograma. Koliko kilograma teži Ana, koliko Branimir, a koliko Cvijeta?

**Rješenje 1:**

Ana i Cvijeta zajedno imaju 68 kilograma, dok Branimir i Cvijeta zajedno teže 80 kilograma. Iz ove rečenice slijedi da je Branimir teži od Ane za $80-68=12$ kg. 2 boda

Ana i Branimir zajedno su dvostruko teži od Cvijete. Kako je Branimir teži od Ane za 12 kg, slijedi da je dvostruka Cvijetina težina jednaka dvostrukoj Aninoj težini uvećanoj za 12 kg. 2 boda

Prema tome, Cvijeta je od Ane teža za $12:2=6$ kg. 1 bod

Ana i Cvijeta zajedno imaju 68 kilograma. To znači da je dvostruka Anina težina jednaka 68–6 = 62 kg. 2 boda

Prema tome, Ana ima $62:2=31$ kg. 1 bod

Cvijeta ima $31+6=37$ kg. 1 bod

Branimir ima $31+12=43$ kg. 1 bod

**Rješenje 2:**

Ako Ana i Cvijeta zajedno imaju 68 kg, tada Ana ima 68 kg umanjenih za Cvijetine kilograme. Također, ako Cvijeta i Branimir zajedno imaju 80 kg, tada Branimir ima 80 kg umanjenih za Cvijetine kilograme. 2 boda

Napravimo tablicu za prikaz težina gdje ćemo odabrati Cvijetinu približnu težinu i mijenjati je s obzirom na uvjet da su Ana i Branimir zajedno dvostruko teži od Cvijete. 2 boda

| Cvijeta | Branimir = 80 - Cvijeta | Ana = 68 - Cvijeta | Ana + Branimir | 2· Cvijeta |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 40 | 28 | 68 | 80 |
| 39 | 41 | 29 | 70 | 78 |
| 38 | 42 | 30 | 72 | 76 |
| **37** | **43** | **31** | **74** | **74** |

3 boda

Ana ima 31 kg, Branimir 43 kg, a Cvijeta 37 kg. 3 boda

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**

**ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**
**5. razred – osnovna škola**
**14. veljače 2025.**

**RJEŠENJA ZADATAKA**

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte:

$$(467 + 135 - 252) \cdot 28 - 28 \cdot (163 + 159 - 22) + 25 \cdot (71 - 46).$$

**Rješenje 1:**

$(467 + 135 - 252) \cdot 28 - 28 \cdot (163 + 159 - 22) + 25 \cdot (71 - 46)$

$= 350 \cdot 28 - 28 \cdot 300 + 25 \cdot 25$ 3 boda

$= 9\ 800 - 8\ 400 + 625$ 2 boda

$= 2025$ 1 bod

**Rješenje 2:**

$(467 + 135 - 252) \cdot 28 - 28 \cdot (163 + 159 - 22) + 25 \cdot (71 - 46)$

$= 350 \cdot 28 - 28 \cdot 300 + 25 \cdot 25$ 3 boda

$= 28 \cdot (350 - 300) + 625$ 1 bod

$= 28 \cdot 50 + 625 = 1400 + 625$ 1 bod

$= 2025$ 1 bod

2. (6 bodova) Petrov mjesečni džeparac iznosi 30 €. Trećinu džeparca potroši na plaćanje usluga u mobilnoj mreži, polovinu ukupnog džeparca potroši na slastice, a preostali dio štedi. Nakon poskupljenja cijena slastica povećana je za petinu iznosa stare cijene, a Petrov račun za usluge u mobilnoj mreži povećao se za desetinu iznosa njegova džeparca.

Za koliko će roditelji morati povećati Petrov džeparac kako bi on i dalje mogao štedjeti jednak iznos kao i prije poskupljenja, uz uvjet da koristi istu mobilnu uslugu i kupuje istu količinu slastica?

**Rješenje:**

Na plaćanje usluga u mobilnoj mreži Petar potroši 30 € : 3 = 10 €. 1 bod

Na slastice mjesečno potroši 30 € : 2 = 15 €. 1 bod

Preostalo mu je 30 € − (10 € + 15 €) = 5 €, što ide u štednju.

Nakon poskupljenja na slastice će trošiti 15 € + (15 € : 5) = 15 € + 3 € = 18 €. 1 bod

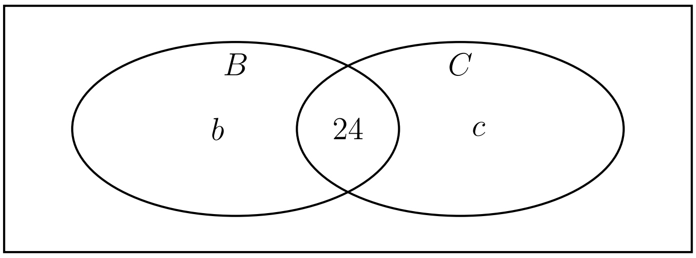
Novi račun za usluge u mobilnoj mreži nakon poskupljenja iznosit će
10 € + (30 € : 10) = 13 €. 1 bod

Ako Petar i dalje želi štedjeti isti iznos (5 €), njegov novi džeparac treba biti 18 € + 13 € + 5 € = 36 €. 1 bod

Roditelji trebaju povećati Petrov džeparac za 36 € − 30 € = 6 €. 1 bod

3. (6 bodova) Na seoskom je dvorištu 56 životinja bijele i crne boje. Od toga su 24 životinje istodobno i bijele i crne, dakle, dvobojne. Koliko ima životinja koje su samo bijele boje ako je potpuno crnih životinja za 6 više od potpuno bijelih?

**Rješenje:**




Od ukupnog broja životinja 56 oduzmemo 24 bijelih i crnih i dobivamo 32 životinje koje su samo bijele ili samo crne. 1 bod

Označimo s $b$ broj samo bijelih životinja i sa $c$ broj samo crnih životinja. Tada vrijedi

$$b + c = 32,$$ 1 bod

a iz uvjeta zadatka

$$c = 6 + b.$$ 1 bod

Uvrštavanjem druge jednakosti u prvu dobivamo:

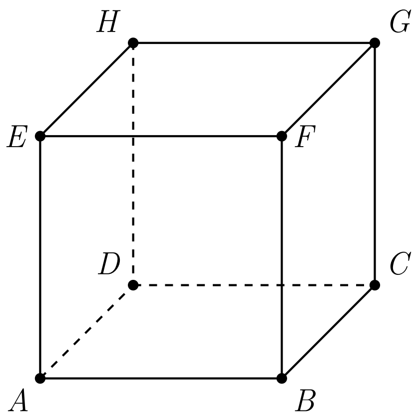
$$b + 6 + b = 32,$$ 1 bod

$$2b = 26,$$ 1 bod

$$b = 13.$$

Na seoskom je dvorištu 13 samo bijelih životinja. 1 bod

4. (6 bodova) Na koliko načina mrav može stići od točke $A$ do točke $G$ ako se kreće samo po bridovima kocke i pritom svakim bridom i vrhom kocke prođe najviše jedanput? Zapišite sve moguće putove. (Na primjer, $AEHG$ je jedan takav put!)



**Rješenje:**

Putovi su:

$AEHG$, $AEHDCG$, $AEHDCBFG$, $ABCG$, $ABCDHG$, $ABCDHEFG$,

$ABFG$, $ABFEHG$, $ABFEHDCG$, $AEFG$, $AEFBCG$, $AEFBCDHG$, 5 bodova

$ADHG$, $ADHEFG$, $ADHEFBCG$, $ADCG$, $ADCBFG$, $ADCBFEHG$.

Ima 18 načina. 1 bod

**Napomena:** Zadnji se bod može dobiti samo ako su točno napisani i prebrojeni svi putovi i nema pogrešnih putova.

Za točno napisane putove bodovi se dodjeljuju prema sljedećoj tablici.

