MEDO 2024./2025.

Treće kolo

4.1.2025.

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-3.1. [10 bodova]

Odredi najmanji prirodan broj n takav da je umnožak prvih n prirodnih brojeva višekratnik broja 2025.

Prvo rješenje.

Zadatak se može riješiti direktnim računanjem umnožaka prvih nekoliko brojeva i određivanjem prvog umnoška koji je višekratnik broja 2025. Radi lakšeg zapisivanja, umnožak prvih n prirodnih brojeva označava se $n!$ i čita se *n-faktorijela*. Računamo:

$$
\begin{gathered}
1! = 1 \\
2! = 1 \cdot 2 = 2 \\
3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\
4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\
5! = 4! \cdot 5 = 120 \\
6! = 5! \cdot 6 = 720 \\
7! = 6! \cdot 7 = 5040 \\
8! = 7! \cdot 8 = 40320 \\
9! = 8! \cdot 9 = 362880 \\
10! = 9! \cdot 10 = 3628800.
\end{gathered}
$$

Dijeljenjem vidimo da je tek zadnji umnožak djeljiv s 2025, što znači da je 10 najmanji traženi broj prirodnih brojeva.

Drugo rješenje.

Efikasnija metoda je promatranje prostih faktora koji se pojavljuju u umnošku. Naime, ako želimo da je naš umnožak višekratnik od 2025, to znači da on mora sadržavati sve proste faktore od 2025 i to najmanje onoliko puta koliko se pojavljuju u rastavu broja 2025 na proste faktore.

Rastavimo stoga najprije broj 2025 na proste faktore. Vrijedi $2025 = 45^2$, pa lako dobijemo

$$2025 = 45^2 = (5 \cdot 9)^2 = 5^2 \cdot 9^2 = 5^2 \cdot (3^2)^2 = 5^2 \cdot 3^4.$$

Dakle, naš umnožak mora sadržavati dva faktora 5 i četiri faktora 3. Najmanji prirodni brojevi djeljivi s 5 su 5 i 10, pa zaključujemo da ćemo sigurno morati pomnožiti najmanje prvih 10 prirodnih brojeva.

Ostaje vidjeti što je s faktorom 3. Kako sigurno množimo prvih 10 prirodnih brojeva, u umnošku ćemo imati i brojeve 3, 6 i $9 = 3 \cdot 3$. Njihovim množenjem dobijemo 4 faktora 3, koliko nam je i potrebno. Dakle, množenjem prvih 10 prirodnih brojeva dobijamo višekratnik broja 2025.

Zadatak J-3.2. [20 bodova]

Na stolu su dvije čaše u kojima se nalazi sok od naranče. U prvoj čaši nalazi se pet puta manje soka nego u drugoj čaši. U prvoj čaši udio voća u soku iznosi 85%, dok u drugoj čaši iznosi 60%. Ako prelijemo polovicu soka iz druge čaše u prvu, koliki će udio voća biti u soku u prvoj čaši?

Rješenje.

Prisjetimo se da se udio neke tvari u nekoj otopini (ili smjesi) računa kao omjer

$$\text{udio} = \frac{\text{količina tvari}}{\text{količina otopine}}.$$

Većinom će nam biti lakše računati s količinom tvari, a ne s njenim udjelom.

Označimo s A količinu soka u prvoj čaši, a s B količinu soka u drugoj čaši. Iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi $5A = B$. Udio voća u prvoj čaši je 85%. Količina voća u prvoj čaši dakle iznosi $85\% \cdot A = 0.85A$. Analogno, količina voća u drugoj čaši iznosi $60\% \cdot B = 0.6B$.

Preljevanjem polovice soka iz druge čaše se u prvu čašu doda količina voća od $\frac{1}{2} \cdot 0.6B = 0.3B$. Stoga je ukupna količina voća u prvoj čaši nakon preljevanja jednaka

$$0.85A + 0.3B = 0.85A + 0.3 \cdot 5A = 0.85A + 1.5A = 2.35A.$$

Poveća se i ukupna količina soka u prvoj čaši pa iznosi $A + 0.5B = A + 0.5 \cdot 5A = A + 2.5A = 3.5A$. Konačno, udio voća u soku u prvoj čaši nakon preljevanja iznosi

$$\frac{2.35A}{3.5A} = \frac{2.35}{3.5} = 0.6714 = 67.14\%.$$

Zadatak J-3.3. [30 bodova]

Izračunaj zbroj svih znamenki prvih 2025 prirodnih brojeva.

