MEDO 2024./2025.

Drugo kolo

30.11.2024.

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-2.1. [10 bodova]

Mirko čita knjigu. Prvog dana pročitao je petinu knjige. Drugog dana pročitao je dvije sedmine ostatka knjige. Trećeg dana pročitao je 23 stranice. Četvrtog dana pročitao je trećinu ostatka knjige. Petog dana pročitao je polovicu preostalog dijela knjige, a šestog dana pročitao je knjigu do kraja.

Koliko najmanje stranica može imati Mirkova knjiga, ako znamo da je svakog dana pročitao prirodan broj stranica?

Rješenje.

Označimo broj stranica knjige s n; iz uvjeta zadatka znamo da je n prirodan broj. Sada možemo izraziti broj stranica koje Mirko pročita svakog dana preko n. Prvog dana pročitao je $\frac{1}{5} \cdot n = \frac{n}{5}$ stranica; kako je svakog dana pročitao prirodan broj stranica, i ovo mora biti prirodan broj, stoga n mora biti djeljiv s 5.

Znamo da je drugog dana pročitao dvije sedmine **ostatka** knjige. Odredimo najprije koliki je taj ostatak: od ukupnog broja stranica oduzimamo stranice pročitane prvi dan, pa dobijemo $n - \frac{n}{5} = \frac{4n}{5}$. Dakle, drugog dana je pročitao još $\frac{2}{7} \cdot \frac{4n}{5} = \frac{8n}{35}$. Kako i ovaj broj mora biti prirodan, zaključujemo da je n djeljiv s 35, jer 8 nema zajedničkih faktora s 35. Nakon drugog dana preostane mu još $\frac{4n}{5} - \frac{8n}{35} = \frac{4n}{7}$ stranica.

Trećeg dana pročitao je daljnje 23 stranice, pa mu je ostalo još $\frac{4n}{7} - 23 = \frac{4n-161}{7}$ stranica. Četvrtog dana pročita još jednu trećinu preostalih stranica, pa mu ostane još dvije trećine ostatka, što iznosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{4n-161}{7} = \frac{8n-332}{21}$. Petog dana pročita *polovicu* preostalog dijela *(isprike još jednom svima na pogrešci prilikom originalnog prijepisa zadatka)*, pa mu ostane još $\frac{1}{2} \cdot \frac{8n-332}{21} = \frac{4n-161}{21}$ stranica, koje pročita šesti i zadnji dan.

Svi navedeni razlomci moraju biti prirodni brojevi. Stoga zaključujemo da n mora biti djeljiv s 35 te da $4n - 161$ mora biti djeljiv s 21. Također, mora vrijediti i $4n - 161 > 0$, tj. $n > 40$. Provjerom prvih nekoliko višekratnika broja 35 $(35, 70, 105, 140, \ldots)$ dobijemo da je 140 najmanji broj koji zadovoljava sve uvjete. Stoga je najmanji mogući broj stranica Mirkove knjige solidnih 140.

Zadatak S-2.2. [20 bodova]

Odredi sve trojke znamenaka a, b i c (uz $a, c \neq 0$) takve da vrijedi jednakost:

$$\overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6}.$$

Prvo rješenje.

S desne strane jednakosti imamo umnožak tri prirodna broja: a, $\overline{aa}$ i $\overline{c6}$; pogledajmo možemo li nešto zaključiti iz toga. Zadnji broj $\overline{c6}$ završava na znamenku 6, stoga je sigurno paran broj (broj je paran onda i samo onda kad završava na parnu znamenku). Kada u umnošku imamo paran broj, konačni umnožak mora također biti paran. Stoga je broj s desne strane jednakosti paran, pa takav mora biti i broj $\overline{abac}$ s lijeve strane. Njegova zadnja znamenka je c, pa zaključujemo da c mora biti paran. Kako zbog uvjeta zadatka ne može biti 0, ostaju nam 4 mogućnosti: $c = 2$, 4, 6 ili 8.