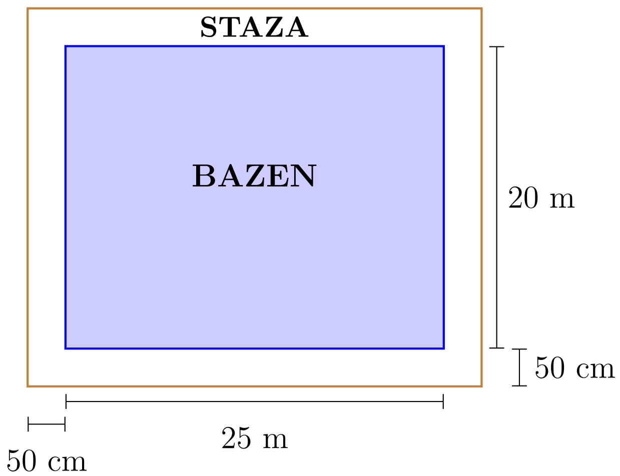
| **Broj napisanih točnih putova** | **Bodovi** |
|---|---|
| 0 – 2 | 0 |
| 3 – 5 | 1 |
| 6 – 8 | 2 |
| 9 – 11 | 3 |
| 12 – 16 | 4 |
| 17 – 18 | 5 |

Za pogrešno napisane putove ukupan broj bodova treba umanjiti za 1 BOD (1 – 3 pogrešna puta), 2 BODA (4 – 8 pogrešnih putova) ili 3 BODA (9 i više pogrešnih putova), ako je to moguće. Konačan broj bodova ne može biti negativan.

5. (6 bodova) Oko bazena duljine 25 m i širine 20 m vlasnik želi napraviti stazu širine 50 cm. Za posipavanje 2 $\text{m}^2$ staze potrebno je 9 kg sitnoga kamena.

Koliko će biti potrebno kupiti vreća sitnoga kamena za posipavanje ako jedna vreća ima masu 20 kg?

**Rješenje:**




1 bod

Površina bazena je $25 \cdot 20 = 500\ \text{m}^2$. 1 bod

Površina staze s bazenom je $26 \cdot 21 = 546\ \text{m}^2$. 1 bod

Površina staze je $546 - 500 = 46\ \text{m}^2$. 1 bod

Za 2 $m^2$ potrebno je 9 kg sitnog kamena, a za 46 $m^2$ potrebno je $23 \cdot 9 = 207$ kg kamena. 1 bod

$207 : 20 = 10$ i ostatak 7.

Potrebno je kupiti 11 vreća sitnog kamena. 1 bod

6. (10 bodova) Lorena je brala jagode 20 dana. Prvog je dana ubrala 18 kg, a svakog sljedećeg dana 2 kg više nego prethodnog. Koliko je Lorena ukupno ubrala jagoda za tih 20 dana?

**Rješenje:**

1. dan: 18 kg

2. dan: 18 kg + 2 kg = 20 kg 1 bod

3. dan: 20 kg + 2 kg = 22 kg (uočimo da vrijedi 18 kg + $2 \cdot 2$ kg = 22 kg) 1 bod

...

20. dan: 18 kg + $19 \cdot 2$ kg = 56 kg 3 boda

Da bismo izračunali ukupan zbroj, primijenimo Gaussovu dosjetku:

$$18 + 20 + 22 + \cdots + 56 =$$ 1 bod

$$(18 + 56) \cdot 20 : 2 =$$ 3 boda

$$= 740 \text{ kg}.$$

Lorena je ukupno za tih 20 dana ubrala 740 kg jagoda. 1 bod

7. (10 bodova) Ana je odabrala pet prirodnih brojeva: 35, 13 i još tri broja $a$, $b$ i $c$ za koje vrijedi $10 < a < 20$, $20 < b < 30$ i $10 < c < 20$.

Svih pet brojeva redom je zaokružila na desetice prema matematičkim pravilima. Pri tome je $a$ i $b$ zaokružila na prethodnu deseticu, a $c$ na sljedeću.

Razlika zbroja odabranih brojeva i zbroja brojeva zaokruženih na desetice iznosi 3.

Odredite sve vrijednosti brojeva $a$, $b$ i $c$ koje je Ana mogla odabrati, a koji udovoljavaju uvjetima zadatka.

**Rješenje:**

Iz uvjeta zadatka $10 < a < 20$, $20 < b < 30$, $10 < c < 20$ i uvjeta da je Ana brojeve $a$ i $b$ zaokružila na prethodnu deseticu, a $c$ na sljedeću slijedi: $a$ je zaokružila na 10, $b$ na 20 i $c$ na 20. 1 bod

Zbroj brojeva nakon zaokruživanja na desetice je $40 + 10 + 10 + 20 + 20 = 100$.

To nadalje znači da je zbroj pet dvoznamenkastih brojeva koje je Ana odabrala 103. 1 bod

Budući da je broj $a$ kod zaokruživanja na desetice zaokružen na prethodnu deseticu i da je $10 < a < 20$, zaključujemo $a \in \{11, 12, 13, 14\}$.

Budući da je broj $b$ kod zaokruživanja na desetice zaokružen na prethodnu deseticu i da je $20 < b < 30$, zaključujemo $b \in \{21, 22, 23, 24\}$.

Budući da je broj $c$ kod zaokruživanja na desetice zaokružen na sljedeću deseticu i da je $10 < c < 20$, zaključujemo $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$. 1 bod

Budući da je $35 + 13 + a + b + c = 103$, slijedi da je
$a + b + c = 103 - (35 + 13)$,
$a + b + c = 55$. 1 bod

Da bismo našli sva rješenja, trebamo ispitivati uvjete koji su zadani. To su:
$a \in \{11, 12, 13, 14\}$, $b \in \{21, 22, 23, 24\}$, $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ i $a + b + c = 55$.

Raspravu zapišimo tablicom.

| **a** | **b** | **c** | **Napomena** |
|---|---|---|---|
| 11 | 21 | $55 - 32 = 23$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 11 | 22 | $55 - 33 = 22$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 11 | 23 | $55 - 34 = 21$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 11 | 24 | $55 - 35 = 20$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 12 | 21 | $55 - 33 = 22$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 12 | 22 | $55 - 34 = 21$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 12 | 23 | $55 - 35 = 20$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 12 | 24 | $55 - 36 = 19$ | **1. rješenje** |
| 13 | 21 | $55 - 34 = 21$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 13 | 22 | $55 - 35 = 20$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 13 | 23 | $55 - 36 = 19$ | **2. rješenje** |
| 13 | 24 | $55 - 37 = 18$ | **3. rješenje** |
| 14 | 21 | $55 - 35 = 20$ | nije rješenje, jer je $c \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ |
| 14 | 22 | $55 - 36 = 19$ | **4. rješenje** |
| 14 | 23 | $55 - 37 = 18$ | **5. rješenje** |
| 14 | 24 | $55 - 38 = 17$ | **6. rješenje** |

6 bodova

Ana je mogla odabrati sljedeće brojeve:

1) $a = 12$, $b = 24$ i $c = 19$,

2) $a = 13$, $b = 23$ i $c = 19$,

3) $a = 13$, $b = 24$ i $c = 18$,

4) $a = 14$, $b = 22$ i $c = 19$,

5) $a = 14$, $b = 23$ i $c = 18$,

6) $a = 14$, $b = 24$ i $c = 17$.

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**

## ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
## 6. razred – osnovna škola
## 14. veljače 2025.

## RJEŠENJA ZADATAKA

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte: $-20 \cdot 25 - 202 \cdot (-5) - (-1) \cdot 45^2 + 2025 : (-5) - 105$.

**Rješenje:**

$$-20 \cdot 25 - 202 \cdot (-5) - (-1) \cdot 45^2 + 2025 : (-5) - 105 =$$

$$= -500 + 1010 + 2025 - 405 - 105$$ 4 boda

$$= 2025.$$ 2 boda

2. (6 bodova) Baka Ana ima voćnjak u kojemu uzgaja jabuke i kruške. Svake godine proda dio voća, a dio ostavlja za svoju obitelj. Ove je godine imala ukupno 960 kilograma voća za prodaju. Od ukupne količine voća $\frac{5}{8}$ su bile jabuke, a ostalo su bile kruške. Jabuke je prodala po cijeni od 1.20 eura, a kruške po cijeni od 1.50 eura po kilogramu.

   Koliko je baka Ana zaradila prodajom svakog voća?

   Od zarađenog novca $\frac{2}{5}$ je potrošila na popravak alata, a ostatak spremila u kasicu. Koliko je novca spremila u kasicu?