Rješenje.

Označimo sa S zbroj svih znamenki, tj. $S = 0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9$ (naravno, ovaj zbroj ostaje isti ako isključimo znamenku 0, što će nam poslije biti korisno). Ovaj zbroj lako računamo direktno ili zgodnije putem Gaussove dosjetke:

$$S = 0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9 = (0 + 9) + (1 + 8) + \cdots + (4 + 5) = 5 \cdot 9 = 45.$$

Podijelimo brojeve čije znamenke zbrajamo u skupine prema broju znamenki. Za jednoznamenkaste brojeve smo već odredili zbroj svih njihovih znamenki – to je upravo naš S. Važno je sad primijetiti što se događa kod dvoznamenkastih brojeva. Kod brojeva s istom prvom znamenkom, druga znamenka se mijenja od 0 do 9, pa je njihov zbroj ponovno S. Imamo 9 mogućih prvih znamenki (od 1 do 9), pa zbroj znamenki jedinica kod svih dvoznamenkastih brojeva iznosi $9 \cdot S$. Što se tiče znamenki desetica, svaka se pojavljuje u deset dvoznamenkastih brojeva, pa je njihov ukupni zbroj $10 \cdot S$. Ukupni zbroj svih znamenki kod dvoznamenkastih brojeva stoga iznosi $10S + 9S = 19S$.

Kod troznamenkastih brojeva imamo sličnu situaciju. Što se tiče znamenki jedinica, one se periodično ponavljaju i to za sve moguće izbore prvih dviju znamenki. Tih izbora ima 90 (od 10 do 99), pa je ukupni zbroj znamenki jedinica svih troznamenkastih brojeva jednak $90S$. Znamenke desetica se također periodično ponavljaju kako se mijenja znamenka stotica (9 različitih znamenki stotica), a za svaku znamenku stotica se ista znamenka desetica pojavljuju točno 10 puta, pa je ukupni zbroj znamenki desetica kod troznamenkastih brojeva jednak $9 \cdot 10S = 90S$. Što se tiče znamenki stotica, svaka se pojavi točno 100 puta, pa je ukupni zbroj znamenki stotica jednak $100S$. Ukupni zbroj svih znamenki troznamenkastih brojeva stoga iznosi $90S + 90S + 100S = 280S$.

Preostalo je još analizirati četveroznamenkaste brojeve koji su uključeni u dani raspon, dakle brojevi od 1000 do 2025. Kod brojeva koji imaju znamenku tisućica jednaku 1, vrijedi da je ukupni zbroj svih znamenki jedinica, desetica i stotica jednak ukupnom zbroju svih znamenki koje smo dosada zbrojili (za jednoznamenkaste, dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve). Doista, ako poistovjetimo jednoznamenkasti broj a sa zapisom $00a$ i analogno za dvoznamenkaste i troznamenkaste brojeve, vidimo da zbrajamo znamenke istih brojeva kao i prije. Dosadašnji ukupni zbroj iznosi $S + 19S + 280S = 300S$. Ovom zbroju trebamo sada pridodati 1000 znamenki 1 jer postoji točno 1000 četveroznamenkastih brojeva sa znamenkom tisućica jednakom 1.

Preostaje još pozbrojiti znamenke u 26 četveroznamenkastih brojeva čija prva znamenka je 2. Zbroj znamenki jedinica iznosi $2S+0+1+2+3+4+5 = 105$; zbroj znamenki desetica iznosi $10\cdot 1+6\cdot 2 = 22$; znamenka stotica je uvijek 0 pa je i zbroj 0; znamenka tisućica uvijek je 2 pa zbroj iznosi $26 \cdot 2 = 52$.

