MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-3.1. [10 bodova]

Opseg pravokutnog trokuta iznosi 101, a zbroj kvadrata duljina njegovih stranica iznosi 4050. Kolika je površina tog trokuta?

Rješenje.

Označimo duljine stranica pravokutnog trokuta standardno s a, b i c, gdje je c duljina hipotenuze. Po uvjetima zadatka znamo da vrijedi $O = a + b + c = 101$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 4050$. U pravokutnom trokutu vrijedi slavni Pitagorin poučak $c^2 = a^2 + b^2$. Uvrštavanjem ovoga u drugu jednakost dobijemo $2c^2 = 4050$, pa $c^2 = 2025$, iz čega slijedi $c = 45$.

Sada dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a + b = 56 \\ a^2 + b^2 = 2025. \end{cases}$$

Sustav je moguće riješiti izražavanjem jedne varijable preko druge iz prve jednadžbe i uvrštavanjem u drugu, nakon čega dobijemo kvadratnu jednadžbu koju riješimo metodom svođenjema na kvadrat (ili direktno koristeći formulu). No, u zadatku se traži da odredimo površinu trokuta, a znamo da je ona jednaka $P = \dfrac{ab}{2}$. Dakle, dovoljno je odrediti vrijednost umnoška ab.

Kvadrirajmo prvu jednakost. Dobijemo

$$\begin{gathered} (a + b)^2 = 56^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 = 3136. \end{gathered}$$

Sada umjesto $a^2 + b^2$ uvrstimo 2025 i direktno dobijemo

$$\begin{gathered} 2025 + 2ab = 3136 \\ 2ab = 1111 \\ ab = \frac{1111}{2}. \end{gathered}$$

Tražena površina trokuta je dakle jednaka $P = \dfrac{1111}{4}$.

Zadatak S-3.2. [20 bodova]

Neka je m prirodan broj. Za prirodan broj n kažemo da je m-*složen* ako se može zapisati kao umnožak točno m prirodnih brojeva većih od 1 (ne nužno različitih). Dokaži da je broj

$$(2025^4 - 1^4)(2025^4 - 2^4) \cdots (2025^4 - 2024^4)$$

(a) 6000-složen;

(b) 10000-složen.

Rješenje.

(a) Zadatak nam je rastaviti dani broj na umnožak od 6000 faktora većih od 1. Broj se već sastoji od 2024 faktora oblika $a^4 - b^4$. Svaki taj faktor možemo dalje rastaviti pomoću jednakosti

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Ovim postupkom ćemo dani broj raspisati kao umnožak

$$\begin{aligned} &2024 \cdot 2026 \cdot (2025^2 + 1^2) \cdot 2023 \cdot 2027 \cdot (2025^2 + 2^2) \cdots 1 \cdot 4049 \cdot (2025^2 + 2024^2) \\ &= 2 \cdot 3 \cdots 2023 \cdot 2024 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdots 4048 \cdot 4049 \cdot (2025^2 + 1^2) \cdot (2025^2 + 2^2) \cdots (2025^2 + 2024^2), \end{aligned}$$

koji se sastoji od $2024 \cdot 3 - 1 = 6071$ prirodna broja veća od 1, što dokazuje da je dani broj 6000-složen („višak” faktora možemo grupirati u jedan faktor).

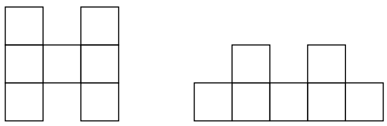
(b) Kako bismo došli do 10000 faktora, osim algebarskih manipulacija moramo razmatrati i aritmetička svojstva faktora. Promotrimo prvo parnost dobivenih faktora. Vidimo da je među njima $1012 \cdot 3 = 3036$ parnih faktora. Svaki od njih osim faktora 2 rastavimo na $2 \cdot k$, gdje je $k \geq 1$, čime dobivamo 3035 novih faktora.

Slično, svaki treći faktor među prvim faktorima $2, 3, \ldots 2023, 2024, 2026, 2027 \ldots 4048, 4049$ je djeljiv s 3, pa možemo izlučiti faktor 3 iz njih. Isključit ćemo 3 i 6, jer njihove faktore smo već prebrojali, a u umnošku nedostaje broj 2025 koji je djeljiv s 3. To daje $1349 - 3 = 1346$ novih faktora.

Konačno, dokazali smo da dani broj može zapisati kao umnožak od $6071 + 3035 + 1346 = 10452$ prirodnih brojeva većih od 1. Time je dokazano da je dani broj i 10000-složen.

Zadatak S-3.3. [30 bodova]

Na raspolaganju imamo neograničeni broj pločica sa slike. Je li moguće potpuno prekriti (bez preklapanja) ploču dimenzija 777×777 koristeći ove pločice? Dozvoljene su rotacije pločica.

