MEDO 2024./2025.

Drugo kolo

30.11.2024.

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-2.1. [10 bodova]

Izračunaj veličinu manjega kuta između satne i minutne kazaljke ure u 15 sati 33 minute i 24 sekunde.

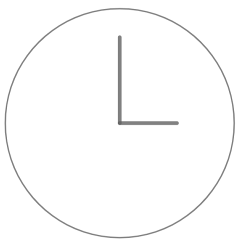
Rješenje.

Prisjetimo se da kutove mjerimo u stupnjevima i minutama, gdje je $1° = 60'$ (jedan kutni stupanj ima 60 kutnih minuta). Odredimo najprije kolike kutove obrišu velika (minutna) i mala (satna) kazaljka ure za jednu minutu odnosno jednu sekundu.

Velika kazaljka za jedan sat prođe cijeli krug, dakle za jedan sat obriše kut od 360°. Za jednu minutu prijeđe šezdesetinu tog puta, što znači da obriše kut od $\frac{360°}{60} = 6°$. Konačno, u jednoj sekundi prijeđe šezdeseti dio tog puta, dakle obriše kut od $\frac{6°}{60} = 0.1° = 6'$.

Mala kazaljka za jedan sat prijeđe dvanaestinu punog kruga, što znači da obriše kut od $\frac{360°}{12} = 30°$. Za jednu minutu prijeđe šezdesetinu tog puta, što znači da obriše kut od $\frac{30°}{60} = 0.5° = 30'$. Konačno, u jednoj sekundi prijeđe šezdeseti dio tog puta, dakle obriše kut od $\frac{30'}{60} = 0.5'$.

Vratimo se sada na naše pitanje. U točno 15:00:00, mala i velika kazaljka zatvaraju pravi kut (90°) i mala je ispred velike.



U iduće 33 minute velika kazaljka obriše kut od $33 \cdot 6° = 198°$, a mala kut od $33 \cdot 0.5° = 16.5° = 16°30'$. Nakon još 24 sekunde, velika obriše kut od $24 \cdot 6' = 144' = 2°24'$, a mala kut od $24 \cdot 0.5' = 12'$. Dakle, velika kazaljka od 15:00:00 do 15:33:24 ukupno prebriše kut od $198° + 2°24' = 200°24'$, a mala kut od $16°30' + 12' = 16°42'$.

Stoga je u 15:33:24 velika kazaljka ispred male i kut između njih iznosi

$$200^\circ 24' - (90^\circ + 16^\circ 42') = 93^\circ 42'.$$

Zadatak J-2.2. [20 bodova]

Mirko čita knjigu. Prvog dana pročitao je petinu knjige. Drugog dana pročitao je dvije sedmine ostatka knjige. Trećeg dana pročitao je 23 stranice. Četvrtog dana pročitao je trećinu ostatka knjige. Petog dana pročitao je polovicu preostalog dijela knjige, a šestog dana pročitao je knjigu do kraja.

Koliko najmanje stranica može imati Mirkova knjiga, ako znamo da je svakog dana pročitao prirodan broj stranica?

Rješenje.

Označimo broj stranica knjige s n; iz uvjeta zadatka znamo da je n prirodan broj. Sada možemo izraziti broj stranica koje Mirko pročita svakog dana preko n. Prvog dana pročitao je $\frac{1}{5} \cdot n = \frac{n}{5}$ stranica; kako je svakog dana pročitao prirodan broj stranica, i ovo mora biti prirodan broj, stoga n mora biti djeljiv s 5.

Znamo da je drugog dana pročitao dvije sedmine **ostatka** knjige. Odredimo najprije koliki je taj ostatak: od ukupnog broja stranica oduzimamo stranice pročitane prvi dan, pa dobijemo $n - \frac{n}{5} = \frac{4n}{5}$. Dakle, drugog dana je pročitao još $\frac{2}{7} \cdot \frac{4n}{5} = \frac{8n}{35}$. Kako i ovaj broj mora biti prirodan, zaključujemo da je n djeljiv s 35, jer 8 nema zajedničkih faktora s 35. Nakon drugog dana preostane mu još $\frac{4n}{5} - \frac{8n}{35} = \frac{4n}{7}$ stranica.

Trećeg dana pročitao je daljnje 23 stranice, pa mu je ostalo još $\frac{4n}{7} - 23 = \frac{4n-161}{7}$ stranica. Četvrtog dana pročita još jednu trećinu preostalih stranica, pa mu ostane još dvije trećine ostatka, što iznosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{4n-161}{7} = \frac{8n-332}{21}$. Petog dana pročita *polovicu* preostalog dijela *(isprike još jednom svima na pogrešci prilikom originalnog prijepisa zadatka)*, pa mu ostane još $\frac{1}{2} \cdot \frac{8n-332}{21} = \frac{4n-161}{21}$ stranica, koje pročita šesti i zadnji dan.

Svi navedeni razlomci moraju biti prirodni brojevi. Stoga zaključujemo da n mora biti djeljiv s 35 te da $4n - 161$ mora biti djeljiv s 21. Također, mora vrijediti i $4n - 161 > 0$, tj. $n > 40$. Provjerom prvih nekoliko višekratnika broja 35 (35, 70, 105, 140, ...) dobijemo da je 140 najmanji broj koji zadovoljava sve uvjete. Stoga je najmanji mogući broj stranica Mirkove knjige solidnih 140.

Zadatak J-2.3. [30 bodova]

Odredi sve trojke znamenaka a, b i c (uz $a, c \neq 0$) takve da vrijedi jednakost:

$$\overline{abac} = a \cdot \overline{aa} \cdot \overline{c6}.$$

Rješenje.