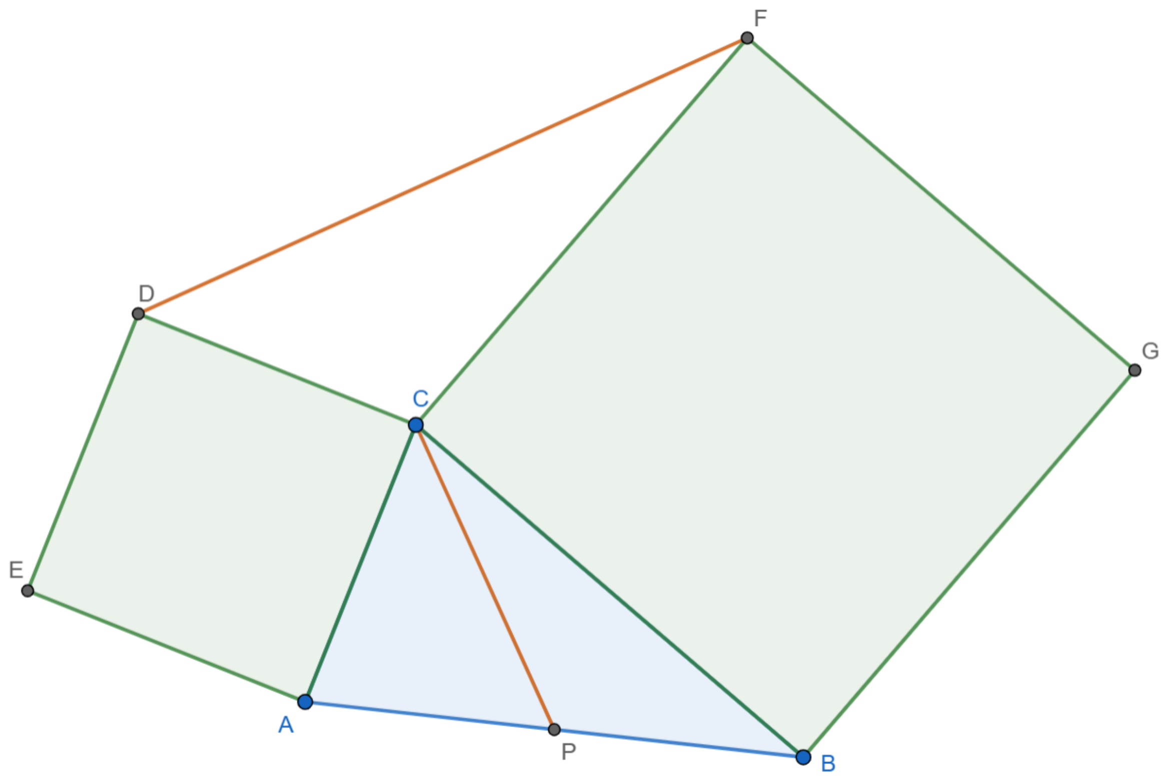
Konačno, zbroj svih znamenki prvih 2025 prirodnih brojeva iznosi:

$$300S + (300S + 1000) + (105 + 22 + 0 + 52) = 600S + 1179 = 600 \cdot 45 + 1179 = 28179.$$

Zadatak J-3.4. [40 bodova]

Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC nacrtani su kvadrati $ACDE$ i $BGFC$ (s vanjske strane trokuta). Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Dokaži da je duljina dužine $\overline{DF}$ dva puta dulja od duljine dužine $\overline{CP}$.

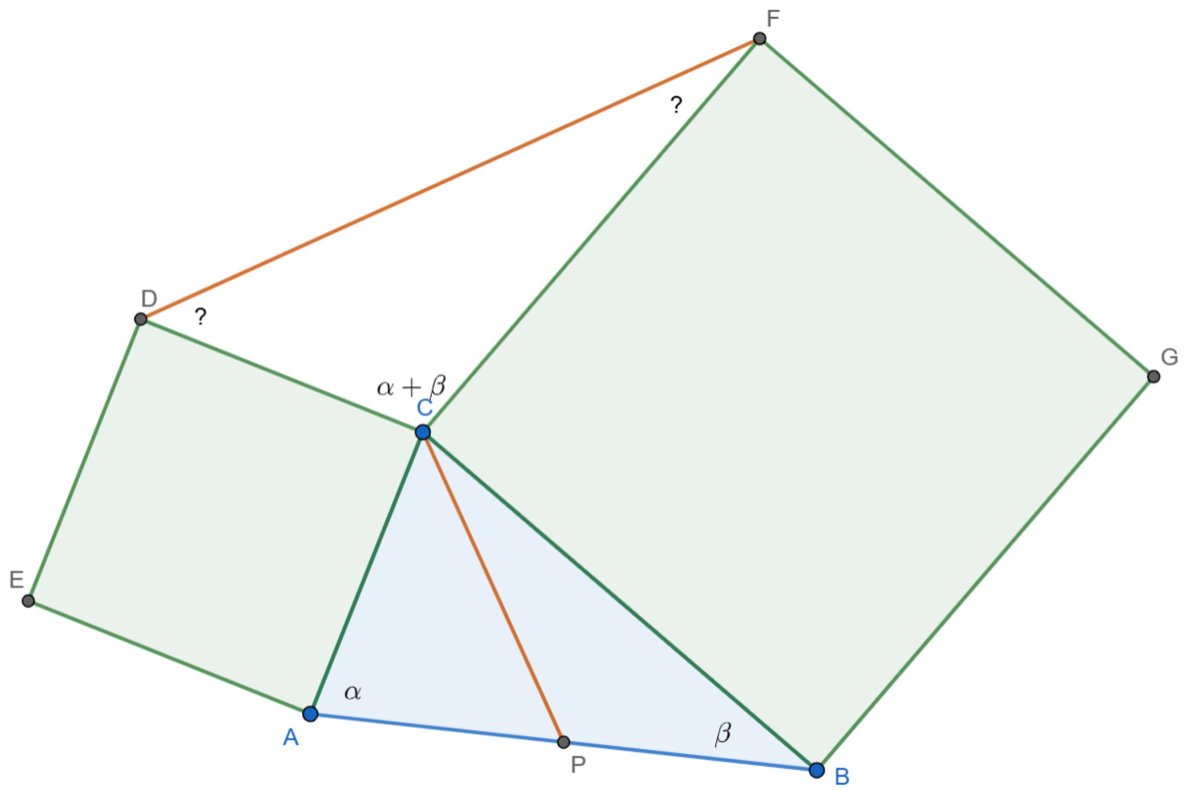
Rješenje.