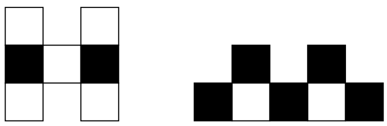


Rješenje.

Dokazat ćemo da nije moguće postići traženo popločavanje. Koristimo metodu *bojanja*, koja se često koristi u zadacima s popločavanjima. Postoje razni načini bojanja ploče i zadatak se često lagano riješi pravim odabirom broja boja i njihovim rasporedom na ploči.

Obojimo sva polja naše ploče u crno i bijelo „šahovski”, tj. tako da susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) uvijek budu obojana u različite boje.

Promotrimo sada polja koja prekrivaju dane pločice. Primjećujemo da kamo god na ploču stavimo bilo koju od ovih pločica, uvijek vrijedi da je broj polja jedne boje koje ona prekrije jednak 5, a broj prekrivenh polja druge boje jednak 2. Stoga je razlika broja prekrivenih polja jedne i druge boje jednaka 3.



Kako to vrijedi za svaku postavljenu pločicu, za sva polja koje prekrivaju pločice postavljene na bilo koji dozvoljeni način vrijedi da je ukupna razlika broja polja jedne i druge boje djeljiva s 3. Doista, ta razlika je na početku 0 (dok nije postavljena niti jedna pločica), a dodavanjem svake nove pločice se promijeni za 3 ili -3.

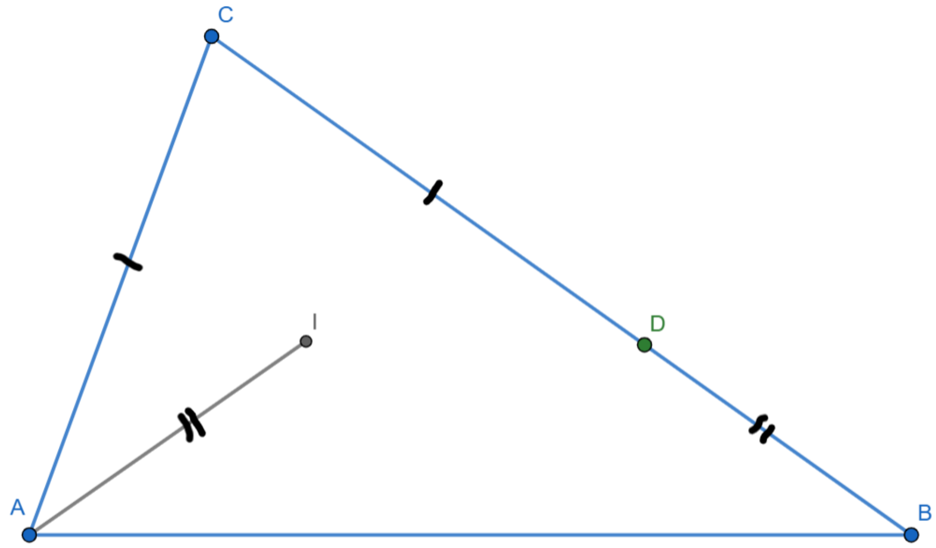
Pogledajmo sada našu cijelu ploču. Ona ima neparan broj polja te za 1 više polja jedne boje od polja druge boje. Dakle, ukupna razlika u broju polja jedne i druge boje nije djeljiva s 3. Zaključujemo da nije moguće prekriti ploču s danim pločicama.

Zadatak S-3.4. [40 bodova]

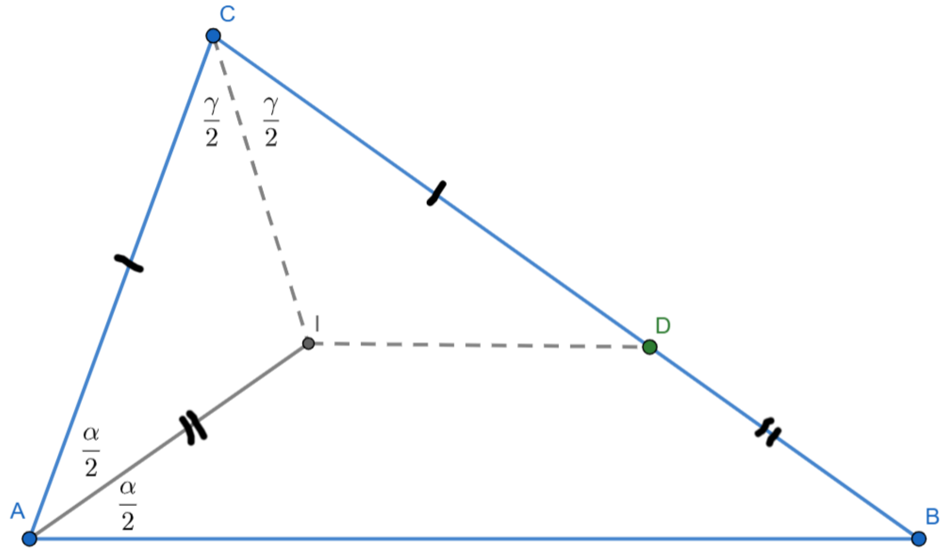
Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Rješenje.

