6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 22. veljače 2025.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a+b+c \geqslant 0$ i $ab+bc+ca \geqslant 0$, te neka su x, y, z realni brojevi takvi da je $x+y+z=0$. Dokaži:

$$ax^2+by^2+cz^2 \geqslant 0.$$

Rješenje.

Pokažimo prvo da su $a+b$, $b+c$, $c+a$ pozitivni. Pretpostavimo suprotno, recimo da je $a+b<0$. Tada je $c \geqslant -(a+b)>0$ pa imamo $-(a+b)c \geqslant (a+b)^2$ što daje

$$0 \geqslant a^2+ab+b^2+ab+bc+ca \geqslant \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4} \geqslant 0,$$

odnosno $a=b=0$, a to je kontradikcija sa $a+b<0$.

Ako je neki od brojeva $a+b$, $b+c$, $c+a$ jednak nuli, recimo $a+b=0$, tada je $ab+bc+ca=-a^2 \geqslant 0$ pa je $a=b=0$ i nejednakost koju trebamo dokazati je $cz^2 \geqslant 0$ za $c \geqslant 0$, što je očito. U suprotnom, imamo da su svi brojevi $a+b$, $b+c$, $c+a$ veći od 0.

Sada promotrimo x, y, z. Ako su neka dva od njih 0, i treći je 0 i tvrdnja vrijedi, pa možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da je $xy \neq 0$. Podijelimo li nejednakost sa y^2, dobivamo da treba dokazati

$$a \cdot \frac{x^2}{y^2}+b+c \cdot \frac{(x+y)^2}{y^2}=a \cdot \frac{x^2}{y^2}+b+c\left(1+\frac{x}{y}\right)^2 \geqslant 0$$

te sređivanjem uz $t=\frac{x}{y}$ zaključujemo da treba dokazati

$$(a+c)t^2+2ct+(b+c) \geqslant 0.$$

Funkcija $f(t)=(a+c)t^2+2ct+(b+c)$ je kvadratna s pozitivnim vodećim članom, kojoj možemo izračunati diskriminantu

$$D=4c^2-4(a+c)(b+c)=-4(ab+bc+ca) \leqslant 0.$$

Vrijedi $f(t) \geqslant 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$, pa tako i za x/y.

Zadatak 2.

Stado ovaca čini b bijelih i c crnih ovaca. Neke ovce, nužno različitih boja, su neprijatelji. Svake dvije ovce koje imaju zajedničkog neprijatelja nazivamo prijateljima. Za svake dvije ovce x, y postoji prirodan broj k te niz ovaca $o_1, o_2, \ldots, o_k$ takav da je $x=o_1, y=o_k$ i ovce o_i, o_{i+1} su neprijatelji za $1 \leqslant i<k$.

Pretpostavimo da svaka ovca ima više neprijatelja nego prijatelja. Dokažite da vrijedi $b=c$ i da su svake dvije ovce različitih boja neprijatelji.

Rješenje.

Označimo sa $n(x)$ broj neprijatelja, a sa $p(x)$ broj prijatelja ovce x.

Promotrimo ovcu x koja ima najmanje neprijatelja. Neka je ovca y jedna od njenih neprijatelja. Kako je svaki neprijatelj ovce y (osim x) prijatelj ovce x, vrijedi $n(y) - 1 \leqslant p(x)$.

Međutim, imamo $n(y)-1 \geqslant n(x)-1$ zbog definicije x, a iz uvjeta zadatka vrijedi $p(x) \leqslant n(x)-1$, pa zaključujemo $n(x) = n(y)$. Budući da za svake dvije ovce postoji niz neprijatelja koji ih povezuje, postoji prirodan broj n takav da je $n(o) = n$ za svaku ovcu o. Ukupan broj parova ovaca koje su neprijatelji možemo izraziti na dva načina: ako promotrimo bijele ovce, taj broj iznosi cn, a ako promotrimo crne ovce, taj broj iznosi bn. Stoga vrijedi $c = b$.

