MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-4.1. [10 bodova]

Riješi nejednadžbu

$$\frac{2x+1}{x-2} \geqslant a$$

u skupu realnih brojeva u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje.

Kako bi razlomak s lijeve strane bio definiran, ne smije biti $x - 2 = 0$; dakle, uvjet na bilo koje rješenje je $x \neq 2$. Danu nejednadžbu bismo uz ovaj uvjet mogli pomnožiti s $x - 2$ da se „riješimo" nazivnika; međutim, tada bismo trebali dijeliti rješenje na slučajeve ovisno o predznaku izraza $x - 2$, jer množenjem nejednadžbe s negativnim brojem se mijenja smjer nejednakosti.

Pojednostavimo stoga najprije razlomak s lijeve strane:

$$\frac{2x+1}{x-2} = \frac{2(x-2)+4+1}{x-2} = \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}.$$

Nejedadžba sada postaje

$$\frac{5}{x-2} \geqslant a - 2.$$

Predznak desne strane nejednakosti ovisi samo o vrijednosti realnog parametra a, a predznak lijeve samo o vrijednosti nazivnika $x - 2$. Ako je $a - 2 > 0$, tada mora biti i $\frac{5}{x-2} > 0$, tj. $x - 2 > 0$. Slijedi da možemo množiti nejednakost s $x - 2$ i dijeliti ju s $a - 2 \neq 0$ bez promjene smjera nejednakosti. Dobijemo da je $x \leqslant \dfrac{5}{a-2} + 2$, pa rješenje dane nejednadžbe u slučaju $a > 2$ glasi $x \in \left\langle 2, \dfrac{5}{a-2} + 2\right]$.

Ako je pak $a < 2$, desna strana je negativna, pa svi x za koje je vrijednost lijeve strane pozitivna zadovoljavaju nejednakost; to vrijedi za sve $x > 2$. Ako je $x - 2 < 0$, množenje nejednakosti s $x - 2$ te dijeljenje s $a - 2 \neq 0$ tada dva puta promijeni smjer nejednakosti, što znači da ponovno dođemo do $x \leqslant \dfrac{5}{a-2} + 2$. Rješenje nejednadžbe u slučaju $a < 2$ konačno glasi $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{5}{a-2} + 2\right] \cup \langle 2, \infty\rangle$.

Preostalo je još analizirati slučaj $a - 2 = 0$. Tada je rješenje nejednadžbe svaki x za koji je $x - 2 > 0$. Dakle, za $a = 2$ su sva rješenja nejednadžbe $x \in \langle 2, \infty\rangle$.

Zadatak S-4.2. [20 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Rješenje.

Neka je n prirodan broj čiji kub završava sa 777 777. Poznato je da na zadnju znamenku umnoška dva prirodna broja utječu samo zadnje znamenke brojeva koji se množe. Odredimo stoga najprije zadnju znamenku broja n, neka je to a. Dakle, zadnja znamenka broja n^3 će biti zadnja znamenka broja a^3; kako to mora biti znamenka 7, jedina mogućnost za a je 3 ($3^3 = 27$).

Promotrimo sada zadnje dvije znamenke kuba n^3. Na njih utječu jedino zadnje dvije znamenke broja n. Znamo da n završava na 3, pa nazovimo predzadnju znamenku (znamenku desetica) broja n s b. Sada možemo isprobavati sve mogućnosti za b, kubirati dobiveni dvoznamenkasti broj $\overline{b3}$ i vidjeti kada je završetak tog kuba jednak 77. No, možemo se poslužiti i algebarskim izrazima, kako slijedi.

Trebamo dakle kubirati broj $\overline{b3} = 10b + 3$. Učinimo to „po definiciji”, tj. množenjem broja $10b + 3$ tri puta samog sa sobom (prisjetimo se da zagrade množimo tako da svaki član jedne zagrade množimo sa svakim članom druge zagrade):

$$\begin{aligned}(10b+3)^3 &= (10b+3)\cdot(10b+3)\cdot(10b+3)\\ &= (100b^2+30b+30b+3^2)\cdot(10b+3) = (100b^2+60b+9)\cdot(10b+3)\\ &= 1000b^3+300b^2+600b^2+180b+90b+27 = 1000b^3+900b^2+270b+27.\end{aligned}$$

(Do ovog rezultata mogli smo doći direktno preko formule za *kub zbroja*: $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.) Vidimo da prva dva člana dobivenog zbroja ne utječu na zadnje dvije znamenke (jer će oni sigurno završavati sa dvije nule). Zadnje dvije znamenke određuju označeni brojevi, tj. zadnje dvije znamenke su određene vrijednošću izraza $70b + 27$. Vidimo da je zadnja znamenka ovog broja doista uvijek 7 te da nema „prijenosa” vrijednosti s mjesta jedinica na mjesto desetica, pa će predzadnja znamenka (znamenka desetica) biti upravo jednaka zadnjoj znamenci izraza $7b+2$. Kako bi i ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $b = 5$.