Promotrimo najprije mogućnost $c = 2$; broj $\overline{c6}$ je tada jednak 26. Primijetimo da vrijedi $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. Jednakost sada postaje:

$$\overline{aba2} = a \cdot 11a \cdot 26 = a^2 \cdot 11 \cdot 26.$$

Desna strana jednakosti sada ovisi samo o vrijednosti znamenke a. Sada bismo mogli promatrati sve mogućnosti za a i u svakom slučaju odrediti je li jednakost zadovoljena za neki izbor znamenke b; no, već znamo zadnju znamenku broja s lijeve strana pa si možemo skratiti posao. Pogledajmo koliko može iznositi zadnja znamenka broja s desne strane. Znamo da je zadnja znamenka umnoška jednaka zadnjoj znamenki umnoška zadnjih znamenaka (jednostavnije rečeno, zadnja znamenka umnoška ovisi jedino o zadnjim znamenkama faktora). Uvrštavamo redom moguće vrijednosti za a (radi lakšeg zapisa koristimo modularnu aritmetiku s modulom 10, za pojašnjenje vidi Edukativno rješenje 5. zadatka iz prošlog kola):

a	$a^2 \pmod{10}$	$a^2 \cdot 11 \cdot 26 \pmod{10}$
1	1	6
2	4	4
3	9	4
4	6	6
5	5	0
6	6	6
7	9	4
8	4	4
9	1	6

Primjećujemo da u nijednom slučaju zadnja znamenka umnoška nije 2 (primijetite usput simetriju oko srednjeg umnoška; to nije slučajno, probajte shvatiti zašto; pojasnit ćemo na radionici). Stoga jednakost nije zadovoljena ni za jedan a, pa nema rješenja u slučaju $c = 2$.

Promatrajmo sada slučaj $c = 4$. Jednakost postaje:

$$\overline{aba4} = a^2 \cdot 11 \cdot 46.$$

Provedena analiza zadnje znamenke pokazuje da su jedine mogućnosti za a znamenke 2, 3, 7, 8. Uvrštavajući ove vrijednosti redom dobijemo umnoške 2024, 4554, 24794, 32384. Vidimo da jedino prvi umnožak ima traženi oblik $\overline{abac}$, pa je jedina tražena trojka u ovom slučaju $(a, b, c) = (2, 0, 4)$.

Preostaju slučajevi $c = 6$ i $c = 8$. Za slučaj $c = 8$ direktno iz provedene analize zadnje znamenke vidimo da nema rješenja. U slučaju $c = 6$ mogući izbori za a su 1, 4, 6 i 9; direktnom provjerom svih umnožaka u ovim slučajevima dobijemo da niti jedan nije oblika $\overline{abac}$ ($1^2 \cdot 11 \cdot 66 = 726$ je premalo, a već $4^2 \cdot 11 \cdot 66 = 11616$ je preveliko), što znači da nema daljnjih rješenja.

Drugo rješenje.

Mod 2 kaže da je c paran kao zadnja znamenka s desne strane. Gledajmo mod 4:

$$2a + c \equiv 1010a + 100b + c = \overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6} = 11a^2 \cdot 10c + 6 \equiv -a^2 \cdot (2c + 2) \equiv -2a^2 \pmod{4},$$

odakle je $c \equiv 2a(a + 1) \bmod 4$, pa je nužno $4 \mid c$. Dakle, $c = 4$ ili 8.

Ograničimo znamenku a. Sigurno je $b \leqslant 9$, $4 \leqslant c \leqslant 8$, pa je

$$1010a + 900 + 8 \geqslant 1010a + 100b + c = \overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6} = 11a^2 \cdot \overline{c6} \geqslant 11a^2 \cdot 46.$$

Dobivamo uvjet

$$506a^2 - 1010a - 908 \leqslant 0,$$

odakle je nužno $a \leqslant 2$. Dakle, imamo 4 mogućnosti za a, c: $a = 1, 2$, $c = 4, 8$. Provjerimo sve mogućnosti