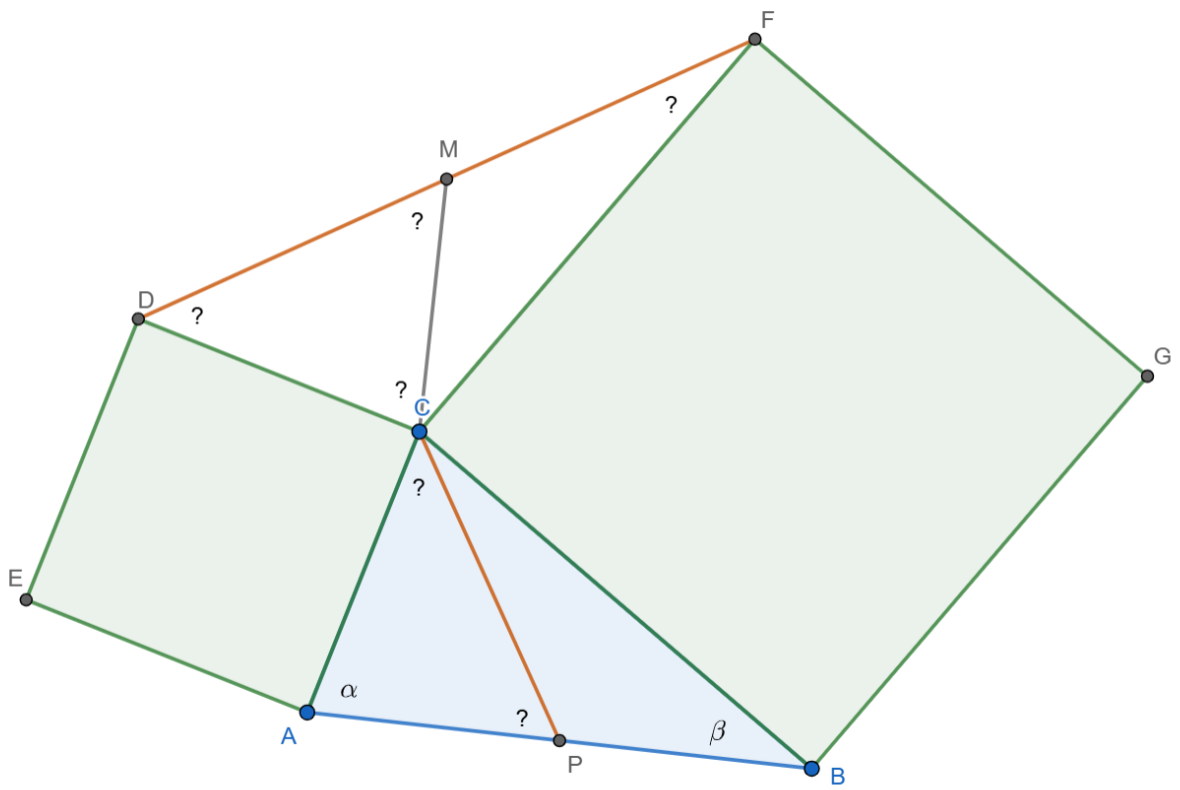
Prvi instinkt je vjerojatno računati kutove i pokušati nešto zaključiti iz toga. Ako označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle CAB = \beta$ te $\sphericalangle ACB = \gamma$, znamo da vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Tada lako dobijemo

$$\sphericalangle FCD = 360° - (90° + 90° + \gamma) = 180° - \gamma = \alpha + \beta.$$

No nažalost, daljnje kuteve ne možemo lagano izračunati.