Nastavljamo dalje istim postupkom. Na zadnje tri znamenke kuba utječu zadnje tri znamenke broja n. Zadnje dvije znamenke su 53; označimo znamenku stotica sa c. Ponovno računamo:

$$(100c+53)^3 = 100^3c^3+3\cdot100^2c^2\cdot53+3\cdot100c\cdot53^2+53^3 = 100^3c^3+159\cdot100^2c^2+842700c+148877.$$

Prva dva člana ponovno ne utječu na znamenku stotica. Znamenka stotica će biti zadnja znamenka izraza $7c + 8$. Kako i ova znamenka mora biti jednaka 7, slijedi da $7c$ mora završavati sa 9, što je jedino moguće za $c = 7$.

Označimo dalje znamenku tisućica broja n s d; znamo da je četveroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{d753} = 1000d + 753$. Kubiranjem ovog broja dobijemo:

$$\begin{aligned}(1000d+753)^3 &= 1000^3d^3+3\cdot1000^2d^2\cdot753+3\cdot1000d\cdot753^2+753^3\\ &= 1000^3d^3+2259\cdot1000^2d^2+1701027000d+426957777.\end{aligned}$$

Znamenka tisućica broja n^3 je stoga zadnja znamenka izraza $7d + 7$. Kako bi ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $d = 0$.

Označimo sada znamenku desettisućica s e. Analognim računom dobijemo

$$\begin{aligned}(10000e+753)^3 &= 10000^3e^3+3\cdot10000^2e^2\cdot753+3\cdot10000e\cdot753^2+753^3\\ &= 10000^3e^3+2259\cdot10000^2e^2+17010270000e+426957777.\end{aligned}$$

Analognim zaključivanjem dobijemo da izraz $7e + 5$ mora završavati na 7, iz čega slijedi $e = 6$.

Konačno, odredimo i znamenku stotisućica f broja n. Ponovno kubiramo:

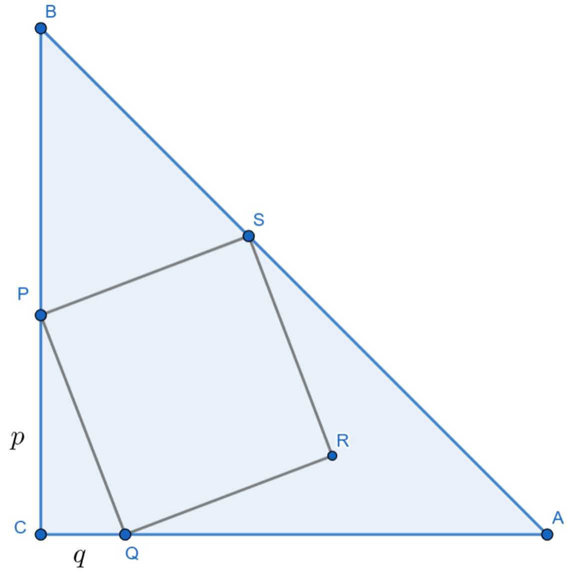
$$\begin{aligned}(100000f+60753)^3 &= 100000^3f^3+3\cdot100000f^2\cdot60753+3\cdot100000f\cdot60753^2+60753^3\\ &= 100000^3f^3+182259\cdot100000f^2\cdot+1107278102700000f+224234888577777.\end{aligned}$$

Izraz $7f+5$ mora završavati sa 7, što je jedino moguće za $f = 6$. Zaključujemo da je šesteroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{660753}$.

Zadatak S-4.3. [30 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P, Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP| : |CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC.

Rješenje.