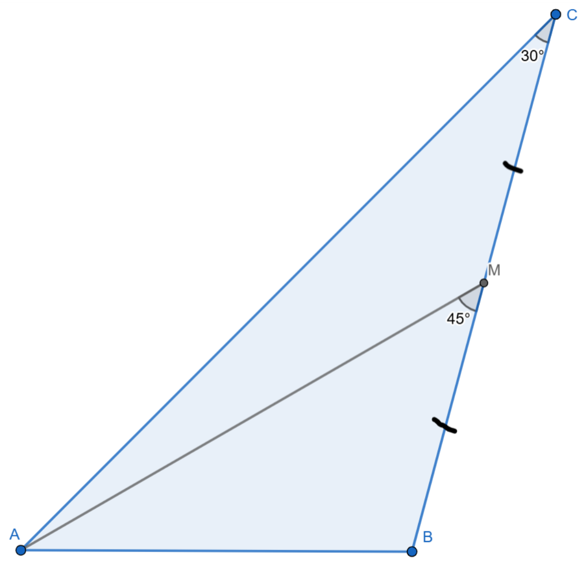
$$1 \cdot 11 \cdot 46 = 506,\ 2 \cdot 22 \cdot 46 = 2024,\ 1 \cdot 11 \cdot 86 = 946,\ 2 \cdot 22 \cdot 86 = 3784$$

te dobivamo jedino rješenje za $a = 2, b = 0, c = 4$.

Zadatak S-2.3. [30 bodova]

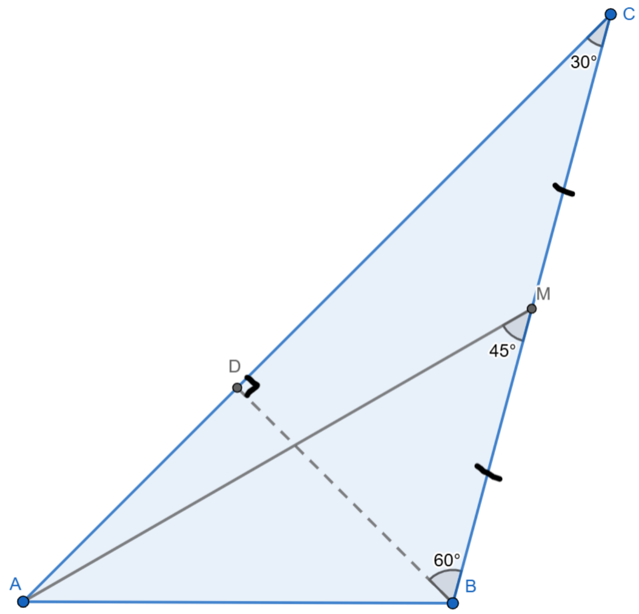
Neka je M polovište stranice BC trokuta ABC. Ako je $\sphericalangle AMB = 45°$ i $\sphericalangle ACM = 30°$, koliko iznosi $\sphericalangle BAM$?

Rješenje.

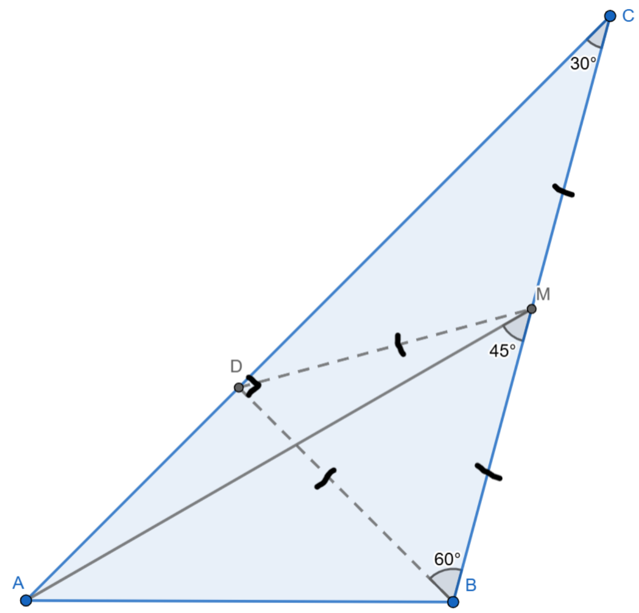


Sa slike vidimo da nam u ovoj geometrijskoj konfiguraciji nije dano mnogo podataka. Stoga ćemo morati ponovno docrtavati objekte kako bismo odredili traženu veličinu kuta. Razmislimo kako to možemo učiniti. Jedino što nam je poznato je postojanje kutova veličine $30°$ i $45°$. Ovi kutovi nas mogu podsjetiti na dva poznata trokuta: polovina jednakostraničnog trokuta (s kutovima od $30°$, $60°$ i pravim kutom) te jednakokračni pravokutni trokut (s dva kuta od $45°$ i pravim kutom). U svakom slučaju, potaknuti smo da tražimo kako uvesti pravi kut u našu sliku, jer bismo na taj način mogli stvoriti jedan od navedenih trokuta.