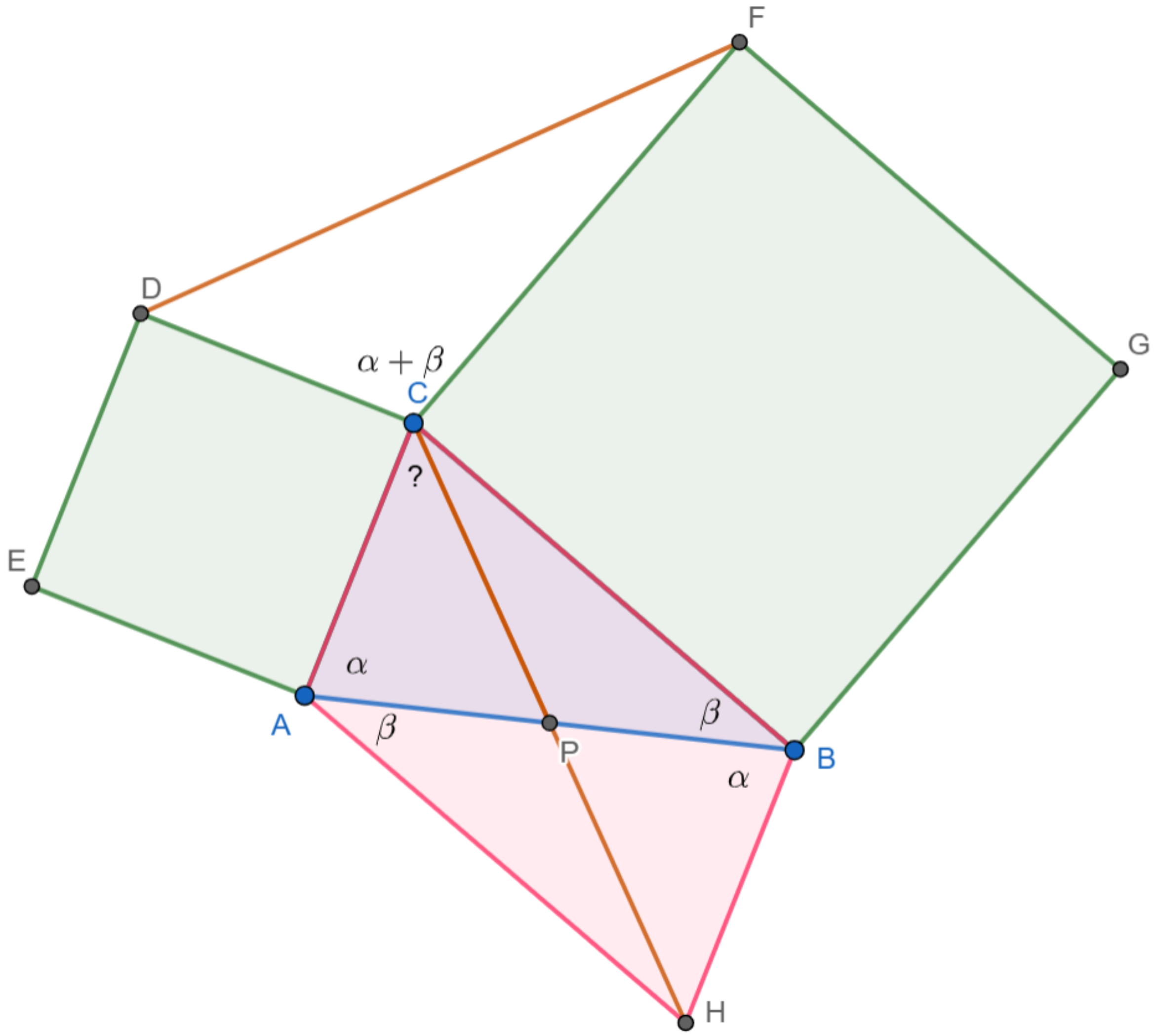


Želimo dokazati da vrijedi $|DF| = 2|CP|$. Stoga je jedna ideja uvesti polovište stranice $\overline{DF}$ kao novu točku M i nekako dokazati da vrijedi $|DM| = |CP|$, možda pomoću sukladnosti trokuta. No, ponovno imamo problem s određivanjem ključnih kutova.