**Rješenje:**

Količina jabuka je $\frac{5}{8} \cdot 960 = 600$ kg. 1 bod

Zarada prodajom jabuka iznosi $600 \cdot 1.20 = 720$ eura. 1 bod

Količina krušaka je $960 - 600 = 360$ kg. 1 bod

Zarada prodajom krušaka iznosi $360 \cdot 1.50 = 540$ eura. 1 bod

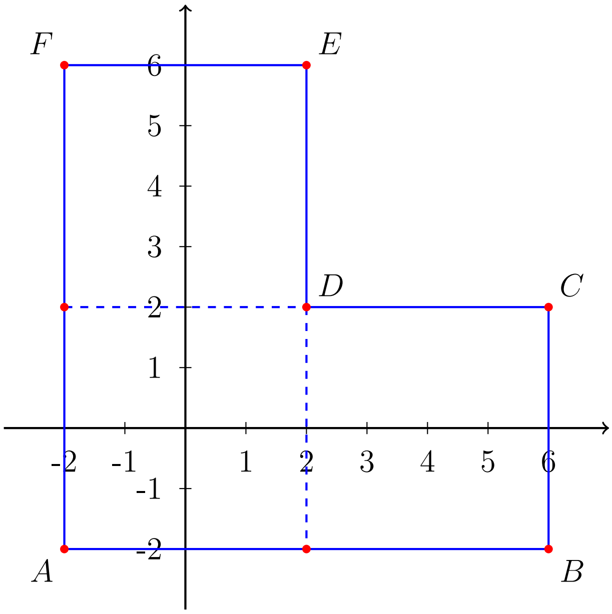
Prodajom voća ukupno je zaradila $720 + 540 = 1260$ eura. 1 bod

$$\frac{3}{5} \cdot 1260 = 756$$

Baka Ana u kasicu je spremila 756 eura. 1 bod

3. (6 bodova) U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini zadane su točke $A(-2,-2)$, $C(6,2)$ i $E(2,6)$. Točka $B$ je osnosimetrična točki $C$ s obzirom na os $x$, točka $D$ je centralnosimetrična točki $A$ s obzirom na ishodište i točka $F$ je osnosimetrična točki $E$ s obzirom na os $y$. Odredite koordinate točaka $B$, $D$ i $F$. Redom spojite točke $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ i $A$ te izračunajte opseg i površinu dobivenog lika. Duljina jedinične dužine je 1 cm.

**Rješenje:**




Točka $B(6, -2)$ 1 bod

Točka $D(2, 2)$ 1 bod

Točka $F(-2, 6)$ 1 bod

Opseg lika iznosi $8 + 4 + 4 + 4 + 4 + 8 = 32$ cm. 1 bod

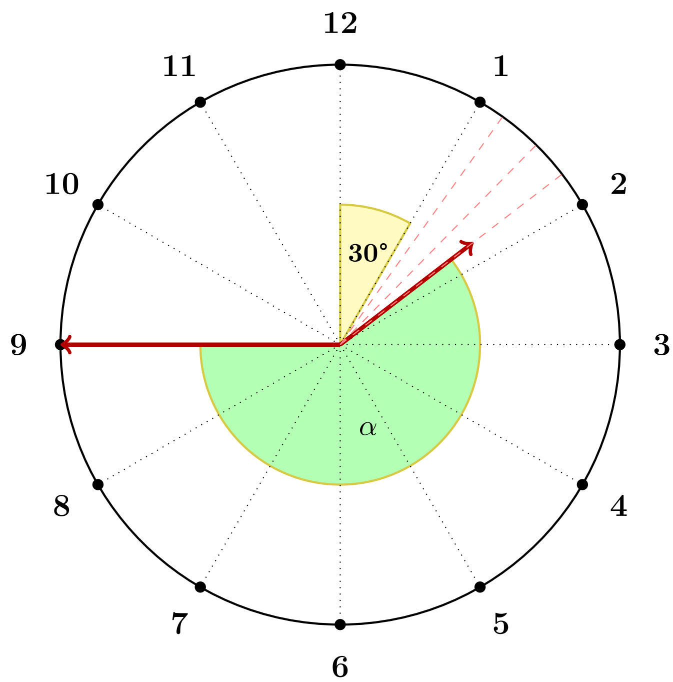
Dobiveni lik sastoji se od 3 kvadrata.

Površina jednog kvadrata iznosi $4 \cdot 4 = 16$ cm$^2$. 1 bod

Dakle, površina dobivenog lika je $3 \cdot 16$ cm$^2$ $= 48$ cm$^2$. 1 bod

4. (6 bodova) Odredite mjeru većeg kuta izraženu u stupnjevima i minutama koji zatvaraju velika (minutna) i mala (satna) kazaljka na satu u 1 sat i 45 minuta.

**Rješenje:**



Mala kazaljka za 1 sat prijeđe kut od $30^\circ$ , — 1 bod
a za 45 minuta prijeđe kut veličine $\frac{45}{60} \cdot 30^\circ = 22.5^\circ = 22^\circ 30'$. — 2 boda

Od male kazaljke do brojke 2 na satu ostalo je $30^\circ - 22^\circ 30' = 7^\circ 30'$. — 1 bod

Velika kazaljka je na brojci 9, a od 2 do 9 ima $7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$. — 1 bod

Zbrojimo kutove od male do velike kazaljke: $7^\circ 30' + 210^\circ = 217^\circ 30'$.

Mjera većeg kuta iznosi $217^\circ 30'$. — 1 bod

5. (6 bodova) Zbroj 2025 uzastopnih cijelih brojeva iznosi 2025. Odredite najmanji i najveći član toga niza.

**Rješenje:**

Neka je prvi broj $x$.

Drugi je broj $x+1$, treći $x+2$ i tako dalje do 2025. broja koji je $x+2024$. — 1 bod

Njihov zbroj iznosi 2025 pa dobijemo jednadžbu:

$$x + x + 1 + x + 2 + \cdots + x + 2024 = 2025,$$

$$2025x + 1 + 2 + \cdots + 2024 = 2025.$$ — 1 bod

Gaussovom dosjetkom izračunamo zbroj $1 + 2 + \cdots + 2024$.

$$1 + 2 + \cdots + 2024 = 1012 \cdot 2025$$ — 1 bod

$$2025x + 1012 \cdot 2025 = 2025$$

$$2025x = 2025 - 1012 \cdot 2025$$

$$2025x = 2025 \cdot (1 - 1012)$$

$$2025x = 2025 \cdot (-1011)$$

$$x = -1011$$ — 2 boda

Najmanji je član niza $-1011$, a najveći 1013. — 1 bod

6. (10 bodova) U Petrinoj sobi oblika kvadra je prozor dimenzija 1.25 m $\times$ 1.2 m, vrata dimenzija 2.1 m $\times$ 1 m, a na jednom zidu ima dekorativnu opeku površine 890 dm$^2$ koju nije potrebno obojiti. Kako bi se obojili svi zidovi u Petrinoj sobi potrebno je dvostruko više boje nego za bojenje stropa. (Sve zidove i strop treba obojiti u jednom sloju boje.) Koliki je volumen te sobe ako je njezina duljina 4 m, a širina 3.5 m ?

**Rješenje:**

Odredimo površinu stropa u sobi: $P = 4 \cdot 3.5 = 14$ m$^2$. — 1 bod

Iz uvjeta zadatka zaključujemo da je površina zidova koje je potrebno obojiti 28 m$^2$. — 1 bod

Označimo s $x$ visinu zidova u Aninoj sobi. Površine zidova su $2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 3.5 \cdot x = 15x$. — 1 bod

Od površine svih zidova sobe potrebno je oduzeti površinu koju zauzimaju prozor, vrata i dekorativna opeka jer su oni sastavni dio zida, ali se ne boje.

$890 \text{ dm}^2 = 890 : 100 \text{ m}^2 = 8.9 \text{ m}^2$. 1 bod

Površina zida koju nije potrebno obojiti iznosi $1.25 \cdot 1.2 + 2.1 \cdot 1 + 8.9 = 12.5$. 1 bod

Površina zida koji je potrebno obojiti iznosi $15x - 12.5$. 1 bod

Visinu sobe izračunamo iz jednadžbe:

$$15x - 12.5 = 28$$ 1 bod

$$15x = 28 + 12.5$$

$$15x = 40.5$$ 1 bod

$$x = 40.5 : 15$$

$$x = 2.7$$ 1 bod

Volumen sobe oblika kvadra iznosi $V = 4 \cdot 3.5 \cdot 2.7 = 37.8 \text{ m}^3$. 1 bod

7. (10 bodova) Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka 180?

**Rješenje:**

Broj 180 rastavimo na proste faktore.

