MEDO 2024./2025.

Četvrto kolo

8.2.2025.

Zadaci i rješenja

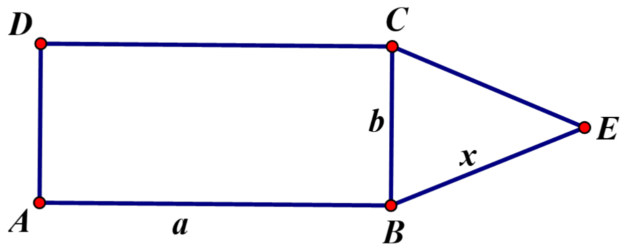
Juniori

Zadatak J-4.1. [10 bodova]

Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2.8 cm, a njegov je opseg 17.6 cm. Nad kraćom stranicom pravokutnika kao osnovicom nacrtan je jednakokračni trokut čiji je opseg jednak opsegu pravokutnika. Odredi duljinu krakova tog trokuta.

Rješenje.

Označimo dulju stranicu pravokutnika s a, kraću s b, a krakove docrtanog jednakokračnog trokuta s x. Po uvjetu zadatka je $a = b + 2.8$ cm.



Opseg pravokutnika računamo po formuli $o = 2a + 2b$. Uvrstimo sada izraz iz uvjeta zadatka da dobijemo

$$o = 2 \cdot (b + 2.8) + 2b.$$

Budući da znamo koliki je opseg pravokutnika, možemo računati:

$$\begin{aligned}
o &= 2 \cdot (b + 2.8) + 2b \\
17.6 &= 2 \cdot (b + 2.8 + b) \qquad / : 2 \\
8.8 &= 2b + 2.8 \\
6 &= 2b \qquad / : 2 \\
3 &= b
\end{aligned}$$

Dakle, duljina kraće stranice pravokutnika jednaka je 3 cm. Sada možemo izračunati i duljinu dulje stranice a pomoću uvjeta zadatka:

$$a = b + 2.8 \text{ cm} = 3 \text{ cm} + 2.8 \text{ cm} = 5.8 \text{ cm}.$$

Sada ćemo izračunati opseg jednakostraničnog trokuta. Osnovica trokuta je dugačka 3 cm, a krakovi x cm pa imamo

$$\begin{aligned}
o &= 3 + 2x \\
17.6 &= 3 + 2x \\
14.6 &= 2x \qquad / : 2 \\
7.3 &= x
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je krak trokuta duljine 7.3 cm.

Zadatak J-4.2. [20 bodova]

Dvanaest bi radnika izgradilo kuću za 28 dana. Nakon što je 4 dana radilo svih 12 radnika, trojica su dala otkaz i nisu više dolazila na posao. Nakon dodatnih 6 dana došla su 4 nova radnika koja su zajedno s preostalima završila posao. Za koliko će ukupno dana kuća biti izgrađena? Pretpostavljamo da svaki radnik svaki dan napravi jednaku količinu posla.

Rješenje.

Uočimo odmah da su broj radnika i broj dana potreban za obaviti neki dio posla obrnuto proporcionalne veličine; što je broj radnika veći, potreban broj dana je manji i obratno. Ako je dvanaestorici radnika potrebno 28 dana za izgradnju kuću, koliko je dana potrebno jednom radniku da sam izgradi takvu istu kuću? Broj radnika u tom je slučaju 12 puta manji, pa je broj potrebnih dana 12 puta veći, odnosno jednom radniku potrebno je $28 \cdot 12 = 336$ dana za obaviti posao (gradnja kuće). To znači da jedan radnik u jednom danu napravi $\frac{1}{336}$ dijela kuće.

Broj radnika i količina obavljenog posla su proporcionalne veličine pa tako ako jedan radnik u jednom danu obavi $\frac{1}{336}$ dijela posla, 12 radnika u jednom danu napravit će $12 \cdot \frac{1}{336} = \frac{1}{28}$ dio posla. Tih 12 radnika će onda u 4 dana napraviti $4 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{7}$ posla. Dakle, nakon što je 4 dana radilo 12 radnika, bit će napravljeno $\frac{1}{7}$ dijela posla.