Povlačenje okomice iz točke B na težišnicu $\overline{AM}$ kako bismo dobili jednakokračni pravokutni trokut je jedan mogući način, ali ne čini se obećavajuć. Stoga krećemo drugim putem, možda i prirodnijim, i povlačimo okomicu iz točke B na stranicu $\overline{AC}$, tj. visinu trokuta ABC iz vrha B: time dobivamo polovinu jednakostraničnog trokuta BCD, gdje je D nožište visine iz točke B.



Kako je trokut BCD polovina jednakostraničnog trokuta, znamo da je stranica $\overline{BD}$ upola kraća od stranice $\overline{BC}$. No, tada vrijedi $|BD| = |BM|$, jer je $\overline{BM}$ upravo polovica stranice $\overline{BC}$. To nas potiče da docrtamo i dužinu $\overline{DM}$, jer time dobivamo jednakostranični trokut BMD (kao jednakokračni s jednim kutem od $60°$).



Sada konačno možemo krenuti s određivanjem kutova. Zanima nas veličina kuta $\sphericalangle BAM$. Njega možemo dobiti kao razliku kutova $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle MAD$. Kut $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAC$ lagano odredimo iz trokuta AMC: vanjski kut kod vrha M iznosi $45°$, pa vrijedi $\sphericalangle MAC + \sphericalangle ACM = 45°$, pa zbog $\sphericalangle ACM = 30°$ dobijemo $\sphericalangle MAC = 15°$.

Primijetimo sada da je trokut AMD jednakokračan: vrijedi $\sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA$, jer zbog $\sphericalangle DMB = 60°$ dobijemo $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMB - \sphericalangle AMB = 60° - 45° = 15°$. Stoga vrijedi $|AD| = |DM| = |BD|$, pa je i trokut ABD jednakokračan. Kako je $\sphericalangle ADB$ pravi kut, odmah dobijemo $\sphericalangle BAD = 45°$. Stoga konačno možemo dobiti veličinu traženog kuta $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAD - \sphericalangle MAD = 45° - 15° = 30°$.

Zadatak S-2.4. [40 bodova]

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}\right).$$

Rješenje.

Dva su ključna pitanja koja si trebamo postaviti kada krenemo rješavati ovaj zadatak. Prvo je: „kako možemo iskoristiti uvjet zadatka", a drugo: „kako se možemo riješiti 'jedinica' u nazivnicima na desnoj strani nejednakosti". Kada malo bolje razmislimo o ovim pitanjima, možemo vidjeti da se odgovor na prvo nalazi u drugom, i obrnuto.

'Jedinica' u nazivniku se rješavamo upravo tako da ih zamijenimo izrazima $ab+bc+ca$ iz uvjeta. Time ćemo promatranu nejednakost učiniti **homogenom** – što znači da su svi članovi izraza na obje strane nejednakosti jednake potencije.

Zaista, svaki od razlomaka na lijevoj strani u brojniku ima izraz nulte potencije, dok je u nazivniku izraz potencije 1. Time je potencija svakog od pribrojnika na lijevoj strani jednaka -1. S druge strane, svaki od razlomaka na desnoj strani ima izraz potencije 1 u brojniku, dok su svi pribrojnici u nazivniku potencije 2. Time je i potencija svakog od pribrojnika na desnoj strani jednaka -1.

Homogenost je svojstvo koje često želimo pokušati postići pri rješavanju zadataka s nejednakostima, jer nam ono omogućava lakšu i uspješniju primjenu nekih poznatih nejednakosti, poput **aritmetičko-geometrijske (AG)** nejednakosti. Ako je ovo pojam s kojim se dosad niste susreli, nešto više o ovoj i nekim drugim nejednakostima možete naučiti kroz MNM-ovo predavanje uvod u nejednakosti.