Stoga moramo razmišljati u drugom smjeru, „izvan okvira”. Pogledajmo koja svojstva *težišnice trokuta* (dužine koja spaja vrh trokuta i polovište nasuprotne stranice, u našem slučaju dužina $\overline{CP}$) možemo iskoristiti. U trokutu DCF znamo da vrijedi $|DC| = |AC|$ i $|CF| = |BC|$ te $\sphericalangle FCD = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$. To je vrlo slično karakteristikama trokuta ABC. Iskoristit ćemo to u sljedećem docrtavanju.

Primijetimo da trokut ABC možemo shvatiti kao *polovicu paralelograma* kojeg dobijemo tako da povučemo paralele sa stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u vrhovima A i B redom. Pogledajmo što tada dobijemo.



Najprije, zbog poučka o kutovima uz presječnicu paralelnih pravaca zaključujemo da vrijedi $\sphericalangle HAB = \beta$ i $\sphericalangle ABH = \alpha$. Dalje, kako se dijagonale u paralelogramu međusobno prepolovljavaju (ovo se vidi iz sukladnosti trokuta APC i BPH), znamo da je dijagonala $\overline{CH}$ zapravo produžetak težišnice $\overline{CP}$ i da je dvostruko dulja od nje.

Sada ostaje primijetiti da su trokuti DCF i CAH sukladni po SKS poučku: podudaraju se u duljinama parova stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AC}$ te $\overline{CF}$ i $\overline{AH}$ te u kutu među njima $\sphericalangle FCD = \sphericalangle HAC = \alpha + \beta$. Stoga vrijedi $|DF| = |CH| = 2|CP|$, što smo htjeli pokazati.

Zadatak J-3.5. [50 bodova]

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da vrijedi $a \geq b \geq c$ i koje zadovoljavaju sljedeće dvije jednadžbe:

$$(a-b)(b-c) = 25(a-c)$$
$$a + b + c = 2025.$$

Rješenje.

Ako krenemo direktno s razmnožavanjem prve jednadžbe i uvrštavanjem vrijednosti iz jedne jednadžbe u drugu, vidimo da dolazimo do kvadratnih izraza s kojima ne možemo lagano baratati. Stoga je ideja pojednostaviti jednadžbe prije početka računanja. U tome će nam pomoći *supstitucija varijabli.*

Primijetimo da iz uvjeta zadatka znamo uređaj (poredak) među prirodnim brojevima a, b i c. Zaključujemo da postoje nenegativni cijeli brojevi x i y (dakle, $x, y \geqslant 0$) za koje vrijedi $b = c + x$ i $a = b + y = c + x + y$. Uvrštavanjem u početne jednadžbe dobijamo:

$$\begin{aligned} xy &= 25(x+y) \\ 3c + 2x + y &= 2025. \end{aligned}$$

Riješimo najprije „rubne” slučajeve $x = 0$ ili $y = 0$. Iz prve jednadžbe vidimo da je to zapravo jedan slučaj (čim je jedan od x ili y nula, takav mora biti i drugi). Tada iz druge jednadžbe dobijemo $c = \frac{2025}{3} = 675$, pa je jedna trojka koja zadovoljava sve uvjete zadatka $(675, 675, 675)$.

Riješimo sada diofantsku jednadžbu $xy = 25(x + y)$, s tim da znamo $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Napomenimo da je ova jednadžba ekvivalentna često viđenoj varijanti $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{25}$. Izrazimo varijablu y preko x:

$$\begin{aligned} xy &= 25x + 25y \\ xy - 25y &= 25x \\ y(x-25) &= 25x \\ y &= \frac{25x}{x-25}. \end{aligned}$$

Znamo da je y cijeli broj, pa takav mora biti i razlomak s desne strane. Koristimo standardni postupak rastava razlomka ovog tipa:

$$\frac{25x}{x-25} = \frac{25x - 25 \cdot 25 + 25 \cdot 25}{x-25} = \frac{25(x-25) + 625}{x-25} = \frac{25(x-25)}{x-25} + \frac{625}{x-25} = 25 + \frac{625}{x-25}.$$