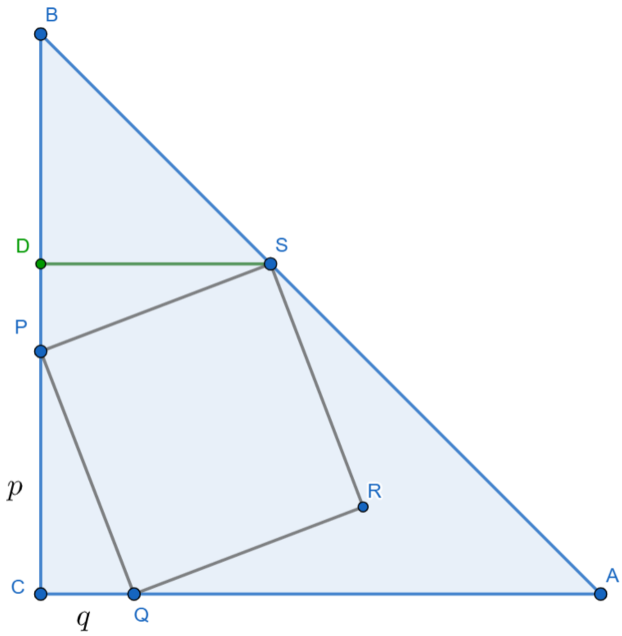


Označimo $|AC| = |BC| = a$, $|CP| = p$ i $|CQ| = q$. Po Pitagorinom poučku primjenjenom na pravokutni trokut QPC dobijemo da je duljina stranica kvadrata $PQRS$ jednaka $\sqrt{p^2+q^2}$. Stoga površina kvadrata $PQRS$ iznosi p^2+q^2. Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC iznosi $\dfrac{a^2}{2}$, pa iz danog omjera površine kvadrata $PQRS$ i trokuta ABC dobijemo $\dfrac{p^2+q^2}{a^2} = \dfrac{1}{5}$.

Trebamo sada pronaći još jednu vezu između a, p i q. U tu svrhu, povucimo okomicu iz točke S na stranicu $\overline{BC}$ i označimo nožište sa D. Uočimo sada da su pravokutni trokuti CQP i DPS sukladni po SKS poučku. Doista, hipotenuze PQ i SP su im jednake duljine kao stranice istog kvadrata te vrijedi

$$\sphericalangle SPD = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle CPQ = 90^\circ - \sphericalangle CPQ = \sphericalangle PQC.$$

Slijedi da je $|PD| = q$ i $|DS| = p$.



Trokut BDS je jednakokračan pravokutni, pa vrijedi i $|BD| = |DS| = q$. Sada po stranici $\overline{BC}$ vidimo da vrijedi $a = 2p + q$. Uvrstimo to u ranije dobivenu jednakost:

$$\frac{p^2+q^2}{(2p+q)^2} = \frac{1}{5}$$
$$5(p^2+q^2) = (2p+q)^2$$
$$5p^2+5q^2 = 4p^2+4pq+q^2$$
$$p^2-4pq+4q^2 = 0$$
$$(p-2q)^2 = 0$$

Iz ovoga slijedi da mora biti $p - 2q = 0$, tj. $p : q = 2 : 1$.

Zadatak S-4.4. [40 bodova]

Ana i Branko igraju sljedeću igru, koju zovu *toplo-hladno*. Ana započinje igru tako da zamisli neki dvoznamenkasti broj. Nakon toga Branko pokušava pogoditi Anin broj nizom upita. Ana Branku odgovara s:

- „točno” ako je pogodio broj koji je Ana zamislila;
- „toplo” ako je pogodio jednu znamenku Aninog broja i to na pravom mjestu, a preostala znamenka Brankovog broja se razlikuje za jedan od preostale znamenke Aninog broja;
- „hladno”, inače.

a) Dokaži da ne postoji strategija koja Branku osigurava da pogodi Anin broj s najviše 18 upita.

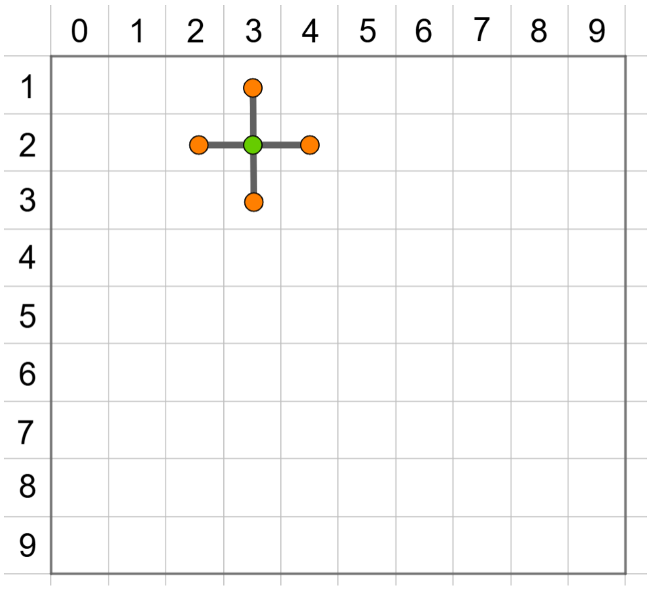
b) Odredi strategiju kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 24 upita.

c) Postoji li strategija kojom Branko može pogoditi Anin broj s najviše 22 upita?