Vratimo se sada na zadatak. Korištenjem uvjeta na spomenuti način i sređivanjem izraza na obje strane, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq 4\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2}\right) \iff \\
\frac{bc+ca+ab}{abc} &\geq 4\left(\frac{a}{ab+bc+ca+a^2} + \frac{b}{ab+bc+ca+b^2} + \frac{c}{ab+bc+ca+c^2}\right) \iff \\
\frac{1}{abc} &\geq 4\left(\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+a)(b+c)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}\right) \iff \\
\frac{1}{abc} &\geq 4\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\
\frac{1}{abc} &\geq 4\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\
\frac{1}{abc} &\geq \frac{8}{(a+b)(b+c)(c+a)} \iff \\
(a+b)(b+c)(c+a) &\geq 8abc.
\end{aligned}$$

Posljednja nejednakost do koje smo došli je poznata nejednakost čiju istinitost možemo dokazati na više načina. Navodimo dva načina pomoću AG nejednakosti:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc,$$

ili

$$\begin{aligned}
(a+b)(b+c)(c+a) &= a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc \\
&\geq 6\sqrt[6]{a^2b \cdot ab^2 \cdot b^2c \cdot bc^2 \cdot c^2a \cdot ca^2} + 2abc \\
&= 6abc + 2abc = 8abc.
\end{aligned}$$

Zadatak S-2.5. [50 bodova]

Za prirodan broj n s $P(n)$ označimo broj njegovih *različitih* prostih djelitelja. Odredi najveću vrijednost koju $P(n)$ može postići ako je n prirodan broj čiji dekadski zapis sadrži najviše dvije različite znamenke, a ukupno najviše 6 znamenki.

Rješenje.

Označimo traženu najveću vrijednost s M. Pokušajmo najprije ograničiti s gornje strane vrijednost od M. U tu svrhu, računamo umnoške prvih nekoliko prostih brojeva:

$$\begin{aligned}
&2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 = 2310\\
&2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 = 30030\\
&2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 510510\\
&2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19 = 9699690.
\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da je najmanji broj n za kojeg vrijedi $P(n) = 8$ jednak 9699690. Kako ovaj broj ima više od 6 znamenki, zaključujemo da mora vrijediti $M \leq 7$.

Odmah vidimo i da $M \geq 6$, jer dobiveni broj 30030 zadovoljava uvjete zadatka i očigledno vrijedi $P(30030) = 6$. Stoga preostaje ispitati može li biti $M = 7$. Dokazat ćemo da ovo nije moguće.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji prirodni broj n koji zadovoljava uvjete zadatka (ima najviše dvije različite znamenke i ukupno najviše 6 znamenki) za kojeg vrijedi $P(n) = 7$. Pretpostavimo dodatno da je broj n najmanji s tim svojstvom. Pitamo se od kojih 7 prostih faktora se može sastojati n. Pokažimo najprije da on mora imati faktore 2, 3 i 5; u suprotnom, iznosio bi barem $2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19 = 1939938 > 10^6$, što je kontradikcija.

Sada zaključujemo da je n djeljiv s 10, pa mu je zadnja znamenka 0. Sada znamo jednu od moguće dvije znamenke broja n; označimo drugu znamenku s A. Pogledajmo koje su moguće vrijednosti za A. Dokažimo najprije da A ne može biti 9. Ako je $A = 9$, broj n se sastoji samo od znamenaka 9 i 0. Tada je djeljiv s 3 te dijeljenjem dobijemo broj koji se sastoji od znamenaka 3 i 0. No, i ovaj broj je djeljiv s 3 te ima jednaki broj prostih faktora kao i n. Kako je novi broj manji od n, dolazimo do kontradikcije s izborom broja n kao najmanjeg za kojeg vrijedi željeno svojstvo. Analogno dokazujemo da A ne može biti 8, promatrajući djeljivost s 2.

Dakle, vrijedi $A \leq 7$. Stoga je najveći mogući broj n jednak 777770. Sada možemo dokazati da n mora biti djeljiv i s 11, analogno kao i prije: u suprotnom, trebao bi iznositi najmanje $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17\cdot19 = 881790 > 777770$, što je kontradikcija.