Kako su trojica radnika prestala dolaziti na posao, sljedećih 6 dana na poslu je radilo 9 radnika pa računamo na isti način koliki dio posla su obavili u tom vremenu. Jedan radnik u jednom danu obavi $\frac{1}{336}$ dijela posla, 9 radnika u jednom danu stoga obavi $9 \cdot \frac{1}{336} = \frac{3}{112}$ dijela posla, a u 6 dana onda obave $6 \cdot \frac{3}{112} = \frac{9}{56}$ dijela posla.

Nakon prva 4 dana napravljeno je $\frac{1}{7}$ dijela posla, a nakon dodatnih 6 dana još $\frac{9}{56}$ pa je zato u prvih 10 dana obavljeno

$$\frac{1}{7} + \frac{9}{56} = \frac{8}{56} + \frac{9}{56} = \frac{17}{56}$$

dijela posla. Preostalo je $\frac{39}{56}$ dijela posla da bi kuća bila sazidana do kraja, a za to imamo još 4 nova radnika, odnosno ukupno 13 radnika. 13 radnika u jednom danu napravi $\frac{13}{336}$ dijela posla, pa rješavamo sljedeći problem:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{336} \cdot (\text{broj dana}) &= \frac{39}{56} \quad / \cdot 336 \\
13 \cdot (\text{broj dana}) &= 39 \cdot 6 \\
13 \cdot (\text{broj dana}) &= (13 \cdot 3) \cdot 6 \quad / : 13 \\
(\text{broj dana}) &= 18.
\end{aligned}$$

Dakle, da bi 13 radnika završilo preostali dio posla potrebno im je još 18 dana. Ukupan broj dana potrebnih za izgraditi cijelu kuću je zato

$$4 + 6 + 18 = 28.$$

Zadatak J-4.3. [30 bodova]

Odredi najveći i najmanji prirodni broj n tako da $\dfrac{20n - 25}{n - 2025}$ bude prirodan broj.

Prvo rješenje.

Razlomak iz zadatka napišimo u obliku razlomka koji samo u nazivniku ima varijablu n:

$$\begin{aligned}
\frac{20n-25}{n-2025} &= \frac{20n-20\cdot 2025+20\cdot 2025-25}{n-2025} \\
&= \frac{20(n-2025)+40500-25}{n-2025} \\
&= \frac{20\cancel{(n-2025)}}{\cancel{n-2025}}+\frac{40500-25}{n-2025} \\
&= 20+\frac{40475}{n-2025}.
\end{aligned}$$

Kako bi vrijednost dobivenog izraza bila prirodan broj, nazivnik $n-2025$ mora biti djelitelj brojnika. Zato promotrimo rastav brojnika na proste faktore

$$40475 = 5\cdot 5\cdot 1619.$$

Sada vidimo da $n-2025$ mora biti jedan od djelitelja broja 40475:

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 1619, \pm 8095, \pm 40475.$$

Najveći prirodni broj n koji zadovoljava uvjete zadatka je očito $n = 40475+2025 = 42500$.

Odredimo sada najmanji n. Kako je n prirodan (dakle pozitivan), najmanja moguća vrijednost od $n-2025$ koja dijeli 40475 je -1619. No, tada je početni razlomak jednak

$$\frac{20n-25}{n-2025} = 20+\frac{40475}{-1619} = 20+(-25) = -5,$$

što nije prirodan broj. Ako je pak nazivnik bilo koji od -25, -5, -1, razlomak će biti još manji, dakle i dalje negativan. Zaključujemo da $n-2025$ mora biti pozitivan djelitelj od 40475 kako bi cijeli razlomak bio prirodan broj. Najmanji n je zato $n = 1+2025 = 2026$.

Drugo rješenje.