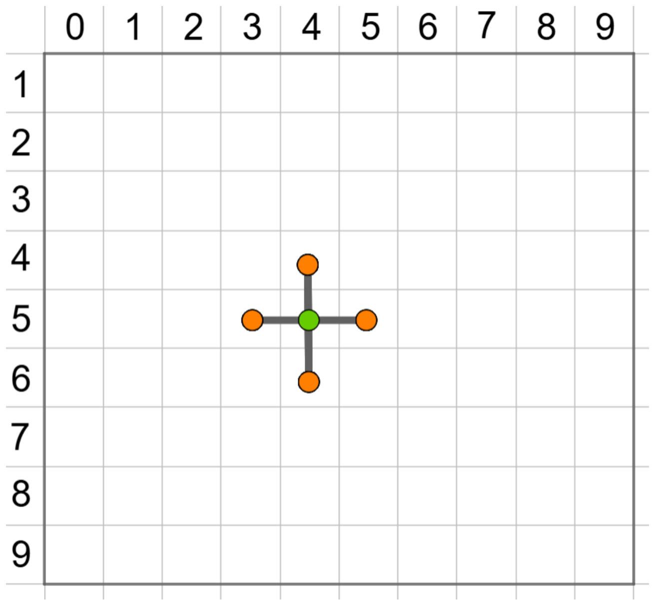
Rješenje.

a) Pretpostavimo suprotno, tj. da Branko ima strategiju kojom sa sigurnošću određuje Anin broj u ne više od 18 pokušaja. Ako na Brankov upit $\overline{ab}$ Ana kaže „hladno” Branko može zaključiti nešto o najviše 5 brojeva. Naime u slučaju da $a \notin \{1, 9\}$ i $b \notin \{0, 9\}$ to da $\overline{a(b-1)}$, $\overline{a(b+1)}$, $\overline{(a-1)b}$, $\overline{(a+1)b}$ i $\overline{ab}$ nisu Anin broj. Ako $a \in \{1, 9\}$ i $b \in \{0, 9\}$ eliminirati može manje od 5 brojeva. Dakle bez obzira na Brankovu strategiju, moguće je da na prvih 17 upita dobije odgovor „hladno”. Kako svakim pitanjem Branko „provjerava" najviše 5 brojeva, nakon 17 upita ostaje barem $90 - 17 \cdot 5 = 5$ brojeva za koje nema nikakvu informaciju. Tada s jednim preostalim pitanjem sigurno ne može dovoljno suziti izbor među preostalim brojevima, odnosno takva strategija ne može postojati.

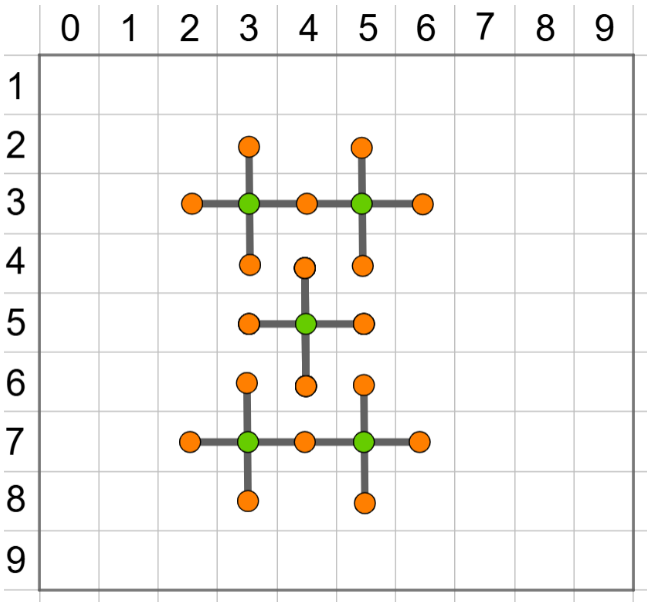
b) Posložimo sve dvoznamenkaste brojeve u 9×10 tablicu u kojoj red određuje prvu znamenku, a stupac drugu znamenku broja. Brankovi upiti se tada mogu shvatiti kao prekrivanje polja ove tablice likovima: svaki lik prekriva broj za koji Branko pita i njegove susjede, tj. polja s kojima dijeli stranicu. Primjerice, reprezentacija upita za broj 23 je lik „plus” koji prekriva polja 23 (odgovor „točno”) te polja 13, 22, 24 i 33 (odgovor „toplo”):



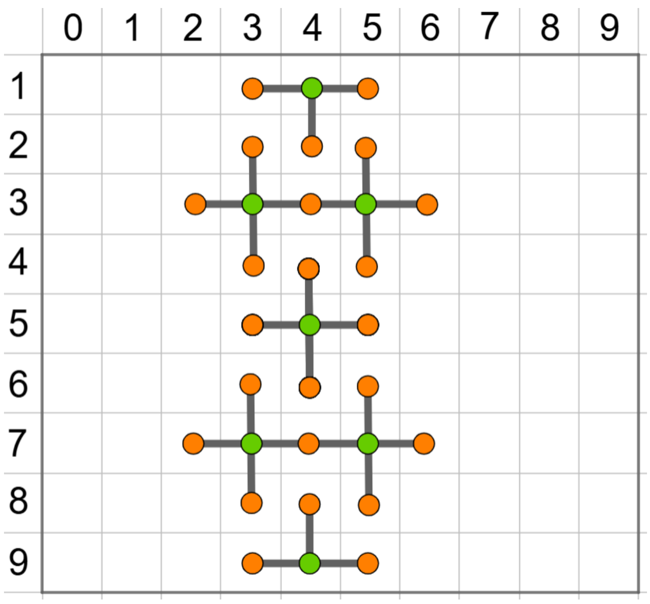
Ako sada uspijemo prekriti sva polja ove tablice s najviše 24 lika koji predstavljaju Brankove upite, tada ćemo doći do tražene strategije. Krenimo od sredine tablice, primjerice od polja 54, jer tada jednim upitom sigurno prekrijemo maksimalnih 5 polja.