Iskoristit ćemo zadani uvjet tako da uvedemo točku D na stranici $\overline{BC}$ za koju vrijedi $|AC| = |CD|$ i $|AI| = |DB|$.



Docrtajmo sada dužine $\overline{CI}$ i $\overline{DI}$ i označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Znamo da su pravci AI i CI simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ redom.



Vidimo da su trokuti AIC i DCI sukladni po SKS poučku ($|AC| = |CD|$, zajednička stranica $\overline{CI}$ i jednaki kutovi $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICD = \frac{\gamma}{2}$). To znači da vrijedi $|AI| = |ID|$ te $\sphericalangle IAC = \sphericalangle CDI = \dfrac{\alpha}{2}$.

Promotrimo sada četverokut $ABDI$. Možemo zaključiti da je on tetivan, jer vrijedi $\sphericalangle BAI + \sphericalangle IDB = \dfrac{\alpha}{2} + (180° - \dfrac{\alpha}{2}) = 180°$. Sada preostaje uočiti da su trokuti ABD i BAI sukladni po KSK poučku: stranica $\overline{AB}$ im je zajednička te su im parovi kutova $\sphericalangle IAB$ i $\sphericalangle DAB$ te $\sphericalangle ADB$ i AIB jednaki kao obodni kutevi nad tetivama iste kružnice jednake duljine. Iz toga slijedi traženo $\sphericalangle CBA = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sphericalangle BAC}{2}$.

Zadatak S-3.5. [50 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.

Rješenje.

Označimo prvo kolo s K_1 i promotrimo 5 natjecatelja koji su dobili čokoladu (tj. bili nagrađeni) na tom kolu. Na svakom od preostalih 21 kola netko od tih 5 natjecatelja je ponovno bio nagrađen, jer svaka dva kola imaju jednog zajedničkog nagrađenog natjecatelja. Prema *Dirichletovom principu* zaključujemo da postoji natjecatelj među 5 nagrađenih na prvom kolu koji je bio nagrađen još na barem 5 kola među preostalima. Doista, u suprotnom bismo imali da je svaki učenik među 5 nagrađenih na prvom kolu bio nagrađen na najviše 4 preostala kola, no onda bi ukupno imali najviše $5 \cdot 4 = 20$ nagrađenih učenika na preostalim kolima, ali to je manje nego što ima preostalih kola.

Označimo tih pet kola s K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 te natjecatelja koji je nagrađen na svima njima s a. Dakle, za sada znamo da je učenik a jedini učenik koji je nagrađen na svakom od kola K_1, K_2, …, K_6. Dodatno, a je jedini nagrađeni natjecatelj koji je zajednički među nagrađenim natjecateljima na bilo koja dva kola iz K_1, K_2, …, K_6.

Neka je sada L bilo koje kolo različito od K_1, K_2, …, K_6. L mora imati zajedničkog nagrađenog natjecatelja sa svakim od kola K_1, K_2, …, K_6. Kako je točno 5 učenika nagrađeno na kolu L, po Dirichletovom principu sada zaključujemo da je neki od učenika nagrađenih na kolu L nagrađen na dva kola među kolima K_1, K_2, …, K_6. No, tada je taj učenik nagrađen na neka dva kola iz K_1, K_2, …, K_6, pa po tvrdnji s kraja prethodnog odlomka zaključujemo da taj učenik mora biti a.

Dakle, učenik a dobio je čokoladu i na kolu L. Kako je kolo L bilo odabrano proizvoljno, zaključujemo da za sva preostala kola vrijedi isti zaključak. Time je dokazano da je učenik a nagrađen čokoladom na svakom kolu natjecanja.

Zadatak S-3.6. [60 bodova]

Za funkciju $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ kažemo da je *pseudopolinom* ako za svaka dva različita $a, b \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $a - b \mid f(a) - f(b)$. Odredi sve pseudopolinome f takve da za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $\{0, 1, 2, \ldots, n\} = \{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$.

Rješenje.