Označimo

$$A = \frac{20n-25}{n-2025}.$$

Za $n=1$ razlomak A nije cijeli broj; za $2 \leq n \leq 2024$ je $A < 0$ jer je brojnik pozitivan, a nazivnik negativan, pa A pa ne može biti prirodan; za $n = 2025$ vrijednost razlomka nije definirana. Kako je za $n = 2026$ razlomak A prirodan broj, to je $n = 2026$ najmanji traženi prirodni broj.

Kao u prvom rješenju, zapišimo dani razlomak kao

$$A = \frac{20n-20\cdot 2025+20\cdot 2025-25}{n-2025} = 20+\frac{40475}{n-2025}.$$

Kako bi zadnji izraz bio prirodan broj, razlomak $\frac{40475}{n-2025}$ mora biti cijeli broj, tj. njegov nazivnik $n-2025$ mora dijeliti brojnik 40475. Jasno je da najveći n koji to zadovoljava iznosi $n = 40475+2025 = 42500$.

Zadatak J-4.4. [40 bodova]

Dvije žabe, Ana i Branka, naišle su na jezero na kojem se nalazi 2025 lopoča poredanih u niz. Odlučile su igrati sljedeću igru skakanja. Ana na početku igre stane na lopoč koji je na jednom kraju niza, a Branka na lopoč koji je na suprotnom kraju. Zatim naizmjenično skaču: prvo Ana, zatim Branka, i tako redom. Kada je na nju red, žaba skače sa trenutnog lopoča na jedan od susjednih lopoča na kojem već nije druga žaba. Žaba koja ne može izvesti skok na opisani način gubi igru.

Koja žaba ima pobjedničku strategiju?

Rješenje.

Ana ima pobjedničku strategiju. Pokažimo da Ana uvijek može skakati prema Branki sve dok ne stigne do predzadnjeg lopoča, nakon čega Branka više neće moći izvesti skok. Označimo s d broj lopoča između Ane i Branke u trenutku neposredno prije Aninog skoka. Promatrajmo kako se vrijednost od d mijenja nakon što obje žabe skoče. Ako skoče u istom smjeru d ostaje isti; ako skoče jedna prema drugoj d se smanji za 2; ako skoče jedna od druge d poraste za 2. U svakom slučaju d ostaje iste parnosti. Budući da je na početku igre $d = 2023$, broj lopoča između žaba prije Aninog skoka uvijek ostaje neparan. Dakle, situacija gdje Ana ne može skočiti prema Branki, odnosno gdje se Branka neposredno prije Aninog skoka nalazi na lopoču susjednom Aninom (dakle, $d = 0$), ne može nastupiti. Stoga, Ana može uvijek skakati prema Branki i osigurati svoju pobjedu.

Zadatak J-4.5. [50 bodova]

Odredi zadnjih šest znamenaka broja čiji kub završava sa 777 777.

Rješenje.

Neka je n prirodan broj čiji kub završava sa 777 777. Poznato je da na zadnju znamenku umnoška dva prirodna broja utječu samo zadnje znamenke brojeva koji se množe. Odredimo stoga najprije zadnju znamenku broja n, neka je to a. Dakle, zadnja znamenka broja n^3 će biti zadnja znamenka broja a^3; kako to mora biti znamenka 7, jedina mogućnost za a je 3 ($3^3 = 27$).

Promotrimo sada zadnje dvije znamenke kuba n^3. Na njih utječu jedino zadnje dvije znamenke broja n. Znamo da n završava na 3, pa nazovimo predzadnju znamenku (znamenku desetica) broja n s b. Sada možemo isprobavati sve mogućnosti za b, kubirati dobiveni dvoznamenkasti broj $\overline{b3}$ i vidjeti kada je završetak tog kuba jednak 77. No, možemo se poslužiti i algebarskim izrazima, kako slijedi.