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$ 2 boda

Četiri znamenke koje pomnožene daju 180 su:

$1, 4, 5, 9$ 1 bod

$1, 5, 6, 6$ 1 bod

$2, 3, 5, 6$ 1 bod

$2, 2, 5, 9$ 1 bod

$3, 3, 4, 5$ 1 bod

Ako su sve znamenke različite, imamo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ broja, što vrijedi za znamenke $(1, 4, 5, 9)$ i $(2, 3, 5, 6)$. 1 bod

Ako su dvije znamenke jednake, imamo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 : 2 = 12$ brojeva, što vrijedi za znamenke $(1, 5, 6, 6)$, $(2, 2, 5, 9)$ i $(3, 3, 4, 5)$. 1 bod

$$2 \cdot 24 + 3 \cdot 12 = 84$$

Ukupno imamo 84 broja. 1 bod

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**

# ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
**7. razred – osnovna škola**
**14. veljače 2025.**

## RJEŠENJA ZADATAKA

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte:
$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001.$$

**Rješenje 1:**

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\left(1000-\frac{1}{999}\right)\cdot 0.999+0.001= \qquad \text{3 boda}$$

$$=999-0.001+0.001= \qquad \text{2 boda}$$

$$=999. \qquad \text{1 bod}$$

**Rješenje 2:**

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\frac{999\cdot 999+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{999\cdot 999+998}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{999\cdot 999+998+1}{1000}=\frac{999\cdot 999+999}{1000}= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{999\cdot(999+1)}{1000}=\frac{999\cdot 1000}{1000}=999. \qquad \text{3 boda}$$

**Rješenje 3:**

$$\left(999+\frac{998}{999}\right)\cdot 0.999+0.001=\frac{999\cdot 999+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{998001+998}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{998999}{999}\cdot\frac{999}{1000}+\frac{1}{1000}= \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{998999}{1000}+\frac{1}{1000}=\frac{998999+1}{1000}=\frac{999000}{1000}=999. \qquad \text{3 boda}$$

2. (6 bodova) Učenik iz predmeta Matematika ima tri ocjene: 2, 3 i 4. Ako do kraja školske godine bude dobivao samo petice, koliko najmanje petica iz tog predmeta treba dobiti da bi na kraju imao prosjek za ocjenu odličan?

**Rješenje 1:** Za ocjenu odličan učenik treba imati prosjek ocjena najmanje 4.5.

$$4.5 \leq \frac{2+3+4+n\cdot 5}{n+3}$$ 2 boda

Smijemo pomnožiti s $(n+3)$ cijelu nejednadžbu jer je broj ocjena $(n+3)$ pozitivan broj te će znak nejednakosti ostati isti.

$$4.5(n+3) \leq 9+5n$$ 1 bod

$$4.5n+13.5 \leq 9+5n$$ 1 bod

$$4.5n-5n \leq 9-13.5$$

$$-0.5n \leq -4.5$$ 1 bod

$$n \geq 9$$

Učenik treba dobiti najmanje 9 petica. 1 bod

**Napomena:** Za dobivanje prvog boda učenik ne treba imati napisano objašnjenje zašto smije množiti nazivnikom.

Zadatak se može rješavati i jednadžbom $4.5 = \dfrac{2+3+4+n\cdot 5}{n+3}$.

**Rješenje 2:**

Prosječna je ocjena trenutačno: $\dfrac{2+3+4}{3} = 3.5$ 1 bod

Dodajemo ocjene 5 jednu po jednu i računamo prosjeke:

$$\frac{2+3+4+5}{4} = 3.5$$

$$\frac{2+3+4+2\cdot 5}{5} = 3.8$$

$$\frac{2+3+4+3\cdot 5}{6} = 4$$

$$\frac{2+3+4+4\cdot 5}{7} \approx 4.14$$

$$\frac{2+3+4+5\cdot 5}{8} = 4.25$$

$$\frac{2+3+4+6\cdot 5}{9} \approx 4.33$$

$$\frac{2+3+4+7\cdot 5}{10} = 4.4$$

$$\frac{2+3+4+8\cdot 5}{11} \approx 4.45$$

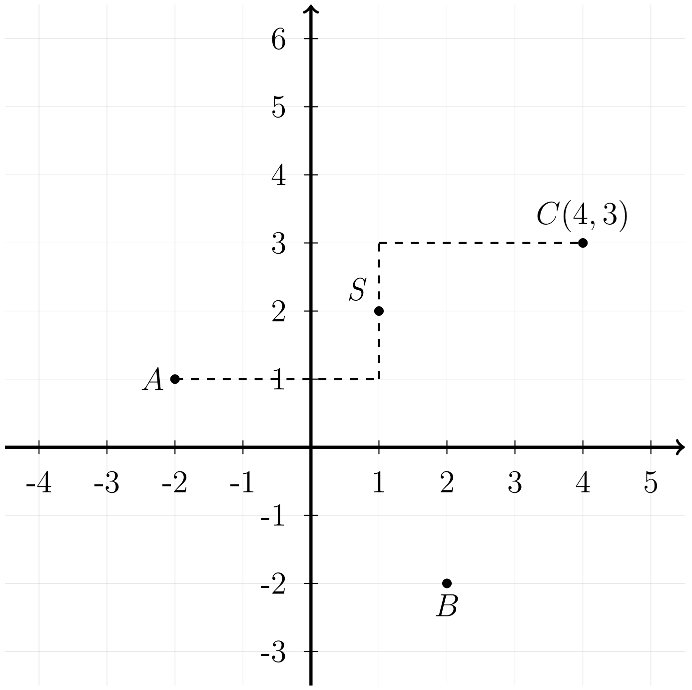
$$\frac{2+3+4+9\cdot 5}{12} = 4.5$$ 4 boda

Učenik treba dobiti najmanje 9 petica. 1 bod

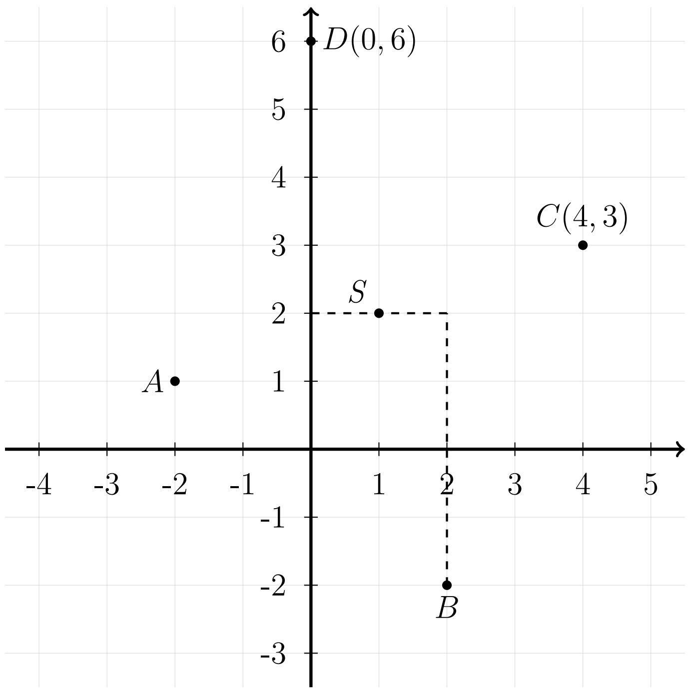
3. (6 bodova) Ako su točke $A(-2, 1)$ i $B(2, -2)$ dva vrha paralelograma $ABCD$ i točka $S(1, 2)$ sjecište njegovih dijagonala, odredite koordinate vrhova $C$ i $D$ tog paralelograma. Nacrtajte sliku u pravokutnom koordinatnom sustavu.