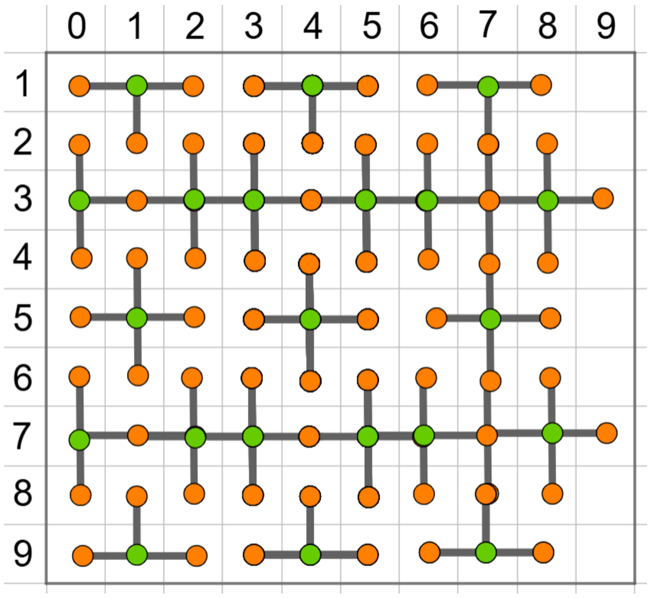
Nastavimo s popunjavanjem sredine, i to tako da s novim upitima prekrijemo što više nepokrivenih polja:



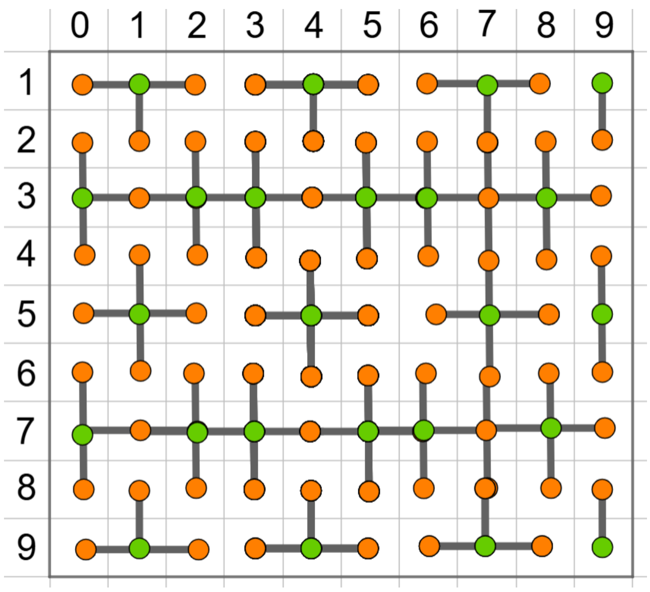
Dovršimo sada prekrivanje tri središnja stupca upitima za brojeve 14 i 94:



Do sada smo iskoristili 7 upita. Sada primijetimo da prethodna tri stupca, kao i sljedeća tri, možemo prekriti na analogan način, tj. možemo „kopirati" prekrivanje tri središnja stupca. Time dobijemo prekrivanje velikog dijela tablice koristeći $3 \cdot 7 = 21$ upit:

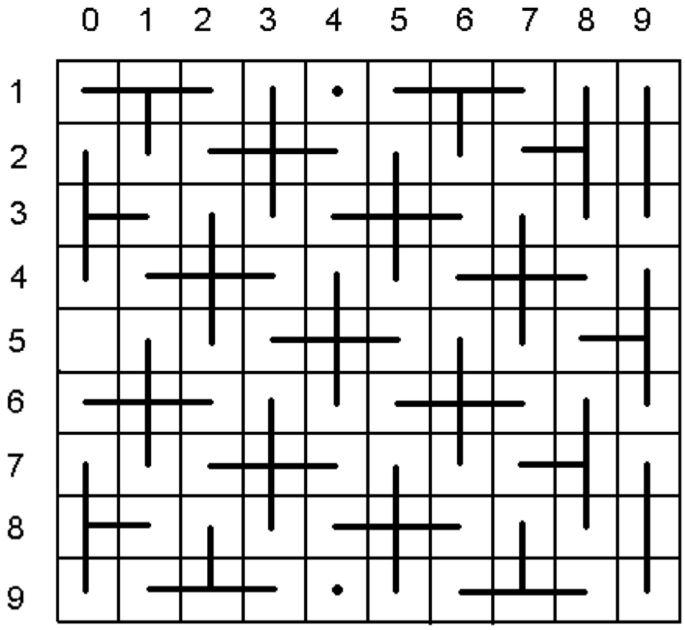


Preostala tri upita rasporedimo na brojeve 19, 59 i 99:



Sada je Brankova strategija sljedeća. Najprije pita za 21 „zeleni" broj koji su u središtima likova u prvih devet stupaca. Ako je na neko od ovih upita odgovor „točno", očito mu je dovoljno manje od 24 pokušaja; ako je na neki odgovor „toplo", treba mu još najviše tri dodatna upita da sazna Anin broj, dakle sve skupa najviše 24 upita. Ako je pak na sve upite odgovor „hladno", zna da je broj negdje u zadnjem stupcu. Njegov 22. upit je tada broj 59: ako je odgovor „točno", gotov je, a ako je odgovor „toplo", treba mu još najviše jedan upit da sazna Anin broj. Ako je odgovor „hladno" i na ovaj upit, tada pita za broj 19 kao svoj 23. upit: ako Ana odgovori „točno", gotov je, a ako odgovori „toplo", sigurno zna da je Anin broj 29. Konačno, ako Ana odgovori s „hladno" i na ovaj upit, njegov posljednji 24. upit je broj 99 – ili je to Anin broj ili njegov susjed 89.

c) Predstavit ćemo strategiju s kojom Branko u 22 pokušaja određuje Anin broj. Prekrit ćemo našu tablicu dvoznamenkastih brojeva s 22 lika: 9 pluseva, 9 krnjih-pluseva, 2 linije i 2 točke (primijetimo da broj 50 ostane nepokriven):



Brankova strategija je sljedeća: prvo pita za brojeve u centrima pluseva; ako su svi odgovori „hladno”, tada prelazi na brojeve u središtima krnjih pluseva. Ako su odgovori i dalje „hladno”, pokušava s centrima linija, i na kraju s točkama. Ako je ostao na „hladno”, Anin broj je 50.

Ako Ana odgovori s „točno” u nekom koraku, Branko je u zadanom broju koraka odredio Anin broj.

Preostaje objasniti slučaj kada Ana odgovori s „toplo”. Ako je to nakon upita za središnji broj nekog plusa, tada Branko sužava izbor na 4 broja i korištenjem 3 dodatna upita može odrediti Anin broj. Konkretno, nakon što pita za 3 kandidata će ili dobiti jedan „točno” ili će zaključiti da je 4. broj onaj kojeg ja Ana zamislila. Kako je po strategiji zadnji plus na redu u 9. pitanju Branko ima još 3 dodatna pitanja na raspolaganju.

Analogno razmišljanje rješava i slučaj krnjih pluseva, gdje su Branku potrebna 2 dodatna pitanja nakon prvog „toplo” za određivanje Aninog broja. Kako je po strategiji zadnji krnji plus 18. po redu Branko također ima vremena. Konačno, ukoliko prvo „toplo” nastupi u 19. ili 20. pitanju, odnosno nakon upita za središte linija, Branko na analogan način jednim dodatnim pitanjem saznaje točan broj. Dakle, opisanom strategijom može u najviše 22 pitanja odrediti Anin broj.

Zadatak S-4.5. [50 bodova]

Neka je n prirodan broj i S_n zbroj prvih n prostih brojeva. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji prirodni broj a takav da je $S_n \leqslant a^2 \leqslant S_{n+1}$.

Rješenje.

Označimo s p_n n-ti prosti broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji prirodni broj N tako da između S_N i S_{N+1} ne postoji kvadrat prirodnog broja te neka je N najmanji takav prirodan broj. Očito je $N \geqslant 2$ jer između $S_1 = 2$ i $S_2 = 5$ imamo kvadrat $2^2 = 4$.

Nadalje, kako je $N \geqslant 2$ najmanji takav da između S_N i S_{N+1} ne postoji potpuni kvadrat slijedi da između S_{N-1} i S_N postoji kvadrat prirodnog broja. Neka je k najveći prirodan broj takav da je $S_{N-1} \leqslant k^2 \leqslant S_N$.

Budući da između S_N i S_{N+1} ne postoji potpuni kvadrat slijedi da je $(k+1)^2 > S_{N+1}$.

Imamo da je $2k+1 = (k+1)^2 - k^2 > S_{N+1} - S_N = p_{N+1} \geqslant p_N + 2$, odnosno $k > \dfrac{p_N+1}{2}$.