Trebamo dakle kubirati broj $\overline{b3} = 10b + 3$. Učinimo to „po definiciji”, tj. množenjem broja $10b + 3$ tri puta samog sa sobom (prisjetimo se da zagrade množimo tako da svaki član jedne zagrade množimo sa svakim članom druge zagrade):

$$\begin{aligned}(10b+3)^3 &= (10b+3)\cdot(10b+3)\cdot(10b+3)\\ &= (100b^2+30b+30b+3^2)\cdot(10b+3) = (100b^2+60b+9)\cdot(10b+3)\\ &= 1000b^3+300b^2+600b^2+180b+90b+27 = 1000b^3+900b^2+270b+27.\end{aligned}$$

(Do ovog rezultata mogli smo doći direktno preko formule za *kub zbroja*: $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.) Vidimo da prva dva člana dobivenog zbroja ne utječu na zadnje dvije znamenke (jer će oni sigurno završavati sa dvije nule). Zadnje dvije znamenke određuju označeni brojevi, tj. zadnje dvije znamenke su određene vrijednošću izraza $70b + 27$. Vidimo da je zadnja znamenka ovog broja doista uvijek 7 te da nema „prijenosa” vrijednosti s mjesta jedinica na mjesto desetica, pa će predzadnja znamenka (znamenka desetica) biti upravo jednaka zadnjoj znamenci izraza $7b + 2$. Kako bi i ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $b = 5$.

Nastavljamo dalje istim postupkom. Na zadnje tri znamenke kuba utječu zadnje tri znamenke broja n. Zadnje dvije znamenke su 53; označimo znamenku stotica sa c. Ponovno računamo:

$$(100c+53)^3 = 100^3c^3+3\cdot100^2c^2\cdot53+3\cdot100c\cdot53^2+53^3 = 100^3c^3+159\cdot100^2c^2+842700c+148877.$$

Prva dva člana ponovno ne utječu na znamenku stotica. Znamenka stotica će biti zadnja znamenka izraza $7c + 8$. Kako i ova znamenka mora biti jednaka 7, slijedi da $7c$ mora završavati sa 9, što je jedino moguće za $c = 7$.

Označimo dalje znamenku tisućica broja n s d; znamo da je četveroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{d753} = 1000d + 753$. Kubiranjem ovog broja dobijemo:

$$\begin{aligned}(1000d+753)^3 &= 1000^3d^3+3\cdot1000^2d^2\cdot753+3\cdot1000d\cdot753^2+753^3\\ &= 1000^3d^3+2259\cdot1000^2d^2+1701027000d+426957777.\end{aligned}$$

Znamenka tisućica broja n^3 je stoga zadnja znamenka izraza $7d+7$. Kako bi ova znamenka bila jednaka 7, mora biti $d=0$.

Označimo sada znamenku desettisućica s e. Analognim računom dobijemo

$$\begin{aligned}(10000e+753)^3 &= 10000^3e^3 + 3\cdot 10000^2e^2\cdot 753 + 3\cdot 10000e\cdot 753^2 + 753^3\\ &= 10000^3e^3 + 2259\cdot 10000^2e^2 + 1701027 0000e + 426957777.\end{aligned}$$

Analognim zaključivanjem dobijemo da izraz $7e+5$ mora završavati na 7, iz čega slijedi $e=6$.

Konačno, odredimo i znamenku stotisućica f broja n. Ponovno kubiramo:

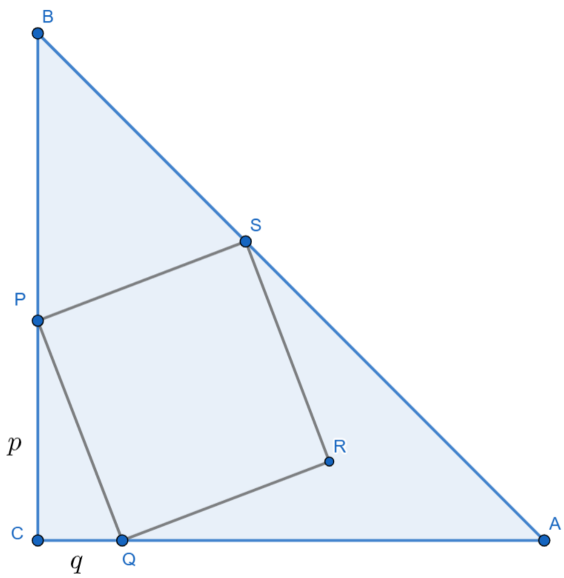
$$\begin{aligned}(100000f+60753)^3 &= 100000^3f^3 + 3\cdot 100000f^2\cdot 60753 + 3\cdot 100000f\cdot 60753^2 + 60753^3\\ &= 100000^3f^3 + 182259\cdot 100000f^2\cdot + 1107278102700000f + 224234888577777.\end{aligned}$$

