Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
2. razred – srednja škola – A – varijanta
14. veljače 2025.

RJEŠENJA ZADATAKA

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (6 bodova) Odredite realan parametar m za koji je kvadrat razlike rješenja jednadžbe $x^2 + 2mx + m = 1$ najmanji te odredite najmanju pripadnu vrijednost.

Rješenje 1: Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe.
Primjenom Vieteovih formula za $x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ slijedi

$$x_1 + x_2 = -2m \quad \text{i} \quad x_1 \cdot x_2 = m - 1.$$ 1 bod

Iskaže se kvadrat razlike rješenja koristeći Vieteove formule:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = && \text{1 bod}\\ &= 4m^2 - 4m + 4 && \text{1 bod}\\ &= (2m-1)^2 + 3 && \text{1 bod}\end{aligned}$$

Kvadrati realnih brojeva nisu negativni pa za svaki $m \in \mathbb{R}$ je $(2m-1)^2 \geq 0$. 1 bod
Dodavanjem broja 3 na obje strane nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}(2m-1)^2 &\geq 0 \quad / + 3\\ (2m-1)^2 + 3 &\geq 3\\ (x_1 - x_2)^2 &\geq 3\end{aligned}$$

Kvadrat razlike rješenja iznosit će najmanje 3 i tu vrijednost postiže za $m = \frac{1}{2}$. 1 bod

Rješenje 2: Alternativno, nakon što učenik zapiše $(x_1 - x_2)^2 = 4m^2 - 4m + 4$, umjesto svođenja na potpuni kvadrat do rješenja može doći računajući koordinate tjemena parabole koja je graf kvadratne funkcije $p(m) = 4m^2 - 4m + 4$.

2. (6 bodova) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

rastuća.

Rješenje:

Primjenom identiteta za kvadrat zbroja, tj. razlike, početni se izraz može napisati na sljedeći način:

$$f(x) = \sqrt{(x^2-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$$

iz čega slijedi:

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x + 1|$$ 1 bod

Iz $x^2 - 1 = 0$ dobije se $x_{1,2} = \pm 1$.

Iz $x + 1 = 0$ dobije se $x_3 = -1$.

U ovisnosti o predznaku vrijednosti navedenih izraza promotrimo sljedeća tri slučaja:

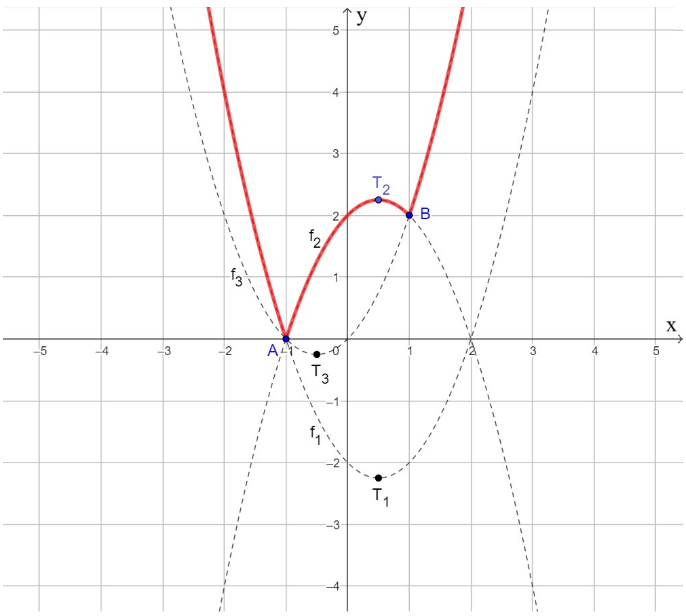
1. $x \in <-\infty, -1]$
$$f = f_1(x) = x^2 - 1 - x - 1$$
$$f_1(x) = x^2 - x - 2$$ 1 bod

2. $x \in <-1, 1]$
$$f = f_2(x) = -x^2 + 1 + x + 1$$
$$f_2(x) = -x^2 + x + 2$$ 1 bod

3. $x \in <1, +\infty]$
$$f = f_3(x) = x^2 - 1 + x + 1$$
$$f_3(x) = x^2 + x$$ 1 bod

Nultočke funkcija f_1 i f_2 su -1 i 2, a nultočke funkcije f_3 su -1 i 0. Tjemena pripadnih parabola redom su točke $T_1\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$, $T_2\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $T_3\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

Koristeći prethodno skicirajmo graf funkcije f:



Kako bismo odredili interval rasta funkcije f, potrebne su apscise točaka A, B i T_2. Apscisa točke A iznosi $x_A = -1$, apscisa točke T_2 iznosi $x_{T_2} = \frac{1}{2}$. Kako bismo odredili apscisu x_B točke B, potrebno je odrediti sjecišta grafova funkcija f_2 i f_3.