**Rješenje 1:**

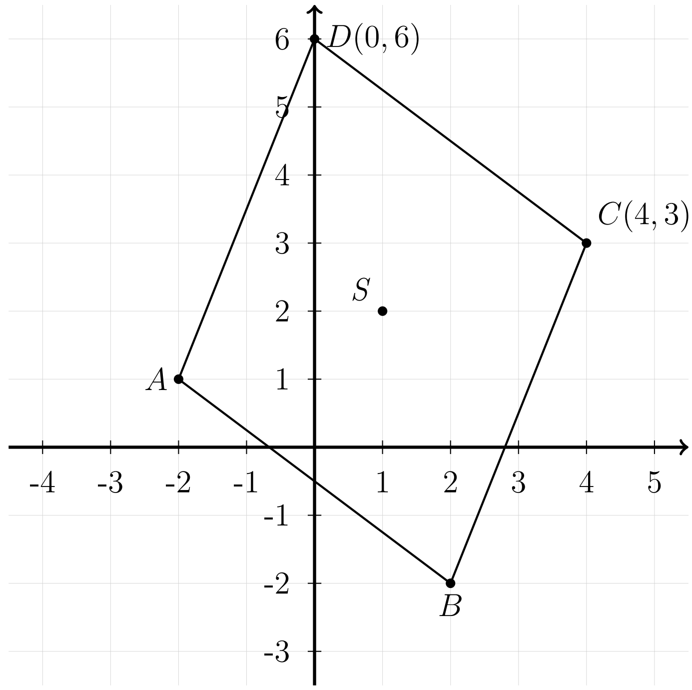
Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolovljuju. 1 bod




Centralnom simetrijom s obzirom na točku $S$ preslikamo točku $A$ i dobijemo vrh paralelograma $C(4, 3)$. 2 boda




Centralnom simetrijom s obzirom na točku $S$ preslikamo točku $B$ i dobijemo vrh paralelograma $D(0, 6)$. 2 boda




Nacrtan paralelogram. 1 bod

**Napomena:** Ako učenik napiše točne koordinate točaka $C$ i $D$ bez objašnjenja, može dobiti maksimalno 4 boda.

**Rješenje 2:**

Paralelogram je četverokut kojemu se dijagonale raspolovljuju. 1 bod

$S$ je polovište dijagonale $\overline{AC}$, pa su njezine koordinate aritmetička sredina koordinata točaka $A$ i $C$.

Dakle, za točke $A(-2,1)$, $S(1,2)$, $C(x,y)$ vrijedi:

$$1 = \frac{-2+x}{2} \qquad \text{i} \qquad 2 = \frac{1+y}{2}.$$ 1 bod

Riješimo te jednadžbe.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-2+x}{2} \quad / \cdot 2 \\ 2 &= -2+x \\ -x &= -2-2 \\ -x &= -4 \quad / : (-1) \\ x &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{1+y}{2} \quad / \cdot 2 \\ 4 &= 1+y \\ -y &= 1-4 \\ -y &= -3 \quad / : (-1) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$C(4,3)$ 1 bod

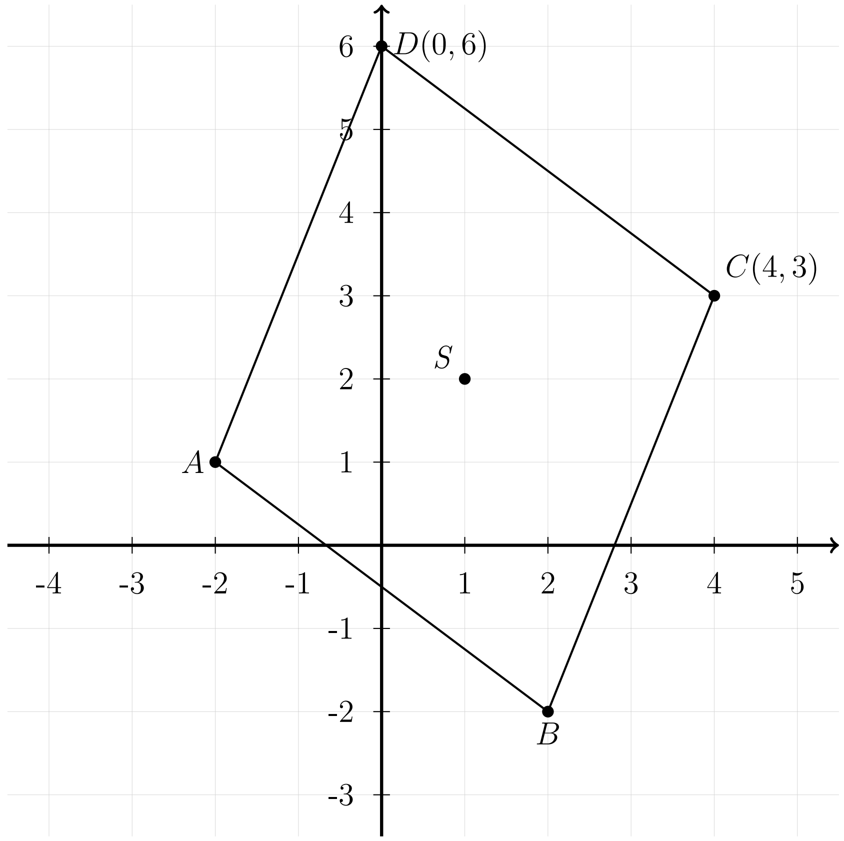
$S$ je polovište dijagonale $\overline{BD}$, pa su njezine koordinate aritmetička sredina koordinata točaka $B$ i $D$.

Dakle, za točke $B(2,-2)$, $S(1,2)$, $D(x',y')$ vrijedi:

$$1 = \frac{2+x'}{2} \qquad \text{i} \qquad 2 = \frac{-2+y'}{2}.$$ 1 bod

Riješimo te jednadžbe.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2+x'}{2} \quad / \cdot 2 \\ 2 &= 2 + x' \\ -x' &= 2 - 2 \\ -x' &= 0 \quad / : (-1) \\ x' &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= \frac{-2+y'}{2} \quad / \cdot 2 \\ 4 &= -2 + y' \\ -y' &= -2 - 4 \\ -y' &= -6 \quad / : (-1) \\ y' &= 6 \end{aligned} \qquad D(0,6)$$ 1 bod




Nacrtan paralelogram. 1 bod

4. (6 bodova) Tri dječaka i tri djevojčice idu u kazalište i dobili su 6 karata u nizu u istom redu. Djevojčice žele sjediti sve tri jedna do druge, a dječacima je svejedno gdje će sjediti. Na koliko se različitih načina oni tako mogu smjestiti?

**Rješenje 1:**

Djevojčice nazovimo A, B i C.

One žele sjesti sve tri zajedno pa njih promatramo kao jednu cjelinu. Djevojčice se unutar svoja tri mjesta mogu smjestiti na 6 različitih načina ABC, ACB, BAC, BCA, CAB ili CBA.

To smo mogli napisati i ovako: na prvo mjesto može sjesti bilo koja od njih tri, na drugo jedna od preostale dvije i zadnja na treće mjesto. Znači da one mogu sjesti unutar svoja tri mjesta na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 bod

Dječake nazovimo D, E i F.

Ako su djevojčice smještene na prva tri mjesta na bilo koji od gore opisanih 6 načina, tada su dječaci smješteni na zadnja tri mjesta. Njih možemo na ta tri mjesta smjestiti opet na 6 načina, DEF, DFE, EDF, EFD, FDE ili FED.

To je ukupno $6 \cdot 6 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na 2., 3. i 4. mjestu na jednom od svojih 6 načina, na prvom mjestu može biti bilo koji od tri dječaka.

Ako je na prvom mjestu dječak D, dječaci E i F na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina EF ili FE.

Ako je na prvom mjestu dječak E, dječaci D i F na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina DF ili FD.

Ako je na prvom mjestu dječak F, dječaci D i E na 5. i 6. mjestu mogu se rasporediti na dva načina DE ili ED.

To je ukupno $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na 3., 4. i 5. mjestu na jednom od svojih 6 načina, na prva dva mjesta mogu biti smještena dva dječaka na 2 načina, a na zadnjem mjestu preostali dječak.

Dječaci D i E na prva se dva mjesta mogu smjestiti na dva načina DE ili ED, a na zadnjem je mjestu tada dječak F.

Dječaci E i F se na prva dva mjesta mogu smjestiti na dva načina EF ili FE, a na zadnjem je mjestu tada dječak D.

Dječaci D i F se na prva dva mjesta mogu smjestiti na dva načina DF ili FD, a na zadnjem je mjestu tada dječak E.

To je ukupno $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ načina. 1 bod

Ako su djevojčice smještene na zadnja tri mjesta na bilo koji od gore opisanih 6 načina, tada su dječaci smješteni na prva tri mjesta. Njih možemo na ta tri mjesta smjestiti opet na 6 načina, DEF, DFE, EDF, EFD, FDE ili FED.

To je ukupno $6 \cdot 6 = 36$ načina. 1 bod

Ukupan broj načina na koje ih možemo smjestiti da sjede kako žele je $36+36+36+36 = 144$. 1 bod

**Rješenje 2:**

Tri djevojčice uvijek sjede zajedno pa njih promatramo kao jednu cjelinu.