Izraz $7f+5$ mora završavati sa 7, što je jedino moguće za $f=6$. Zaključujemo da je šesteroznamenkasti završetak broja n jednak $\overline{660753}$.

Zadatak J-4.6. [60 bodova]

U jednakokračni pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C upisan je kvadrat $PQRS$ tako da se točke P, Q i S nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka R je unutar trokuta. Odredi omjer $|CP|:|CQ|$ ako je poznato da površina kvadrata $PQRS$ iznosi $\frac{2}{5}$ površine trokuta ABC.

Rješenje.

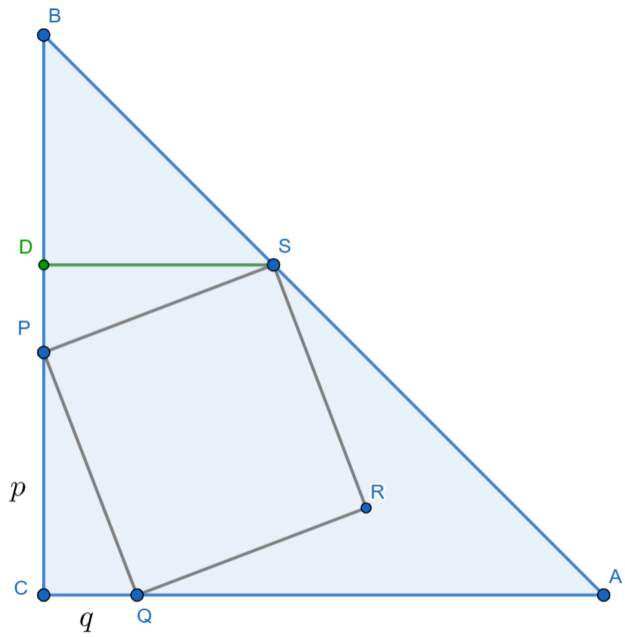


Označimo $|AC|=|BC|=a$, $|CP|=p$ i $|CQ|=q$. Po Pitagorinom poučku primjenjenom na pravokutni trokut QPC dobijemo da je duljina stranice kvadrata $PQRS$ jednaka $\sqrt{p^2+q^2}$. Stoga površina kvadrata $PQRS$ iznosi p^2+q^2. Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta ABC iznosi $\dfrac{a^2}{2}$, pa iz danog omjera površina kvadrata $PQRS$ i trokuta ABC dobijemo $\dfrac{p^2+q^2}{a^2}=\dfrac{1}{5}$.

Trebamo sada pronaći još jednu vezu između a, p i q. U tu svrhu, povucimo okomicu iz točke S na stranicu $\overline{BC}$ i označimo nožište sa D. Uočimo sada da su pravokutni trokuti CQP i DPS sukladni po SKS poučku. Doista, hipotenuze PQ i SP su im jednake duljine kao stranice istog kvadrata te vrijedi

$$\sphericalangle SPD = 180^\circ - 90^\circ - \sphericalangle CPQ = 90^\circ - \sphericalangle CPQ = \sphericalangle PQC.$$

Slijedi da je $|PD|=q$ i $|DS|=p$.