S druge strane za $N \geqslant 5$ vrijedi $k^2 \leqslant S_N = p_1 + p_2 + \ldots + p_N \leqslant 1 + 3 + 5 + \ldots + p_N = \dfrac{(p_N+1)^2}{4}$, tj.

$k \leqslant \dfrac{p_N+1}{2}$ što je kontradikcija s prijašnjom nejednakosti $k > \dfrac{p_N+1}{2}$.

Direktnom provjerom svih $N \leqslant 4$ vidimo da između S_N i S_{N+1} uvijek postoji potpuni kvadrat.

Dakle, prirodan broj N iz početne pretpostavke ne postoji. Time smo dokazali da između S_n i S_{n+1} postoji potpuni kvadrat za svaki prirodan broj n.

Zadatak S-4.6. [60 bodova]

Dan je šiljastokutan trokut ABC i unutar njega točka P. Pravac BP siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D, a pravac CP siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E. Pravci DE i AP sijeku se u točki F. Neka je K nožište okomice iz točke F na stranicu $\overline{BC}$. Dokaži da je pravac KF simetrala kuta $\sphericalangle DKE$.

Prvo rješenje.

Neka su A', D' i E' redom nožišta okomica iz A, D i E na BC te neka je točka T presjek pravaca AP i BC.

Označimo s $\lambda = \dfrac{|BE|}{|BA|}$ i $\mu = \dfrac{|CD|}{|CA|}$.

Iz sličnosti trokuta $BE'E$ i $BA'A$ slijedi da je $|EE'| = \lambda|AA'|$. Analogno je i $|DD'| = \mu|AA'|$. Prema tome imamo da je $\dfrac{|EE'|}{|DD'|} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Primjenom Menelajevog teorema na trokut ABC i pravac AP slijedi

$$\frac{|BT|}{|TC|} \cdot \frac{|CD|}{|DA|} \cdot \frac{|AE|}{|EB|} = 1,$$

iz čega dobijemo $\dfrac{|BT|}{|TC|} = \dfrac{1-\mu}{1-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda}{\mu}$.

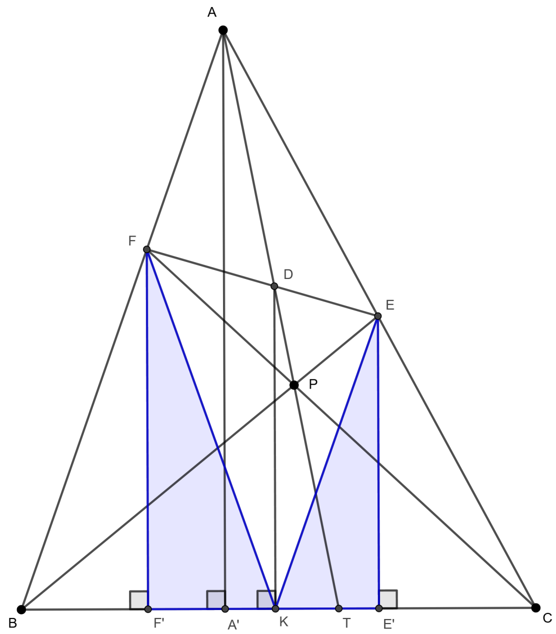
Primjenom Menelajevog teorema na trokut BCD i pravac AP dobijemo $\dfrac{|DP|}{|PB|} = (1-\lambda) \cdot \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Konačno, primjenom Menelajevog teorema na trokut BDE i pravac AP imamo $\dfrac{|EF|}{|FD|} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Budući da su E', K i D' nožišta okomica iz E, F i D na BC slijedi da je

$$\frac{|E'K|}{|KD'|} = \frac{|EF|}{|FD|} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Po teoremu SKS o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $E'KE$ i $D'KD$ slični. Time je $\measuredangle EKE' = \measuredangle D'KD$ iz čega slijedi da je KF simetrala kuta $\sphericalangle DKE$ što je i trebalo dokazati.