Zaključujemo da razlomak $\dfrac{625}{x-25}$ mora biti cijeli broj. To je jedino moguće ako nazivnik $x - 25$ dijeli brojnik 625. Svi djelitelji broja $625 = 5^4$ su $-625, -125, -25, -5, -1, 1, 5, 25, 125, 625$. Kako je x prirodan broj, zaključujemo da se prva tri djelitelja ne mogu postići. U ostalim slučajevima, x je redom jednak $20, 24, 26, 30, 50, 150, 650$. Za y redom dobijemo $-100, -600, 650, 150, 50, 30, 26$. Kako i y mora biti prirodan, odbacujemo i prva dva slučaja. Konačno, sve mogućnosti za par (x, y) su $(26, 650), (30, 150), (50, 50), (150, 30), (650, 26)$.

Uvrštavanjem u jednadžbu $3c + 2x + y = 2025$ dobivamo redom sljedeće vrijednosti za c: 441, 605, 625, 565, 233. Stoga su sve tražene trojke (a, b, c) jednake:

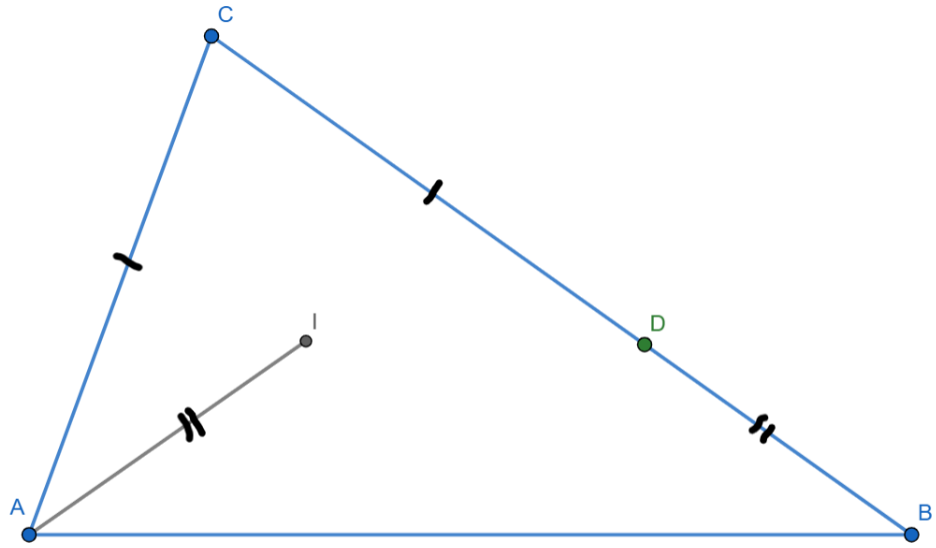
$$(1117, 467, 441), (785, 635, 605), (725, 675, 625), (745, 715, 565) \text{ i } (909, 883, 233).$$

Zadatak J-3.6. [60 bodova]

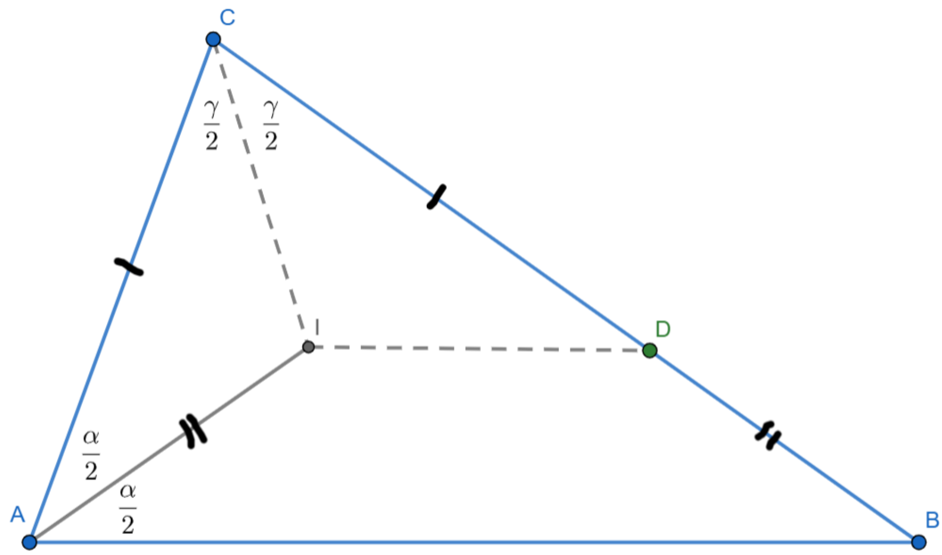
Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Ako vrijedi $|AC| + |AI| = |BC|$, dokaži da vrijedi $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CBA$.

