

## 6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 22. veljače 2025.

1. Neka su  $a, b, c$  realni brojevi takvi da je  $a + b + c \geq 0$  i  $ab + bc + ca \geq 0$ , te neka su  $x, y, z$  realni brojevi takvi da je  $x + y + z = 0$ . Dokaži:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \geq 0.$$

2. Stado ovaca čini  $b$  bijelih i  $c$  crnih ovaca. Neke ovce, nužno različitih boja, su neprijatelji. Svake dvije ovce koje imaju zajedničkog neprijatelja nazivamo prijateljima. Za svake dvije ovce  $x, y$  postoji prirodan broj  $k$  te niz ovaca  $o_1, o_2, \dots, o_k$  takav da je  $x = o_1, y = o_k$  i ovce  $o_i, o_{i+1}$  su neprijatelji za  $1 \leq i < k$ .

Pretpostavimo da svaka ovca ima više neprijatelja nego prijatelja. Dokažite da vrijedi  $b = c$  i da su svake dvije ovce različitih boja neprijatelji.

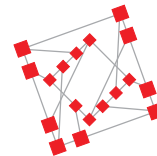
3. Dan je trapez  $ABCD$  u kojem je  $BC$  paralelan s  $AD$ . Kružnica promjera  $\overline{AB}$  ponovo siječe pravce  $AC$  i  $BD$  u točkama  $M$  i  $N$  redom, a kružnica promjera  $\overline{CD}$  ponovo siječe pravce  $AC$  i  $BD$  u točkama  $K$  i  $L$  redom. Dokaži da je četverokut  $KLMN$  trapez.
4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva  $(p, q, n)$  takve da su  $p$  i  $q$  relativno prosti te vrijedi

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q.$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.



## 6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 23. veljače 2025.

1. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za sve  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$f(x) + f(f(y)) + f(f(f(x))) = x + y.$$

2. Neka je  $n \geq 3$  prirodan broj. Promotrimo sve moguće načine za poredati brojeve  $1, 2, \dots, n$  u niz. U nekom takvom poretku, za broj koji se ne nalazi na početku ni na kraju niza kažemo da je *breg* ako je veći od oba svoja susjeda.

Odredi prosječan broj bregova među svim poretcima.

3. Neka je  $ABC$  šiljastokutan trokut takav da je  $|AB| < |AC|$ . Neka su  $E$  i  $F$  redom točke na dužini  $\overline{AC}$  i pravcu  $AB$  takve da je  $EF$  okomito na  $BC$ . Dokaži da su središte opisane kružnice trokuta  $ABC$ , polovišta dužina  $\overline{BF}$  i  $\overline{CE}$  te središte opisane kružnice trokuta  $AFE$  konciklične.

4. Neka je  $d \geq 2$  prirodan broj. Definiran je niz  $a_1, a_2, \dots$  sa

$$a_1 = 1 \text{ i } a_{n+1} = a_n^d + 1 \text{ za svaki } n \geq 1.$$

Odredi sve parove prirodnih brojeva  $(p, q)$  takve da  $a_p$  dijeli  $a_q$ .

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.