Djevojčice unutar njihova tri mjesta možemo rasporediti tako da prva odabire 3 mjesta, druga 2 i treća sjeda na 1 preostalo mjesto, odnosno one se mogu unutar svoja tri mjesta smjestiti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. 1 bod

Označimo mjesta brojevima (123456).

Tada tri djevojčice zajedno možemo smjestiti na 3 spojena mjesta na 4 načina (123, 234 , 345 ili 456), jednog od dječaka na preostala tri mjesta, drugog na preostala dva mjesta i zadnjeg dječaka na jedino preostalo mjesto.

To je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 4 boda

Unutar svakog od ta 24 načina djevojčice možemo smjestiti na 6 načina pa je ukupan broj načina na koji možemo smjestiti djecu da sjede kako žele $6 \cdot 24 = 144$. 1 bod

5. (6 bodova) Koja je 2024. znamenka iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{2025}{26}$?

**Rješenje:**

$$\frac{2025}{26} = 77.8\dot{8}4615\dot{3}$$ 2 boda

Zadani broj ima pretperiod koji se sastoji od jedne znamenke i period koji se sastoji od šest znamenaka.

$$2024 - 1 = 2023$$

(Oduzeli smo 1 jer je iza decimalne točke jedna znamenka pretperioda koju također trebamo prebrojiti.) 1 bod

$$2023 : 6 = 337 \text{ i ostatak } 1$$ 1 bod

$$\frac{2025}{26} = 77.\underbrace{8\,\underbrace{\underbrace{846153}_{1.}\underbrace{846153}_{2.}\dots\underbrace{846153}_{336.}\underbrace{846153}_{337.}}_{2022\text{ znamenke}}}_{2023\text{ znamenke}}\underbrace{846153}_{338.}846153$$

Znamenka koju tražimo jest prva znamenka u 338. ponavljanju perioda. 1 bod

Tražena je znamenka 8. 1 bod

6. (10 bodova) Na jednom parkiralištu trenutačno je jedna sedmina parkiranih automobila plave boje. Crnih automobila ima upola manje nego plavih, a crvenih ima za jedan više negoli plavih i crnih zajedno. Sivih automobila ima za četiri manje nego crnih, a točno je polovina svih automobila na parkiralištu bijele boje. Automobila ostalih boja (koji nisu plavi, crni, crveni, sivi i bijeli) ima 10 puta manje nego sivih automobila. Ako je poznato da je popunjeno točno 80 % kapaciteta parkirališta, koliko je trenutačno na njemu slobodnih parkirnih mjesta?

**Rješenje:**

Označimo broj svih parkiranih automobila s $x$.

Broj automobila prema njihovoj boji prikazuje tablica:

| **boja** | plavi | crni | crveni | sivi | bijeli | ostali |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **broj automobila** | $\frac{1}{7}x$ | $\frac{1}{14}x$ | $\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + 1$ | $\frac{1}{14}x - 4$ | $\frac{1}{2}x$ | $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{14}x - 4\right)$ |

4 boda

Zbrajanjem dobijemo:

$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{14}x + 1 + \frac{1}{14}x - 4 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{14}x - 4\right) = x \quad / \cdot 140$$ 1 bod

$$20x + 10x + 20x + 10x + 140 + 10x - 560 + 70x + x - 56 = 140x$$ 1 bod

$$20x + 10x + 20x + 10x + 10x + 70x + x - 140x = 560 + 56 - 140$$ 1 bod

$$x = 616 - 140$$

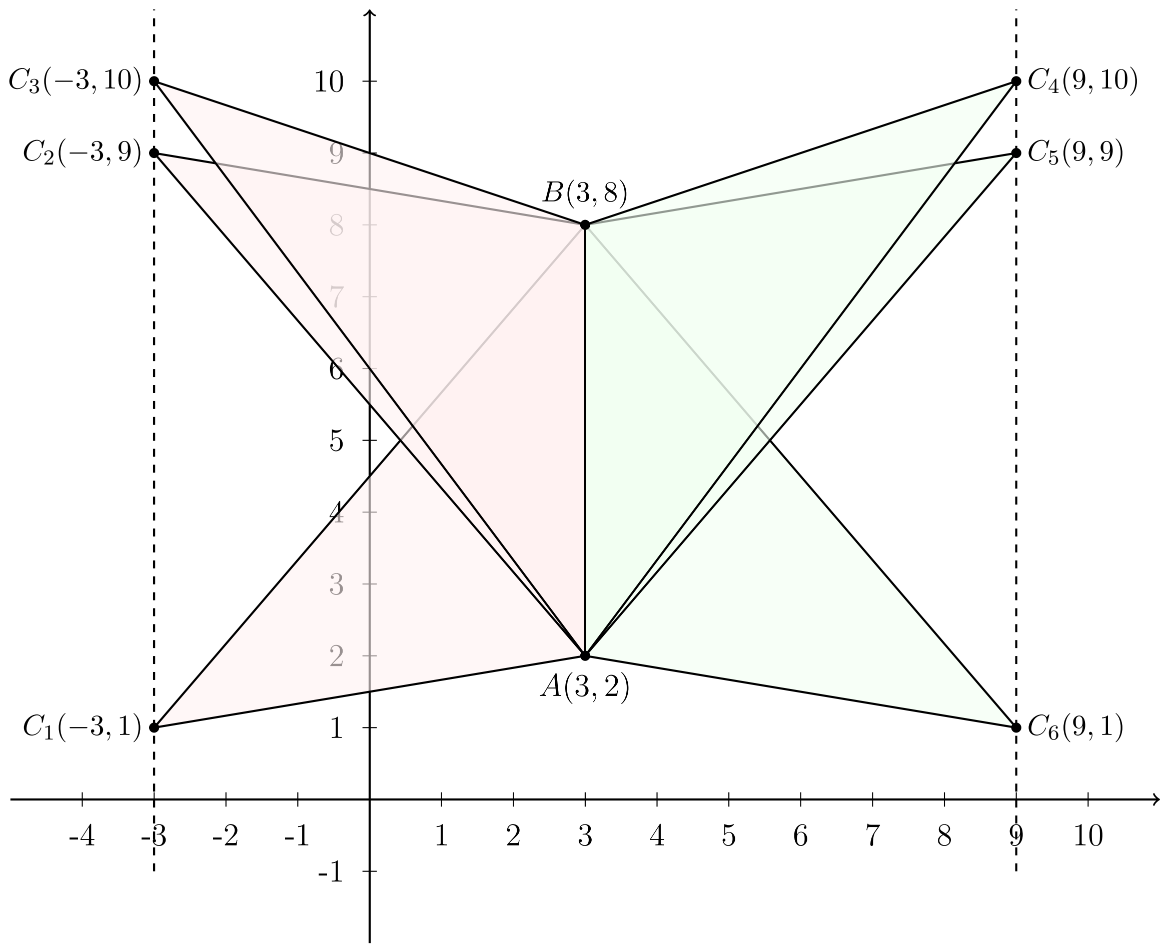
$$x = 476$$ 1 bod

Trenutačno je na parkiralištu 476 automobila. Kako je to 80 % kapaciteta parkirališta, slobodna mjesta čine 20 % kapaciteta parkirališta, odnosno broj slobodnih mjesta je četiri puta manji od broja popunjenih mjesta. 1 bod

Dakle, na parkiralištu je trenutačno 476 : 4 = 119 slobodnih parkirnih mjesta. 1 bod

7. (10 bodova) Tupokutni trokut površine 18 kvadratnih jedinica ima vrhove u točkama $A(3, 2)$, $B(3, 8)$ i $C(x, y)$. Odredite koordinate vrha $C$ ako je $y \in \mathbb{N}$ i $y \leq 10$.

**Rješenje:**




1 bod

Duljina stranice $\overline{AB}$ je 6 jedinica. 1 bod

Površina trokuta je

$$P = \frac{|AB| \cdot v}{2},$$

gdje je $v$ duljina visine iz vrha $C$ na stranicu $\overline{AB}$.