Rješenje.

Iskoristit ćemo zadani uvjet tako da uvedemo točku D na stranici $\overline{BC}$ za koju vrijedi $|AC| = |CD|$ i $|AI| = |DB|$.



Docrtajmo sada dužine $\overline{CI}$ i $\overline{DI}$ i označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Znamo da su pravci AI i CI simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ redom.



Vidimo da su trokuti AIC i DCI sukladni po SKS poučku ($|AC| = |CD|$, zajednička stranica $\overline{CI}$ i jednaki kutovi $\sphericalangle ACI = \sphericalangle ICD = \frac{\gamma}{2}$). To znači da vrijedi $|AI| = |ID|$ te $\sphericalangle IAC = \sphericalangle CDI = \dfrac{\alpha}{2}$.

Promotrimo sada četverokut $ABDI$. Možemo zaključiti da je on tetivan, jer vrijedi $\sphericalangle BAI + \sphericalangle IDB = \dfrac{\alpha}{2} + (180° - \dfrac{\alpha}{2}) = 180°$. Sada preostaje uočiti da su trokuti ABD i BAI sukladni po KSK poučku: stranica $\overline{AB}$ im je zajednička te su im parovi kutova $\sphericalangle IAB$ i $\sphericalangle DAB$ te $\sphericalangle ADB$ i AIB jednaki kao obodni kutevi nad tetivama iste kružnice jednake duljine. Iz toga slijedi traženo $\sphericalangle CBA = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sphericalangle BAC}{2}$.

Zadatak J-3.7. [70 bodova]

U nekoj dalekoj zemlji, matematička edukativna olimpijada sastoji se od 22 kola. Na svakom kolu 5 najbolje plasiranih natjecatelja dobije čokoladu. Analizom rezultata ustanovljeno je da za svaka dva kola postoji točno jedan natjecatelj koji je dobio čokoladu na oba promatrana kola. Dokaži da postoji natjecatelj koji je dobio čokoladu na svakom kolu.

Rješenje.

Označimo prvo kolo s K_1 i promotrimo 5 natjecatelja koji su dobili čokoladu (tj. bili nagrađeni) na tom kolu. Na svakom od preostalih 21 kola netko od tih 5 natjecatelja je ponovno bio nagrađen, jer svaka dva kola imaju jednog zajedničkog nagrađenog natjecatelja. Prema *Dirichletovom principu* zaključujemo da postoji natjecatelj među 5 nagrađenih na prvom kolu koji je bio nagrađen još na barem 5 kola među preostalima. Doista, u suprotnom bismo imali da je svaki učenik među 5 nagrađenih na prvom kolu bio nagrađen na najviše 4 preostala kola, no onda bi ukupno imali najviše $5 \cdot 4 = 20$ nagrađenih učenika na preostalim kolima, ali to je manje nego što ima preostalih kola.

Označimo tih pet kola s K_2, K_3, K_4, K_5 i K_6 te natjecatelja koji je nagrađen na svima njima s a. Dakle, za sada znamo da je učenik a jedini učenik koji je nagrađen na svakom od kola K_1, K_2, $\ldots$, K_6. Dodatno, a je jedini nagrađeni natjecatelj koji je zajednički među nagrađenim natjecateljima na bilo koja dva kola iz K_1, K_2, $\ldots$, K_6.

Neka je sada L bilo koje kolo različito od K_1, K_2, $\ldots$, K_6. L mora imati zajedničkog nagrađenog natjecatelja sa svakim od kola K_1, K_2, $\ldots$, K_6. Kako je točno 5 učenika nagrađeno na kolu L, po Dirichletovom principu sada zaključujemo da je neki od učenika nagrađenih na kolu L nagrađen na dva kola među kolima K_1, K_2, $\ldots$, K_6. No, tada je taj učenik nagrađen na neka dva kola iz K_1, K_2, $\ldots$, K_6, pa po tvrdnji s kraja prethodnog odlomka zaključujemo da taj učenik mora biti a.

Dakle, učenik a dobio je čokoladu i na kolu L. Kako je kolo L bilo odabrano proizvoljno, zaključujemo da za sva preostala kola vrijedi isti zaključak. Time je dokazano da je učenik a nagrađen čokoladom na svakom kolu natjecanja.