Trokut BDS je jednakokračan pravokutni, pa vrijedi i $|BD| = |DS| = q$. Sada po stranici $\overline{BC}$ vidimo da vrijedi $a = 2p + q$. Uvrstimo to u ranije dobivenu jednakost:

$$\begin{aligned}
\frac{p^2 + q^2}{(2p+q)^2} &= \frac{1}{5} \\
5(p^2 + q^2) &= (2p+q)^2 \\
5p^2 + 5q^2 &= 4p^2 + 4pq + q^2 \\
p^2 - 4pq + 4q^2 &= 0 \\
(p - 2q)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da mora biti $p - 2q = 0$, tj. $p : q = 2 : 1$.

Zadatak J-4.7. [70 bodova]

U raspravi o matematičkom problemu oko okruglog stola sjedi n osoba. Nakon ručka svi oni sjedaju oko istoga stola, ali ne nužno na istim mjestima.

Mora li postojati par osoba takav da između njih nakon ručka sjedi jednak broj osoba kao i prije ručka, ako je

a) $n = 7$?
b) $n = 8$?

Broj osoba koji sjedi između dvije osobe u krugu može se brojati u bilo kojem smjeru.

Rješenje.

Neka su pozicije osoba prije ručka u krugu redom $1, 2, \ldots, n-1, n$ (npr. 2 i n sjede pored 1). Primijetimo da je broj osoba koji sjedi između dvije osobe na pozicijama i i j za jedan manji od njihove „udaljenosti”, tj. razlike između brojeva i i j. Kako možemo brojati u dva smjera po krugu, udaljenost između osoba i i j ima dvije vrijednosti: $(i-j) \bmod n$ i $(j-i) \bmod n$, gdje s $x \bmod n$ označavamo nenegativni ostatak pri dijeljenju cijelog broja x sa n. Primijetimo da uvijek vrijedi $(i-j) \bmod n + (j-i) \bmod n = n$.

Označimo s $\pi(k)$ poziciju na kojoj osoba s pozicije k prije ručka sjedi nakon ručka. Sada će između osoba s pozicija i i j prije ručka sjediti jednak broj ljudi prije i nakon ručka ako i samo ako je neki od brojeva $(i-j) \bmod n$ i $(j-i) \bmod n$ jednak nekom od brojeva $(\pi(i)-\pi(j)) \bmod n$ i $(\pi(j)-\pi(i)) \bmod n$.

a) Ako je $n = 7$, možemo staviti da vrijedi $(\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5), \pi(6), \pi(7)) = (2, 4, 6, 1, 3, 5, 7)$. Tada imamo:

- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{1, 6\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{2, 5\}$
- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{2, 5\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{3, 4\}$
- za $(i - j) \bmod 7, (j - i) \bmod 7 \in \{3, 4\}$ je $(\pi(i) - \pi(j)) \bmod 7, (\pi(j) - \pi(i)) \bmod 7 \in \{1, 6\}$

Iz ovoga vidimo da smo za $n = 7$ našli raspored sjedenja nakon ručka za koji vrijedi da ne postoji par osoba takav da između njih nakon ručka sjedi jednak broj osoba kao i prije ručka.

b) Ako je $n = 8$, dokažimo da moraju postojati $i, j \in \{1, 2, ..., 8\}$, $i \neq j$, takvi da je $(\pi(i) - i) \bmod 8 = (\pi(j) - j) \bmod 8$. Iz toga će slijediti da vrijedi tražena tvrdnja za osobe koje prije ručka sjede na pozicijama i i j.

Pretpostavimo suprotno, tj. da takvi i i j ne postoje. To bi značilo da su svi brojevi $(\pi(1) - 1) \bmod 8$, $(\pi(2) - 2) \bmod 8$, $\ldots$, $(\pi(8) - 8) \bmod 8$ međusobno različiti. Tada za njihovu sumu vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{8} (\pi(i) - i) \bmod 8 = (0 + 1 + 2 + ... + 7) \bmod 8 = 28 \bmod 8 = 4.$$

No, s druge strane je

$$\sum_{i=1}^{8} (\pi(i) - i) \bmod 8 = (\sum_{i=1}^{8} \pi(i) - \sum_{i=1}^{8} i) \bmod 8 = 0,$$

što je kontradikcija.