Visinu trokuta $v$ izračunamo prema formuli

$$v = \frac{2P}{|AB|} = \frac{36}{6} = 6.$$ 1 bod

Dakle, vrh $C$ mora pripadati jednom od dvaju pravaca koji su od pravca $AB$ udaljeni za 6 jedinica i stoga je apscisa točke $C$ jednaka $x = 9$ ili $x = -3$. 2 boda

Kako vrijedi $y \in \mathbb{N}$ i $y \leq 10$, da bi trokut bio tupokutan, mora vrijediti $y \in \{1, 9, 10\}$. U tom je slučaju jedan od kutova uz stranicu $\overline{AB}$ veći od $90°$, odnosno visina na stranicu $\overline{AB}$ je izvan trokuta pa je trokut tupokutan (vidi skicu).

Ako je $y \in \{2, 8\}$, trokut je pravokutan (jedan kut uz stranicu $\overline{AB}$ je $90°$, odnosno visina se podudara s jednom stranicom).

Ako je $y \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$, trokut je šiljastokutan (kutovi uz stranicu $\overline{AB}$ su manji od $90°$, a stranica $\overline{AB}$ je najkraća stranica zbog $|AC| > 6$ i $|BC| > 6$ pa je nasuprot nje najmanji kut, tj. kut pri vrhu $C$ je također šiljasti). 2 boda*

Dakle, koordinate vrha $C$ mogu biti: $(9, 1)$, $(9, 9)$, $(9, 10)$, $(-3, 1)$, $(-3, 9)$ i $(-3, 10)$. 3 boda

***Napomena:** Umjesto dokaza da su trokuti s vrhom $C$ u navedenim točkama jedini tupokutni trokuti koji zadovoljavaju uvjete zadatka, učenik može na skici nacrtati i preostale trokute i zornošću zaključiti da oni nisu tupokutni. U tom slučaju, da bi dobio dodatna 2 boda, skica treba biti uredna i u točnom mjerilu. Dovoljno je nacrtati trokute s vrhom $C$ na jednom od dvaju pravaca jer su im preostali trokuti osno simetrični.

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**

**ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE**
**8. razred – osnovna škola**
**14. veljače 2025.**

**RJEŠENJA ZADATAKA**

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Izračunajte:

$$-\frac{2^0}{\sqrt{2}}+\frac{2^1}{\sqrt{4}}-\frac{2^2}{\sqrt{8}}+\frac{2^3}{\sqrt{16}}-\frac{2^4}{\sqrt{32}}+\frac{2^5}{\sqrt{64}}-\frac{2^6}{\sqrt{128}}+\frac{2^7}{\sqrt{256}}.$$

**Rješenje:**

$$-\frac{2^0}{\sqrt{2}}+\frac{2^1}{\sqrt{4}}-\frac{2^2}{\sqrt{8}}+\frac{2^3}{\sqrt{16}}-\frac{2^4}{\sqrt{32}}+\frac{2^5}{\sqrt{64}}-\frac{2^6}{\sqrt{128}}+\frac{2^7}{\sqrt{256}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{4}}-\frac{4}{\sqrt{8}}+\frac{8}{\sqrt{16}}-\frac{16}{\sqrt{32}}+\frac{32}{\sqrt{64}}-\frac{64}{\sqrt{128}}+\frac{128}{\sqrt{256}}$$ 1 bod

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{2}-\frac{4}{2\sqrt{2}}+\frac{8}{4}-\frac{16}{4\sqrt{2}}+\frac{32}{8}-\frac{64}{8\sqrt{2}}+\frac{128}{16}$$ 2 boda

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+1-\frac{2}{\sqrt{2}}+2-\frac{4}{\sqrt{2}}+4-\frac{8}{\sqrt{2}}+8$$ 1 bod

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1-\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2-\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+4-\frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+8$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+4-4\sqrt{2}+8$$ 1 bod

$$=(1+2+4+8)-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1+2+4\right)$$

$$=15-\frac{15}{2}\sqrt{2}$$ 1 bod

**Napomena:** Ako je učenik racionalizirao nazivnike na način različit od prikazanog te dobio točno rješenje, ostvaruje 6 bodova.

Ako nazivnik rješenja nije racionaliziran, učenik ostvaruje 5 bodova.

2. (6 bodova) U jednom redu ružičnjaka zasađen je određen broj crvenih ruža. Između svake dvije crvene ruže zasađena je jedna bijela ruža, nakon čega je između svake dvije već zasađene ruže zasađena jedna žuta ruža te je na kraju između svake dvije već zasađene ruže zasađena plava ruža. Koliko je zasađeno crvenih ruža ako je ukupan broj zasađenih ruža 2025?

**Rješenje 1:**

Neka su C, B, Ž i P redom crvene, bijele, žute i plave ruže. Prema uvjetu zadatka dobivamo sljedeći raspored između dviju crvenih ruža:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | | | | B | | | | C |
| C | | | | B | | | | C |
| C | | Ž | | B | | Ž | | C |
| C | P | Ž | P | B | P | Ž | P | C |

1 bod

Raspored zasađenih ruža u ružičnjaku je:

C P Ž P B P Ž P C P Ž P B P Ž P C P Ž P B P Ž P C ... C P Ž P B P Ž P C.

Uočimo skupinu od osam ruža C P Ž P B P Ž P koja se periodično ponavlja te posljednju crvenu ružu koja ne pripada ni jednoj skupini. 2 boda

Neka je $x$ broj skupina od osam ruža. Imamo:

$$8x + 1 = 2025$$ 2 boda

$$8x = 2024$$

$$x = 254.$$ 1 bod

Zasađene su 254 crvene ruže.

**Rješenje 2:**

Neka je $n$ broj zasađenih crvenih ruža.

Bijele su ruže između crvenih, što znači da je broj bijelih ruža za jedan manji od broja crvenih ruža, tj. zasađeno je $n - 1$ bijelih ruža. 1 bod

Na sličan način dobivamo broj zasađenih žutih i plavih ruža.

Ukupan broj crvenih i bijelih ruža je $n + n - 1 = 2n - 1$ pa je žutih ruža zasađeno $2n - 1 - 1 = 2n - 2$. 1 bod

Ukupan broj crvenih, bijelih i žutih ruža je $n + n - 1 + 2n - 2 = 4n - 3$ pa je plavih ruža zasađeno $4n - 3 - 1 = 4n - 4$. 1 bod

Imamo:

$$n + n - 1 + 2n - 2 + 4n - 4 = 2025$$ 2 boda

$$8n - 7 = 2025$$

$$8n = 2032$$

$$n = 254.$$ 1 bod

Zasađene su 254 crvene ruže.

3. (6 bodova) Koliki je zbroj svih znamenaka broja

$$5.23 \cdot (10^{45})^{45} + 677 \cdot 10^{2028} : 100\,000 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3?$$

**Rješenje:**

Primjenom pravila za računanje s potencijama dobivamo:

$$5.23 \cdot \left(10^{45}\right)^{45} + 677 \cdot 10^{2028} : 100\,000 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 =$$

$$= 5.23 \cdot 10^{45\cdot 45} + 677 \cdot 10^{2028-5} + 2^{1+2+3}$$

$$= 5.23 \cdot 10^{2025} + 677 \cdot 10^{2023} + 2^6$$ 1 bod

$$= 5.23 \cdot 10^{2025} + 6.77 \cdot 10^{2025} + 2^6$$ 1 bod

$$= (5.23 + 6.77) \cdot 10^{2025} + 2^6$$ 1 bod

$$= 12 \cdot 10^{2025} + 64$$ 1 bod

$$= 12\underbrace{000\ldots000}_{2023}64.$$ 1 bod

Zbroj svih znamenaka zadanog broja iznosi 13. 1 bod

**Napomena:** Ako je učenik točno izračunao zbroj svih znamenaka zadanog izraza, a pritom izraz $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3$ nije zapisao u obliku potencije s bazom 2, već je odmah izračunao $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 64$, ostvaruje 6 bodova.

4. (6 bodova) Odredite zbroj svih troznamenkastih brojeva koji su tri puta veći od kvadrata zbroja svojih znamenaka.

**Rješenje 1:**

Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Prema uvjetu zadatka je $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$.

Broj $\overline{abc}$ djeljiv je s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3, tj. $a+b+c = 3n$, $n \in \mathbb{N}$ pa je $3 \cdot (a+b+c)^2 = 3 \cdot (3n)^2 = 27n^2$. 2 boda

$\overline{abc} = 27n^2$ je troznamenkast za $n \in \{2,3,4,5,6\}$ tj. $\overline{abc} \in \{108, 243, 432, 675, 972\}$. 1 bod

Provjerimo za koje brojeve vrijedi uvjet zadatka.