Odredimo sjecišta grafova funkcija f_2 i f_3.

$$x^2 + x = -x^2 + x + 2$$
$$2x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$

3. (6 bodova) Odredite sve one troznamenkaste prirodne brojeve koji su jednaki zbroju svoje znamenke stotice, kvadrata znamenke desetice i kuba znamenke jedinice.

Rješenje:

Neka je a znamenka stotice, b znamenka desetice i c znamenka jedinice. Troznamenkasti broj zapisan tim znamenkama glasio bi $100a + 10b + c$, gdje su $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ uz uvjet $a \neq 0$ (inače broj ne bi bio troznamenkast). 1 bod

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti

$$100a + 10b + c = a + b^2 + c^3.$$ 1 bod

Jednadžba se može zapisati kao

$$99a + b(10 - b) = (c - 1)c(c + 1).$$ 1 bod

Uzevši u obzir da su a, b, c znamenke broja, možemo provesti postupak analize slučajeva. Tablično ćemo prikazati sve moguće iznose triju članova jednadžbe.

a,b,c	99a	b(10-b)	(c-1)c(c+1)
0	ne može	0	0
1	99	9	0
2	198	16	6
3	297	21	24
4	396	24	60
5	495	25	120
6	594	24	210
7	693	21	336
8	792	16	504
9	891	9	720

1 bod

U tablici je lako uočiti koja kombinacija pribrojnika iz drugog i trećeg stupca odgovara nekoj vrijednosti iz četvrtog stupca.

Budući da je $99 + 21 = 120$, što se postiže za $a = 1$, $b \in \{3, 7\}$ i $c = 5$, zaključujemo da su traženi brojevi 135 i 175. 1 bod

Također je $495 + 9 = 504$, što se postiže za $a = 5$, $b \in \{1, 9\}$ i $c = 8$, zaključujemo da su traženi brojevi 518 i 598. 1 bod

4. (6 bodova) Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ međusobno različiti realni brojevi, za neki realan parametar c, dokažite da tada korijeni jednadžbe

$$(1 + c)(x^2 + 2x + c) - 2(c - 1)(x^2 + 1) = 0$$

ne mogu biti realni.

Rješenje:

Da bi korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ bili realni i različiti, mora vrijediti da je diskriminanta D' kvadratne jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ pozitivna tj. $D' > 0$ tj. $D' = 4 - 4c > 0$.

Zaključujemo da to vrijedi za svaki realan broj c takav da je $c < 1$. 1 bod

Promotrimo jednadžbu $(1+c)(x^2+2x+c)-2(c-1)(x^2+1)=0, c \in \mathbb{R}$. Raspisivanjem i množenjem dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu: $(3-c)x^2+(2+2c)x+c^2-c+2=0$ Diskriminanta dobivene jednadžbe jednaka je: $D=(2+2c)^2-4(3-c)(c^2-c+2)=4(c^3-3c^2+7c-5)$ 1 bod

Dalje, faktoriziramo dobiveni izraz:

$$\begin{aligned}
D &= 4(c^3-c^2-2c^2+7c-5) \\
&= 4(c^2(c-1)-(2c^2-7c+5) \\
&= 4(c^2(c-1)-2(c-1)(c-\frac{10}{4}) \\
&= 4(c^2(c-1)-(c-1)(2c-5) \\
&= 4(c-1)(c^2-2c+5)
\end{aligned}$$

2 boda

Budući da je $c < 1$, a vrijednost izraza c^2-2c+5 uvijek pozitivna jer je vodeći koeficijent pozitivan i diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe negativna, slijedi da je diskriminanta D negativna, tj. $D < 0$ pa korijeni jednadžbe $(1+c)(x^2+2x+c)-2(c-1)(x^2+1)=0, c \in \mathbb{R}$ nikada nisu realni. 2 boda

5. (6 bodova) Ako je

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

koliko je $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3$?

Rješenje:

Izraz $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ kvadrirajmo.