Zbog djeljivosti s 11, zaključujemo da je broj pojavljivanja znamenke A paran. Promatrajmo sada opet djeljivost s 3. Ako A nije djeljiv s 3, tada broj pojavljivanja znamenke A mora biti djeljiv i s 3. Kako smo zaključili da se A mora pojavljivati parno mnogo puta, najmanja mogućnost je 6 pojavljivanja znamenke A; međutim, tada bi broj imao barem 7 znamenaka, jer znamo da zadnja znamenka mora biti 0. Stoga zaključujemo da $3 \mid A$. Analogno kao i prije, zaključujemo da $A \neq 6$, jer bi tada mogli podijeliti broj n s 2 i ponovno dobiti broj s istim brojem različitih prostih faktora. Stoga mora biti $A = 3$.

Konačno, to nam daje dovoljno dobru ogradu, jer sada je najveći mogući broj 333330, što je manje od umnoška prvih 7 prostih brojeva $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17 = 510510$, čime dolazimo do završne kontradikcije.

Zadatak S-2.6. [60 bodova]

Imamo 2024 bijele i 2024 crvene kartice. Na svakoj kartici napisan je prirodan broj između 1 i 2024 (uključivo). Dokaži da je moguće odabrati nekoliko bijelih kartica (više od nula, može i sve) i nekoliko crvenih kartica (više od nula, može i sve) tako da je zbroj svih brojeva na odabranim bijelim karticama jednak zbroju svih brojeva na odabranim crvenim karticama.

Prvo rješenje.

Broj koji piše na kartici ćemo zvati *oznakom* kartice; neka su to b_1, b_2, ..., b_{2024} za bijele kartice te c_1, c_2, ..., c_{2024} za crvene kartice (bilo kojim redom). Definirajmo i sume $B_i := \sum_{k=1}^{i} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ te $C_j := \sum_{k=1}^{j} c_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_j$ za sve $1 \leq i, j \leq 2024$ i dodatno $B_0 = C_0 = 0$.

Konstruirajmo sada 2025×2025 tablicu (matricu) koja u polju (i, j) ima upisan broj $B_i + C_j$, za sve $0 \leq i, j \leq 2024$. Dokazat ćemo da ova tablica sadrži dva polja s istom vrijednošću. Tada će zadatak biti riješen, zbog sljedećega: neka su to polja (x, y) i (z, w), uz $x < z$ (vidimo da nije moguće $x = z$); tada vrijedi $B_x + C_y = B_z + C_w$, iz čega slijedi $B_z - B_x = C_y - C_w$. Zbog $x < z$ vrijedi $B_x < B_z$, pa su obje strane pozitivne. No, tada s lijeve strane imamo upravo zbroj nekoliko oznaka na bijelim karticama, a s desne zbroj nekoliko oznaka na crvenim karticama, što je trebalo pokazati.

Definirajmo skupove S_k za svaki $0 \leq k \leq 2024$ kao skup svih polja tablice (i, j) takvih da vrijedi $\max(2024 - i, j) = k$ (na slici su skupovi polja S_0, S_1 i S_2 redom obojani crvenom, zelenom i plavom bojom). Jasno je da su svi skupovi S_k međusobno disjunktni.

	0	1	2	$\cdots$	2023	2024
0	0	C_1	C_2	$\cdots$	C_{2023}	C_{2024}
1	B_1	$B_1 + C_1$	$B_1 + C_2$	$\cdots$	$B_1 + C_{2023}$	$B_1 + C_{2024}$
2	B_2	$B_2 + C_1$	$B_2 + C_2$	$\cdots$	$B_2 + C_{2023}$	$B_2 + C_{2024}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
2022	B_{2022}	$B_{2022} + C_1$	$B_{2022} + C_2$	$\cdots$	$B_{2022} + C_{2023}$	$B_{2022} + C_{2024}$
2023	B_{2023}	$B_{2023} + C_1$	$B_{2023} + C_2$	$\cdots$	$B_{2023} + C_{2023}$	$B_{2023} + C_{2024}$
2024	B_{2024}	$B_{2024} + C_1$	$B_{2024} + C_2$	$\cdots$	$B_{2024} + C_{2023}$	$B_{2024} + C_{2024}$

Primijetimo sada da u svakom S_k mora postojati polje s oznakom iz intervala $[B_{2024}, B_{2024} + 2024\rangle$. Naime, u svakom S_k polje s najmanjom oznakom je $(2024 - k, 0)$ s vrijednošću $B_{2024-k} < B_{2024}$, a polje s najvećom oznakom je $(2024, k)$ s vrijednošću $B_{2024} + C_k > B_{2024}$. Uzastopne vrijednosti među poljima u istom S_k se povećavaju za najviše 2024, pa zaključujemo da će vrijednost nekog polja sigurno upasti u navedeni interval.