Nije teško vidjeti da svaki pseudopolinom f koji zadovoljava dano svojstvo mora biti bijekcija. Surjekcija je jer za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ postoji neki n veći od njega za koji vrijedi dano svojstvo pa je $m = f(k)$ za neki $k \leqslant n$, tj. m je u slici funkcije f. Injekcija je jer bi u suprotnom za dovoljno velike n-ove skupovi $\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ imali manje od n elemenata.

Označimo $d = f(0)$ i odredimo ovu vrijednost. Uzmimo $N > d$ za koji vrijedi dano svojstvo. Tada vrijedi $f(N) \leqslant N$. S druge strane, iz definicije pseudopolinoma, imamo da vrijedi $N - 0 \mid f(N) - d$. Kako je f injekcija, ne može biti $f(N) = d$, pa mora biti $f(N) - d \geqslant N$ ili $f(N) - d \leqslant -N$. U drugom slučaju bi $f(N)$ morao biti negativan, zbog početnog izbora od N, što nije moguće. Onda mora vrijediti $f(N) - d \geqslant N$, a kako znamo $f(N) \leqslant N$ i svi ovi brojevi su nenegativni, iz ovoga slijedi da vrijedi $f(N) = N$ i $d = 0$.

Sada za sve prirodne brojeve n vrijedi $n - 0 \mid f(n) - 0$, iz čega slijedi $f(n) \geqslant n$. Dokažimo da uvijek mora vrijediti $f(n) = n$. Pretpostavimo suprotno; neka je n_0 najmanji prirodni broj takav da vrijedi $f(n_0) > n_0$. Tada za n manje od n_0 vrijedi $f(n) = n < n_0$, a za n veće od n_0 vrijedi $f(n) \geqslant n > n_0$, pa vidimo da n_0 nije u slici funkcije f, što je kontradikcija s njenom surjektivnošću. Ovime je dokazano da je identiteta jedini pseudopolinom koji zadovoljava dano svojstvo.

Zadatak S-3.7. [70 bodova]

Zadan je prirodan broj d. Definiramo niz prirodnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoji prirodan broj N takav da je niz $(a_n)_{n\geqslant N}$ aritmetički niz.

Prvo rješenje.

Pokazat ćemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postaje aritmetički za $n \geqslant d + 1$.

Korištenjem nejednakosti $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ slijedi da je $a_{n+1} \leqslant a_n + d$. Induktivnim korištenjem posljednje nejednakosti dobivamo $a_{n+1} \leqslant nd + a_1 \leqslant (n + 1)d$.

Dakle, $a_n \leqslant nd$ za svaki prirodan broj n.

Neka je $q = \left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor$. Indukcijom ćemo dokazati da je $a_n = (n - 1)q + d$ za sve $n \geqslant d + 1$.

Za $n = d + 1$ imamo da je $a_{d+1} = d\left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor + d = dq + d$.

Pretpostavimo da je $a_n = (n - 1)q + d$ za neki $n \geqslant d + 1$ i dokažimo da je $a_{n+1} = nq + d$.

Imamo da je

$$a_{n+1} = n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d = n\left\lfloor \frac{(n-1)q + d}{n} \right\rfloor + d = nq + d + \left\lfloor \frac{d-q}{n} \right\rfloor.$$

Uočimo da je $q = \left\lfloor \frac{a_d}{d} \right\rfloor \leqslant d$ jer je $a_d \leqslant d^2$. Stoga za $n \geqslant d + 1$ vrijedi da je $0 \leqslant \frac{d-q}{n} < 1$, odnosno $\left\lfloor \frac{d-q}{n} \right\rfloor = 0$. Time konačno dobivamo $a_{n+1} = nq + d$, čime je indukcija završena.

Drugo rješenje.

Analogno kao u prvom rješenju dobijemo $a_n \leqslant nd$ za svaki prirodan broj n.

Uvedimo novi niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran s $b_n = \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor$ za svaki prirodan broj n. Iz relacije $a_{n+1} = n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + d$ slijedi da je

$$b_{n+1} = \left\lfloor \frac{nb_n + d}{n+1} \right\rfloor = b_n + \left\lfloor \frac{d - b_n}{n+1} \right\rfloor.$$

Nadalje, uočimo da je $b_n \leqslant d$ jer imamo $a_n \leqslant nd$ pa slično kao u prethodnom rješenju zaključujemo da je $\left\lfloor \frac{d-b_n}{n+1} \right\rfloor = 0$ za $n \geqslant d$.

Prema tome imamo da je $b_{n+1} = b_n$ za sve $n \geqslant d$, odnosno da je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstantan za $n \geqslant d$. Označimo tu konstantu s C. Tada je $a_{n+1} = nb_n + d = nC + d$ za sve $n \geqslant d$ što čini traženi aritmetički niz.