Dobivamo sljedeće: $x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})}+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}=a^2$

1 bod

Pojednostavimo izraz $2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})}$ tako da pomnožimo izraze u zagradi.

$$\begin{aligned}
2\cdot\sqrt{(x^2+\sqrt[3]{x^4y^2})\cdot(y^2+\sqrt[3]{x^2y^4})} &= 2\cdot\sqrt{2x^2y^2+\sqrt[3]{x^4y^4}(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4})} \\
&= 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^4}(2\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{x^4})} && \text{1 bod} \\
&= 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x^4y^4}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^2} \\
&= 2\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}) && \text{2 bod}
\end{aligned}$$

Vratimo se u početni izraz te dobivamo:

$$\begin{aligned}
x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}+2\cdot\sqrt[3]{x^2y^2}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})+y^2+\sqrt[3]{x^2y^4} &= a^2 \\
x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\cdot\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2 &= a^2 && \text{1 bod} \\
(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})^3 &= a^2. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

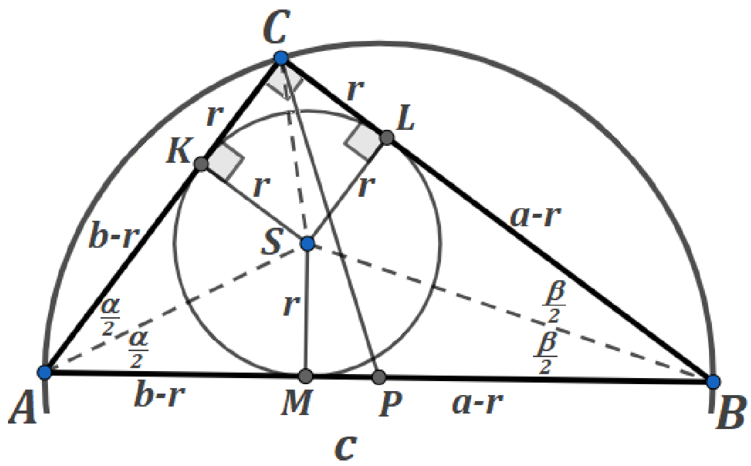
6. (10 bodova) Neka je trokut ABC proizvoljni pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C, katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c.

a) Dokažite da će u svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta umanjen za duljinu hipotenuze biti jednak duljini promjera tom trokutu upisane kružnice.

b) U kojem su omjeru duljine stranica pravokutnog trokuta ako se duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice i duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice odnose kao 5 : 2?

Rješenje:

Rješenje 1: Neka je zadan trokut s vrhovima A, B, C, a pravim kutom u vrhu C te neka je $|AB| = c$, $|BC| = a$ i $|AC| = b$. Slovima R i r označimo duljine polumjera tom trokutu opisane i upisane kružnice.



Najprije pokažimo tvrdnju iz a) dijela zadatka. Središte S tom trokutu upisane kružnice jest sjecište simetrala kutova trokuta. Polumjeri $\overline{SK}$, $\overline{SL}$ i $\overline{SM}$ okomiti su na stranice trokuta, i to redom na stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, i $\overline{AB}$, i zato je četverokut CLSK kvadrat. Posljedično $|CK| = |CL| = r$, $|AK| = b - r$ i $|BL| = a - r$. 1 bod

Trokuti AMS i ASK sukladni su prema SSK poučku: pravokutni su i podudaraju se u dvije stranice: $|SK| = |SM| = r$ i $\overline{AS}$ im je zajednička (dodatno i kutovi u vrhu A su im sukladni jer je AS simetrala kuta α). Stoga je $|AM| = |AK| = b - r$. Analognim zaključivanjem pokaže se $BMS \cong BLS$ i $|MB| = |BL| = a - r$. 1 bod

Sada je očito $c = a - r + b - r$ što daje tvrdnju $a + b - c = 2r$ iz a) dijela zadatka. 1 bod

Za b) dio zadatka treba uzeti u obzir da je svakom pravokutnom trokutu središte opisane kružnice u polovištu hipotenuze. Stoga je duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka polovini duljine hipotenuze: $R = |PC| = |PA| = |PB| = \dfrac{c}{2}$. 1 bod

Iz danog omjera duljina polumjera slijedi

$$\frac{R}{r} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{c}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 5a + 5b = 7c \quad / : c \quad / : 5$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}.$$ 1 bod

Budući da je trokut ABC pravokutan, iz Pitagorina poučka slijedi

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$ 1 bod

Sada treba riješiti sustav

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= \frac{7}{5} \\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= 1, \end{aligned}$$ 1 bod

u terminima omjera $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$. Supstitucijom iz prve jednadžbe $\frac{b}{c} = \frac{7}{5} - \frac{a}{c}$ dobit će se kvadratna jednadžba

$$25\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 35 \cdot \frac{a}{c} + 12 = 0$$ 1 bod

čija rješenja glase $\frac{a}{c} = \frac{4}{5}$ ili $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$. Odatle slijedi $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ odnosno $\frac{b}{c} = \frac{4}{5}$. 1 bod
U oba su slučaja duljine kateta u istom omjeru prema duljini hipotenuze, razlikuju se samo u postavljenim oznakama za duljine kateta. Zato je dovoljno gledati samo jedan slučaj. Omjeri duljina stranica dobit će se spajanjem tih omjera.