Sada smo gotovi, jer skupova S_k ima ukupno 2025, a vrijednosti iz intervala $[B_{2024}, B_{2024} + 2024\rangle$ ima 2024, pa po Dirichletovom principu možemo zaključiti da će postojati neka dva polja iz različitih skupova S_k s istom vrijednošću.

Drugo rješenje.

Označimo oznake na karticama i sume kao u prvom rješenju. BSO pretpostavimo da vrijedi $B_{2024} \leq C_{2024}$. Definirajmo funkciju $f\colon \{1, 2, \ldots, 2024\} \to \{1, 2, \ldots, 2024\}$ tako da je $f(k)$ najmanji indeks za kojeg vrijedi $B_k \leq C_{f(k)}$.

Ako se negdje postiže jednakost, gotovi smo. U suprotnom, ponovno zbog „diskretne neprekidnosti", vrijedi:

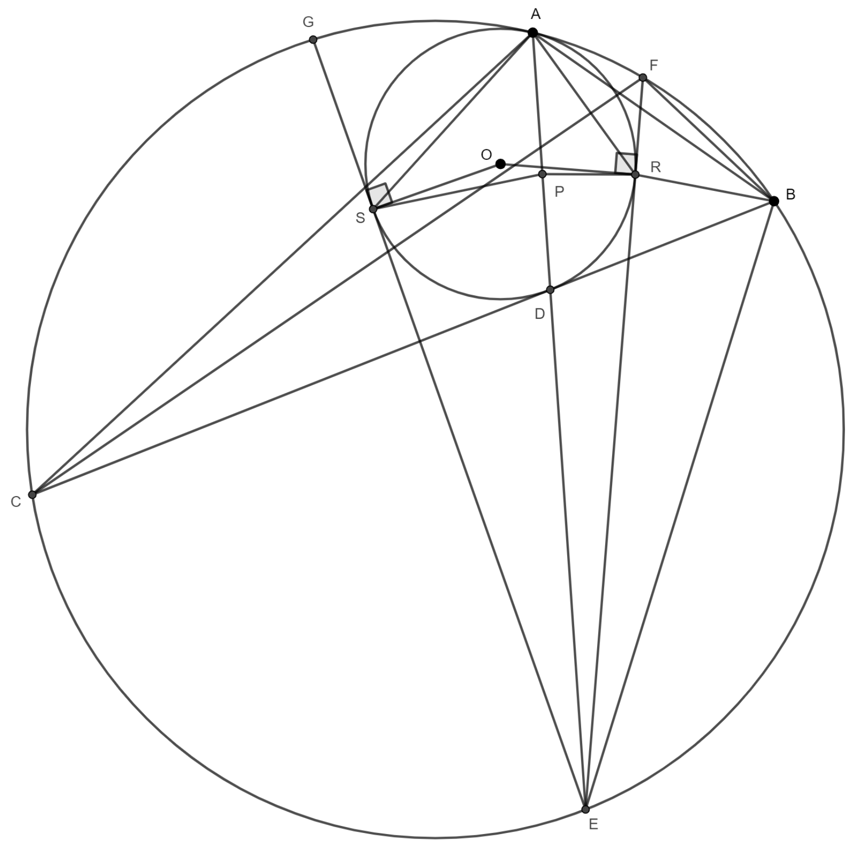
$$0 < C_{f(k)} - B_k \leq 2023.$$

Stoga razlika $C_{f(k)} - B_k$ može poprimiti jednu od 2023 vrijednosti, za svaki $1 \leq k \leq 2024$. Po Dirichletovom principu onda zaključujemo da postoje dva indeksa k i k' za koje je ova vrijednost jednaka, iz čega ponovno na isti način slijedi tražena tvrdnja.