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ svi neprijatelji ovce $x = x_1$, te neka su $x_2, \ldots, x_n$ prijatelji ovce x. Za svaki $i = 1, \ldots, n$, neprijatelji ovce y_i su ili x ili neki od prijatelja ovce x, pa kako ih ima n, zaključujemo da su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neprijatelji svakoj ovci $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Kako za svake dvije ovce postoji niz neprijatelja koji ih povezuje, zaključujemo da se stado sastoji od ovaca $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, te slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 3.

Dan je trapez $ABCD$ u kojem je BC paralelan s AD. Kružnica promjera $\overline{AB}$ ponovo siječe pravce AC i BD u točkama M i N redom, a kružnica promjera $\overline{CD}$ ponovo siječe pravce AC i BD u točkama K i L redom. Dokaži da je četverokut $KLMN$ trapez.

Rješenje.

Primijetimo da je $\sphericalangle BMC = 180° - \sphericalangle BMA = 90°$ i analogno $\sphericalangle BLC = 90°$, pa je $BMLC$ tetivan. Analogno, $ANKD$ je tetivan četverokut.

Prema tome, možemo računati

$$\sphericalangle MLN = \sphericalangle MLB = \sphericalangle MCB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle KAD = \sphericalangle KNL,$$

pa su pravci ML i KN paralelni, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, q, n) takve da su p i q relativno prosti te vrijedi

$$p + q^2 = (n^2 + 1)p^2 + q.$$

Prvo rješenje.

Tvrdimo da su sva rješenja oblika $(n + 1, n^2 + n + 1, n)$ gdje je n proizvoljan prirodan broj. Lako je vidjeti da sve trojke ovog oblika jesu rješenje.

Početna jednadžba ekvivalentna je sa

$$q(q - 1) = (pn^2 + p - 1)p$$

a kako su p, q relativno prosti, vrijedi $p \mid q - 1$ pa možemo uzeti $q = kp + 1$.

Uvrštavanjem dobivamo $k^2p + k = pn^2 + p - 1$, odnosno preuređenjem

$$k + 1 = p(n^2 - k^2 + 1).$$

Budući da je desna strana pozitivna, vrijedi $k \leqslant n$. Ako je $k < n$, dobivamo

$$k + 1 \geqslant n^2 - (n-1)^2 + 1 > n,$$

što je kontradikcija. Prema tome, vrijedi $k = n$ i $q = np+1$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $(n+1)p = p^2$, pa imamo $p = n+1$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Kao u prethodnom rješenju, dobijemo $k + 1 = p(n^2 - k^2 + 1)$ uz $q = kp + 1$. Sada vidimo da $p \mid k+1$ pa imamo $k = \ell p - 1$ i jednadžba se svodi na

$$n^2 = (\ell p)^2 - 2\ell p + \ell.$$

Ako je $\ell > 1$, vrijedi

$$(\ell p - 1)^2 < (\ell p)^2 - 2\ell p + \ell < (\ell p)^2$$

što je kontradikcija, pa vrijedi $\ell = 1$, to jest $k = p - 1$. Slijedi $1 = n^2 - (p-1)^2 + 1$ i $n = p - 1$, te dovršavamo kao u prvom rješenju.

6. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 23. veljače 2025.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) + f(f(y)) + f(f(f(x))) = x + y.$$

Rješenje.

Takva funkcija ne postoji.

Uvrstimo $x = 0$. Ako sada označimo $C = -f(0) - f(f(f(0)))$, za svaki $y \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(f(y)) = y + C$. Uvrstimo li to u početnu jednadžbu, imamo da je

$$f(x) + (y + C) + (f(x) + C) = x + y$$

pa vrijedi $2f(x) = x - 2C$, to jest, $f(x) = \frac{x}{2} - C$.

Međutim, sada je $y + C = f(f(y)) = f\left(\frac{y}{2} - C\right) = \frac{y}{4} + \frac{C}{2}$ za svaki y, kontradikcija.

Zadatak 2.