Iz $b : c = 3 : 5$ je $c : b = 5 : 3$ što zajedno s $a : c = 4 : 5$ daje $a : c : b = 4 : 5 : 3$, odnosno $a : b : c = 4 : 3 : 5$. Odnosno, ako bismo gledali drugi slučaj (što nije nužno), iz $a : c = 3 : 5$ i $b : c = 4 : 5$ slijedilo bi $a : b : c = 3 : 4 : 5$. 1 bod

Rješenje 2: Alternativno, u rješavanju b) dijela zadatka druga jednadžba sustava jednadžbi može se dobiti iz relacije $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}$ tako što bismo nju kvadrirali, a potom primijenili Pitagorin poučak.

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= \frac{7}{5} \quad /^2 \\ \frac{a^2}{c^2} + \frac{2ab}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} &= \frac{49}{25} \\ \frac{a^2 + b^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} &= \frac{49}{25}. \end{aligned}$$

Sada se primjenom Pitagorina poučka dobiva jednadžba $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{12}{25}$.
Tako se dolazi do (ekvivalentnog) sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= \frac{7}{5} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

Daljnji postupak slijedi analogno.

7. (10 bodova) Promotrimo tablicu brojeva s 50 redaka i 50 stupaca, oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,49} & a_{1,50} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,49} & a_{2,50} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{49,50} & a_{49,50} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{50,50} \end{bmatrix}$$

pri čemu oznaka $a_{i,j}$ označava broj koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu i pri čemu su brojevi $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{50,50}$ iz skupa $S = \{2, 3 \ldots, 22\}$. Odredite broj tablica navedenog oblika koje u svakom retku imaju točno jedan neparan broj. (Napomena: konačno rješenje može se napisati u obliku umnoška, bez dodatnog računanja.)

Rješenje:

U skupu S postoji 11 parnih brojeva i 10 neparnih brojeva.

U prvom se retku nalazi 50 elemenata, te za odabir neparnog broja u prvom retku postoji 50 mogućnosti. U skupu S postoji 10 neparnih brojeva, što je ukupno $50 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj u prvom retku. Preostalih 49 elemenata u prvom retku parni su brojevi, te za odabir svakog parnog broja postoji 11 mogućnosti, što je ukupno 11^{49} mogućnosti. Dakle, broj mogućnosti za elemente prvog retka, uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj, jest $50 \cdot 10 \cdot 11^{49}$. 3 boda

Analogno, za odabir neparnog broja u drugom retku postoji 49 mogućnosti. U skupu S postoji 10 neparnih brojeva, što je ukupno $49 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj u drugom retku. Preostalih 48 elemenata u drugom retku parni su brojevi, te za odabir svakog parnog broja postoji 11 mogućnosti, što je ukupno 11^{48} mogućnosti. Dakle, broj mogućnosti za elemente drugog retka uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj jest $49 \cdot 10 \cdot 11^{48}$. 3 boda

$\vdots$

U pretposljednjem retku postoji $2 \cdot 10$ mogućnosti za jedan neparan broj, te 11 mogućnosti za paran broj. Dakle, broj mogućnosti za elemente 49. retka, uz uvjet da u njemu postoji točno jedan neparan broj, jest $2 \cdot 10 \cdot 11$. 2 boda

U posljednjem je retku jedan broj koji zbog uvjeta u zadatku mora biti neparan. Postoji 10 mogućnosti za neparan broj u posljednjem retku. 1 bod

Konačno je rješenje:

$$(50 \cdot 49 \cdots 1) \cdot 10^{50} \cdot (11^{49} \cdot 11^{48} \cdots 11^{1}).$$ 1 bod

Napomena: Konačno rješenje može se zapisati i na sljedeći način:

$$50! \cdot 10^{50} \cdot 11^{1225}.$$

Napomena: U pretposljednjem retku elementi tablice su trebali biti označeni redom s $a_{49,49}$ i $a_{49,50}$. Ukoliko bi se promatralo na način kao što je zadano, tj. da su elementi u pretposljednjem retku međusobno jednaki, uvjet zadatka da u svakom retku postoji točno jedan neparan broj ne bi bio zadovoljen. Samim time, tablice navedenog oblika uz dani uvjet ne bi postojale i time bi rješenje bilo jednako 0.