Zadatak S-2.7. [70 bodova]

Kružnica k dodiruje kružnicu ℓ iznutra u točki A. Tetiva $\overline{BC}$ kružnice ℓ dodiruje kružnicu k u točki D. Pravac AD ponovno siječe kružnicu ℓ u točki E. Tangente iz točke E na kružnicu k sijeku kružnicu ℓ u točkama F i G. Neka su P, R i S redom središta upisanih kružnica trokuta BAC, BFC i BGC. Odredi $\sphericalangle ARP + \sphericalangle PSA$.

Rješenje.



Dokažimo najprije sljedeću lemu koja vrijedi u danoj konfiguraciji.

Lema: Točka E je polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A.

Dokaz leme: Promotrimo homotetiju h s centrom u točki A koja točku E šalje u točku D. Neka su B' i C' redom sjecišta pravaca AB i AC s kružnicom k. Iz definicije homotetije h slijedi da se pri toj homotetiji točka B slika u točku B' te točka C u točku C'. Nadalje, iz svojstva homotetije također znamo da je pravac $B'C'$ paralelan s BC. Uočimo da je time pravac BC tangenta na opisanu kružnicu trokuta $AB'C'$ koja je paralelna sa stranicom $\overline{B'C'}$. Iz toga slijedi da je diralište D te tangente i opisane kružnice zapravo polovište luka $\widehat{B'C'}$ bez točke A. Dakle, AD je simetrala kuta $\sphericalangle B'AC'$, tj. E je polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A.

Iz prethodne leme posebno imamo da se točka P nalazi na pravcu AE.

Pokažimo, nadalje, da su središta R i S redom točke dirališta tangenata EF i EG s kružnicom k. Označimo s R' diralište tangente EF i kružnice k. Iz prethodne leme znamo da je E polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A. Iz toga slijedi da je EF simetrala kuta $\sphericalangle CFB$ pa je zato točka R na pravcu EF. Kako je R središte upisane kružnice trokuta BFC i E polovište luka $\widehat{BC}$ bez točke A redom imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle RBE = \sphericalangle RBC + \sphericalangle CBE &= \frac{\sphericalangle FBC}{2} + \sphericalangle CFE\\ &= \frac{\sphericalangle FBC}{2} + \frac{\sphericalangle CFB}{2},\\ \sphericalangle ERB = \sphericalangle RFB + \sphericalangle FBR &= \frac{\sphericalangle FBC}{2} + \frac{\sphericalangle CFB}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, $\sphericalangle RBE = \sphericalangle ERB$ iz čega slijedi $|ER| = |EB|$.

S druge strane, primjenom potencije točke E na kružnicu k dobivamo $|ER'|^2 = |ED| \cdot |EA|$. Također vrijedi da je EB tangenta na opisanu kružnicu trokuta BAD jer je $\sphericalangle DBE = \dfrac{\sphericalangle CAB}{2} = \sphericalangle DAB$. Primjenom potencije točke E na opisanu kružnicu trokuta BAD slijedi $|EB|^2 = |ED| \cdot |EA|$. Iz prethodnih jednakosti imamo $|ER'| = |EB| = |ER|$. Konačno, kako se obje točke R i R' nalaze na dužini $\overline{EF}$ zaključujemo da mora vrijediti $R = R'$, tj. R je diralište tangente EF i kružnice k. Analogno se pokaže da je S dirališta tangente EG i kružnice k.

Uočimo da istim računom kao i za točke R i S imamo $|EP| = |EA|$ iz čega slijedi da je $|EP| = |ER| = |ES|$.

Označimo s O središte kružnice k. Korištenjem prethodno dokazanih tvrdnji o točkama P, R i S redom računamo:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle ARP + \sphericalangle PSA &= (180^\circ - \sphericalangle PAR - \sphericalangle RPA) + (180^\circ - \sphericalangle SAP - \sphericalangle APS) \\
&= (360^\circ - \sphericalangle RPA - \sphericalangle APS) - (\sphericalangle PAR + \sphericalangle SAP) \\
&= \sphericalangle SPR - \sphericalangle SAR = \sphericalangle EPR + \sphericalangle SPE - \sphericalangle SAR \\
&= 90^\circ - \frac{\sphericalangle REP}{2} + 90^\circ - \frac{\sphericalangle PES}{2} - \frac{\sphericalangle SOR}{2} \\
&= 180^\circ - \frac{\sphericalangle RES + \sphericalangle SOR}{2} = 180^\circ - 90^\circ \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$