$3 \cdot (1+0+8)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 108$

$3 \cdot (2+4+3)^2 = 3 \cdot 81 = 243 = 243$

$3 \cdot (4+3+2)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 432$

$3 \cdot (6+7+5)^2 = 3 \cdot 324 = 972 \neq 108$

$3 \cdot (9+7+2)^2 = 3 \cdot 324 = 972 = 972$ 2 boda

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 243 i 972, pa je traženi zbroj $243 + 972 = 1215$. 1 bod

**Rješenje 2:**

Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Prema uvjetu zadatka je $\overline{abc} = 3(a+b+c)^2$.

Za prirodan broj $x$, broj $3x^2$ je troznamenkast ako i samo ako je $x \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$. 2 boda

Odredimo brojeve $\overline{abc} = 3x^2$ te zbrojeve njihovih znamenaka za sve $x \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$.

Uvjet zadatka zadovoljavaju oni brojevi $\overline{abc}$ za koje vrijedi: $a+b+c = x$.

| $x$ | $\overline{abc}$ | $a+b+c$ |
|---|---|---|
| 6 | 108 | 9 |
| 7 | 147 | 12 |
| 8 | 192 | 12 |
| **9** | **243** | **9** |
| 10 | 300 | 3 |
| 11 | 363 | 12 |
| 12 | 432 | 9 |
| 13 | 507 | 12 |
| 14 | 588 | 21 |
| 15 | 675 | 18 |
| 16 | 768 | 21 |
| 17 | 867 | 21 |
| **18** | **972** | **18** |

3 boda

Uvjete zadatka ispunjavaju brojevi 243 i 972 pa je traženi zbroj $243 + 972 = 1215$. 1 bod

**Napomena:** Za zaključak $a+b+c \in \{6, 7, 8, \ldots, 18\}$ učenik ostvaruje 2 boda bez obzira na zapis.

Vrednovanje tablice: Učenik ostvaruje 3 boda ako provjeri uvjet zadatka za sve elemente skupa $\{6, 7, 8, \ldots, 18\}$, 2 boda ako provjeri uvjet za osam elemenata navedenog skupa, 1 bod ako provjeri uvjet za četiri elementa navedenog skupa.

Ako učenik do ispravnog zaključka dolazi računski, npr. za $x = 6$,

$\overline{abc} = 108$, $3 \cdot (1+0+8)^2 = 3 \cdot 81 = 243 \neq 108$,

bodove treba raspodijeliti predloženim načinom bodovanja tablice.

5. (6 bodova) Kojem se mnogokutu utrostručavanjem broja stranica zbroj veličina unutarnjih kutova poveća za 225 %?

**Rješenje:**

Neka je $n$ broj stranica traženog mnogokuta.

Zbroj veličina njegovih unutarnjih kutova je $K_n = (n–2) \cdot 180$ pa utrostručivanjem broja stranica dobivamo $K_{3n} = (3n–2) \cdot 180$. 1 bod

$K_{3n}$ je, prema uvjetu zadatka, $K_n$ uvećan za 225% od $K_n$, što je $3.25K_n$. 1 bod

Vrijedi:

$$K_{3n} = 3.25K_n$$

$$(3n-2) \cdot 180^\circ = 3.25 \cdot (n-2) \cdot 180^\circ \quad / : 180^\circ$$ 2 boda

$$3n-2 = 3.25 \cdot (n-2)$$

$$3n-2 = 3.25n - 6.5$$ 1 bod

$$3n - 3.25n = 2 - 6.5$$

$$-0.25n = -4.5$$

$$n = 18.$$ 1 bod

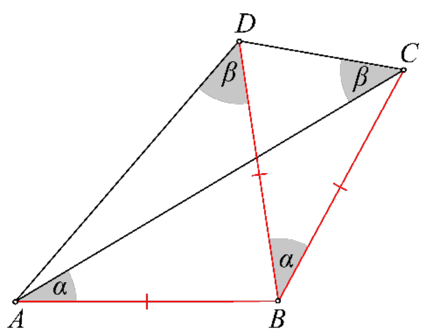
Traženi je mnogokut osamnaesterokut.

6. (10 bodova) Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

$$|AB| = |BC| = |BD|, \quad |\angle BAC| = |\angle CBD| \quad \text{te} \quad |\angle ADB| = |\angle DCA|.$$

Odredite veličine kutova četverokuta $ABCD$.

**Rješenje:**




1 bod

Neka je $|\angle BAC| = |\angle CBD| = \alpha$ te $|\angle ADB| = |\angle DCA| = \beta$.

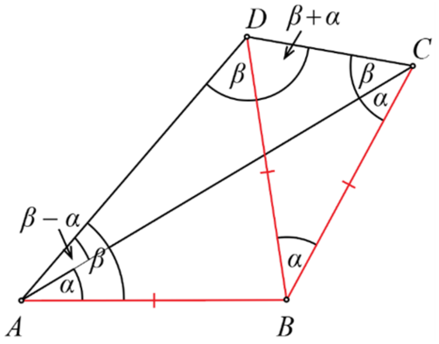
Trokut $ABC$ je jednakokračan jer je $|AB| = |BC|$, pa je $|\angle ACB| = \alpha$.

Trokut $ABD$ je jednakokračan jer je $|AB| = |BD|$, pa je $|\angle BAD| = \beta$. 1 bod

Sada slijedi da je $|\angle CAD| = \beta - \alpha$. 1 bod

Trokut $BCD$ je jednakokračan jer je $|BC| = |BD|$, pa je $|\angle DCB| = |\angle BDC| = \beta + \alpha$.

1 bod




Zbroj veličina kutova trokuta $ACD$ vrijedi: $\beta + \alpha + \beta + \beta + \beta - \alpha = 180°$. 1 bod

Dakle, $4\beta = 180°$ pa je $\beta = 45°$. 1 bod

Na sličan način, iz trokuta $BCD$ slijedi: $2(\alpha + \beta) + \alpha = 180°$

$2(\alpha + 45°) + \alpha = 180°$

$\alpha = 30°$. 1 bod

Kutovi četverokuta $ABCD$ imaju veličine: $|\angle BAD| = \beta = 45°$,

$|\angle DCB| = \alpha + \beta = 75°$. 1 bod

$|\angle ADC| = \alpha + 2\beta = 120°$. 1 bod

$|\angle CBA| = 360° - 120° - 45° - 75° = 120°$. 1 bod

**Napomena:** S 3 boda se boduje i ako je učenik točno označio veličine kutova na crtežu.

7. (10 bodova) Za koje sve uređene parove cijelih brojeva $(m, n)$ vrijedi da je

$$n^2(2 + m) = n^2 - m + 16?$$

**Rješenje:**

Izraz $n^2(2 + m) = n^2 - m + 16$ zapisujemo:

$2n^2 + n^2m = n^2 - m + 16$ 1 bod

$2n^2 + n^2m - n^2 + m - 16 = 0$

$n^2 + n^2m + m + 1 - 17 = 0$ 2 boda

$n^2(1 + m) + (1 + m) - 17 = 0$ 1 bod

$(1 + m)(n^2 + 1) = 17$ 1 bod

Četiri su slučaja kada je umnožak $(1 + m)(n^2 + 1)$ jednak 17.

| | $n^2+1$ | $1+m$ | $(1+m)(n^2+1)$ |
|---|---|---|---|
| 1. | 1 | 17 | 17 |
| 2. | $-1$ | $-17$ | 17 |
| 3. | 17 | 1 | 17 |
| 4. | $-17$ | $-1$ | 17 |

1 bod

Slučajevi $n^2 + 1 = -1$ i $n^2 + 1 = -17$ nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva. 1 bod

Za $n^2 + 1 = 1$ i $m + 1 = 17$ imamo: $n^2 = 1 - 1 = 0$ pa je $n = 0$,

$m = 17 - 1 = 16$.

Rješenje je uređeni par $(16, 0)$. 1 bod

Za $n^2 + 1 = 17$ i $m + 1 = 1$ imamo:

$n^2 = 17 - 1 = 16$ pa je $n_1 = 4$ i $n_2 = -4$,

$m = 1 - 1 = 0$.

Rješenja su uređeni parovi $(0, 4)$ i $(0, -4)$. 2 boda

Uređeni parovi koji zadovoljavaju uvjet zadatka su: $(16, 0)$, $(0, -4)$, i $(0, 4)$.

**Napomena:** Učenik za svako navedeno rješenje, bez obrazloženja, dobiva po 1 bod.