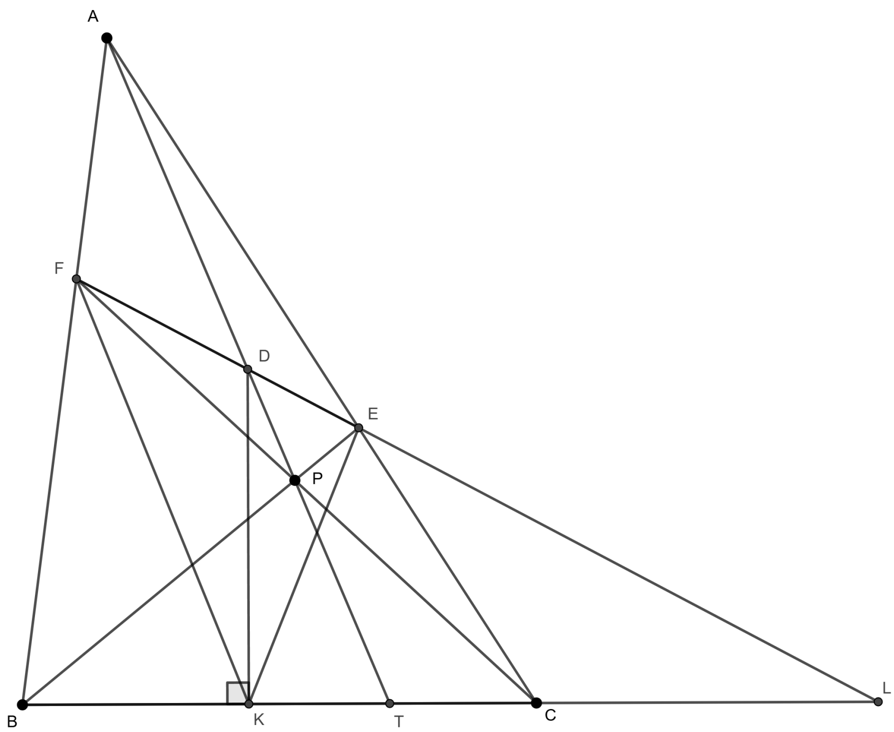
Drugo rješenje.

Označimo s L presjek pravaca DE i BC.

Prema *pencil lemi o dvoomjerima* zaključujemo da su tada točke D, E, F i L harmonijske.

Nadalje, kako je $\sphericalangle FKL = 90^\circ$ slijedi da se točka K nalazi na Apolonijevoj kružnici određenoj točkama D i E i omjerom $\dfrac{|DF|}{|EF|}$.

Zbog toga je $\dfrac{|KD|}{|KE|} = \dfrac{|DF|}{|EF|}$ iz čega slijedi da je KF simetrala kuta $\sphericalangle DKE$.



Zadatak S-4.7. [70 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje $p^n + 1$ dijeli $n^p + 1$.

Rješenje.

Tražimo parove (n, p) takve da vrijedi $p^n + 1 \mid n^p + 1$.

Ako je $p = 2$, slijedi $2^n + 1 \leqslant n^2 + 1$, odnosno $2^n \leqslant n^2$, a to vrijedi samo za $n = 2, 3, 4$. Lako se provjeri da su samo $(2, 2)$ i $(4, 2)$ rješenja.

Neka je $p \geqslant 3$ neparan. Tada je $p^n + 1$ paran pa i $n^p + 1$ mora biti paran. Dakle, n je neparan pa $(p + 1) \mid p^n + 1 \mid n^p + 1$.

Neka je $q \neq 2$ neki prosti djelitelj od $p+1$. Imamo $n^p \equiv -1 \pmod q$, odnosno $n^{2p} \equiv 1 \pmod q$. Slijedi da je $ord_q(n) \in \{1, 2, p, 2p\}$. Zbog $n^p \equiv -1 \pmod q$ slijedi da je $ord_q(n) \in 2, 2p$.

Ako bi bilo $ord_q(n) = 2p$, po malom Fermatovom teoremu bi vrijedilo $2p \mid q - 1$, pa je $2p \leqslant q - 1 \leqslant p$, što je kontradikcija.

Dakle, $ord_q(n) = 2$, pa je $n \equiv -1 \pmod q$, odnosno $q \mid n + 1$. Uočimo da je $v_q(n^p + 1) = v_q(n + 1) + v_q(p) = v_q(n + 1)$ po lemi o podizanju eksponenta i kako je $p \neq q$. Kako je $v_q(p + 1) \leqslant v_q(n^p + 1)$, slijedi $v_q(p + 1) \leqslant v_q(n + 1)$.

Uočimo da $2 \mid p + 1$. Uočimo da je $v_2(n^p + 1) = v_2((n + 1)(n^{p-1} - n^{p-2} + \ldots - n + 1)) = v_2(n + 1)$ jer je p neparan. Dakle, $v_2(p + 1) \leqslant v_2(p^n + 1) \leqslant v_2(n^p + 1) = v_2(n + 1)$.

Ukupno, imamo $p+1 \mid n+1$, odnosno $p \leqslant n$. Uočimo da je (p, p) rješenje, pa gledamo slučaj $n > p \geqslant 3$.

Neka je $a > b \geqslant 3$. Pokažimo da je tada $b^a > a^b$. Za $a = b + k$ želimo dokazati:

$b^{b+k} > (b + k)^b$, što je ekvivalentno s $b^k > (1 + \frac{k}{b})^b$, što je istina jer je $b \geqslant 3$, a izraz na desnoj strani rastom b raste prema $e^k < 3^k \leqslant b^k$.

Dakle, možemo zaključiti $p^n > n^p$, što je kontradikcija s početnim uvjetom. Zato su sva rješenja $(4, 2)$

i (p, p), gdje je p prost.