Neka je $n \geqslant 3$ prirodan broj. Promotrimo sve moguće načine za poredati brojeve $1, 2, \ldots, n$ u niz. U nekom takvom poretku, za broj koji se ne nalazi na početku ni na kraju niza kažemo da je *breg* ako je veći od oba svoja susjeda.

Odredi prosječan broj bregova među svim poretcima.

Rješenje.

Ukupno ima $n!$ različitih načina za poredati brojeve $1, \ldots, n$, pa je prosječan broj bregova jednak ukupnom broju bregova u svim poredcima podijeljenom s $n!$.

Prebrojimo u koliko poredaka se breg nalazi na i-tom mjestu, za $i = 2, 3, \ldots, n-1$.

Na $\binom{n}{3}$ načina biramo tri broja koji će se nalaziti na pozicijama $i-1, i, i+1$. Tada je najveći od tri izabrana broja na poziciji i, te na 2 načina možemo izabrati koji od preostala dva izabrana broja ide na poziciju $i-1$, a koji na poziciju $i+1$. Konačno, na $(n-3)!$ načina poredamo ostatak brojeva.

Ukupno onda poredaka koje na i-tom mjestu imaju breg ima $n_i = \binom{n}{3} \cdot 2 \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3}$.

Ukupan broj bregova u svim poredcima je jednak zbroju brojeva n_i za $i = 2, 3, \ldots, n-1$, što je $(n-2) \cdot \frac{n!}{3}$, pa je prosječan broj bregova $\frac{n-2}{3}$.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AB| < |AC|$. Neka su E i F redom točke na dužini $\overline{AC}$ i pravcu AB takve da je EF okomito na BC. Dokaži da su središte opisane kružnice trokuta ABC, polovišta dužina $\overline{BF}$ i $\overline{CE}$ te središte opisane kružnice trokuta AFE konciklične.

Rješenje.

Neka je P polovište od BF i Q polovište od CE.

Neka je G drugo sjecište kružnica opisanih trokutima ABC i AEF, te neka su O i S središta tih kružnica. Tada je $\sphericalangle AGE = \sphericalangle AFE$ i $\sphericalangle AGC = 180° - \sphericalangle ABC$, pa vrijedi

$$\sphericalangle EGC = \sphericalangle AGC - \sphericalangle AGE = 180° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle AFE = 90°.$$

Stoga je Q središte opisane kružnice od EGC. Iz toga zaključujemo da je QS okomito na EG, te je QO okomito na OQ. Budući da su EG i CG okomiti pravci, slijedi da je $\sphericalangle OQS = 90°$.

Analogno se pokazuje da je $\sphericalangle OPS = 90°$, pa O, P, Q, S leže na kružnici promjera $\overline{OS}$.

Zadatak 4.

Neka je $d \geqslant 2$ prirodan broj. Definiran je niz $a_1, a_2, \ldots$ sa

$$a_1 = 1 \text{ i } a_{n+1} = a_n^d + 1 \text{ za svaki } n \geqslant 1.$$

Odredi sve parove prirodnih brojeva (p, q) takve da a_p dijeli a_q.

Rješenje.

Odgovor je svi parovi (p, q) takvi da p dijeli q.

Dokazat ćemo da za sve prirodne brojeve p i k vrijedi

$$a_{k+p} \equiv a_k \pmod{a_p}.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Za $k = 1$ imamo

$$a_1 \equiv 1 \equiv a_p^d + 1 \equiv a_{p+1} \pmod{a_p}.$$

Pretpostavimo da za neki k vrijedi

$$a_{k+p} \equiv a_k \pmod{a_p}.$$

Tada je i $a_{k+p}^d + 1 \equiv a_k^d + 1 \pmod{a_p}$, odnosno

$$a_{k+p+1} \equiv a_{k+1} \pmod{a_p},$$

pa tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Kako su $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ manji od a_p pa nisu djeljivi s a_p, te je a_p očito djeljiv s a_p, iz tvrdnje slijedi da je a_q djeljiv s a_p ako i samo ako je q djeljiv s p.