Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 22. veljače 2025.

1. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a+b+c \geqslant 0$ i $ab+bc+ca \geqslant 0$, te neka su x, y, z realni brojevi takvi da je $x+y+z=0$. Dokaži:

$$ax^2+by^2+cz^2 \geqslant 0.$$

2. Stado ovaca čini b bijelih i c crnih ovaca. Neke ovce, nužno različitih boja, su neprijatelji. Svake dvije ovce koje imaju zajedničkog neprijatelja nazivamo prijateljima. Za svake dvije ovce x, y postoji prirodan broj k te niz ovaca $o_1, o_2, \ldots, o_k$ takav da je $x=o_1, y=o_k$ i ovce o_i, o_{i+1} su neprijatelji za $1 \leqslant i < k$.

Pretpostavimo da svaka ovca ima više neprijatelja nego prijatelja. Dokažite da vrijedi $b=c$ i da su svake dvije ovce različitih boja neprijatelji.

3. Dan je trapez $ABCD$ u kojem je BC paralelan s AD. Kružnica promjera $\overline{AB}$ ponovo siječe pravce AC i BD u točkama M i N redom, a kružnica promjera $\overline{CD}$ ponovo siječe pravce AC i BD u točkama K i L redom. Dokaži da je četverokut $KLMN$ trapez.

4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, q, n) takve da su p i q relativno prosti te vrijedi

$$p+q^2=(n^2+1)p^2+q.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i mladih Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 23. veljače 2025.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) + f(f(y)) + f(f(f(x))) = x + y.$$

2. Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Promotrimo sve moguće načine za poredati brojeve $1, 2, \ldots, n$ u niz. U nekom takvom poretku, za broj koji se ne nalazi na početku ni na kraju niza kažemo da je *breg* ako je veći od oba svoja susjeda.

Odredi prosječan broj bregova među svim poretcima.

3. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| < |AC|$. Neka su E i F redom točke na dužini $\overline{AC}$ i pravcu AB takve da je EF okomito na BC. Dokaži da su središte opisane kružnice trokuta ABC, polovišta dužina $\overline{BF}$ i $\overline{CE}$ te središte opisane kružnice trokuta AFE konciklične.

4. Neka je $d \geqslant 2$ prirodan broj. Definiran je niz $a_1, a_2, \ldots$ sa

$$a_1 = 1 \text{ i } a_{n+1} = a_n^d + 1 \text{ za svaki } n \geqslant 1.$$

Odredi sve parove prirodnih brojeva (p, q) takve da a_p dijeli a_q.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.