S desne strane jednakosti imamo umnožak tri prirodna broja: a, $\overline{aa}$ i $\overline{c6}$; pogledajmo možemo li nešto zaključiti iz toga. Zadnji broj $\overline{c6}$ završava na znamenku 6, stoga je sigurno paran broj (broj je paran onda i samo onda kad završava na parnu znamenku). Kada u umnošku imamo paran broj, konačni umnožak mora također biti paran. Stoga je broj s desne strane jednakosti paran, pa takav mora biti i broj $\overline{abac}$ s lijeve strane. Njegova zadnja znamenka je c, pa zaključujemo da c mora biti paran. Kako zbog uvjeta zadatka ne može biti 0, ostaju nam 4 mogućnosti: $c = 2$, 4, 6 ili 8.

Promotrimo najprije mogućnost $c = 2$; broj $\overline{c6}$ je tada jednak 26. Primijetimo da vrijedi $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. Jednakost sada postaje:

$$\overline{aba2} = a \cdot 11a \cdot 26 = a^2 \cdot 11 \cdot 26.$$

Desna strana jednakosti sada ovisi samo o vrijednosti znamenke a. Sada bismo mogli promatrati sve mogućnosti za a i u svakom slučaju odrediti je li jednakost zadovoljena za neki izbor znamenke b; no, već znamo zadnju znamenku broja s lijeve strana pa si možemo skratiti posao. Pogledajmo koliko može iznositi zadnja znamenka broja s desne strane. Znamo da je zadnja znamenka umnoška jednaka zadnjoj znamenki umnoška zadnjih znamenaka (jednostavnije rečeno, zadnja znamenka umnoška ovisi jedino o zadnjim znamenkama faktora). Uvrštavamo redom moguće vrijednosti za a (radi lakšeg zapisa koristimo modularnu aritmetiku s modulom 10, za pojašnjenje vidi Edukativno rješenje 5. zadatka iz prošlog kola):

a	$a^2 \pmod{10}$	$a^2 \cdot 11 \cdot 26 \pmod{10}$
1	1	6
2	4	4
3	9	4
4	6	6
5	5	0
6	6	6
7	9	4
8	4	4
9	1	6

Primjećujemo da u nijednom slučaju zadnja znamenka umnoška nije 2 (primijetite usput simetriju oko srednjeg umnoška; to nije slučajno, probajte shvatiti zašto; pojasnit ćemo na radionici). Stoga jednakost nije zadovoljena ni za jedan a, pa nema rješenja u slučaju $c = 2$.

Promatrajmo sada slučaj $c = 4$. Jednakost postaje:

$$\overline{aba4} = a^2 \cdot 11 \cdot 46.$$

Provedena analiza zadnje znamenke pokazuje da su jedine mogućnosti za a znamenke 2, 3, 7, 8. Uvrštavajući ove vrijednosti redom dobijemo umnoške 2024, 4554, 24794, 32384. Vidimo da jedino prvi umnožak ima traženi oblik $\overline{abac}$, pa je jedina tražena trojka u ovom slučaju $(a, b, c) = (2, 0, 4)$.

Preostaju slučajevi $c = 6$ i $c = 8$. Za slučaj $c = 8$ direktno iz provedene analize zadnje znamenke vidimo da nema rješenja. U slučaju $c = 6$ mogući izbori za a su 1, 4, 6 i 9; direktnom provjerom svih umnožaka u ovim slučajevima dobijemo da niti jedan nije oblika $\overline{abac}$ ($1^2 \cdot 11 \cdot 66 = 726$ je premalo, a već $4^2 \cdot 11 \cdot 66 = 11616$ je preveliko), što znači da nema daljnjih rješenja.

Zadatak J-2.4. [40 bodova]

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji sadrže blok znamenki „15” i djeljivi su s 15? (Primjerice, 3**15**45 i 34**15**5 su dva takva broja.)

Rješenje.

Dvije znamenke peteroznamenkastog broja koji zadovoljava dane uvjete su 1 i 5; označimo preostale tri s A, B i C. Kako znamenke 1 i 5 moraju tvoriti jedan blok, svi brojevi moraju biti jednog od sljedećih oblika:

$$\overline{15ABC},\ \overline{A15BC},\ \overline{AB15C} \text{ ili } \overline{ABC15}.$$

Nadalje, svaki promatrani broj mora biti djeljiv s $15 = 3 \cdot 5$, dakle djeljiv je s 3 i 5. Zbog djeljivosti s 5, znamo da zadnja znamenka mora biti 0 ili 5. Stoga se prethodni oblici dalje dijele na:

$$\overline{15AB0},\ \overline{15AB5},\ \overline{A15B0},\ \overline{A15B5},\ \overline{AB150},\ \overline{AB155} \text{ ili } \overline{ABC15}. \tag{$\star$}$$

Promotrimo prvi oblik $\overline{15AB0}$. Ovaj broj mora biti djeljiv s 3. Pravilo o djeljivosti s 3 nam tada kaže da zbroj znamenki ovog broja $1 + 5 + A + B + 0 = 6 + A + B$ mora biti djeljiv s 3. Pribrojnik 6 je djeljiv s 3, pa takav mora biti i preostali zbroj $A+B$. No, ovo je isto kao da je dvoznamenkasti broj $\overline{AB}$ djeljiv s 3, s tim da A može biti i 0. Tada su svi mogući brojevi AB jednaki:

$$00,\ 03,\ 06,\ 09,\ 12,\ \ldots,\ 96,\ 99.$$

Ovih kombinacija ima $\frac{99-0}{3}+1=34$.

Za drugi oblik $\overline{15AB5}$, dobijemo da zbroj $1+5+A+B+5=11+A+B$ mora biti djeljiv s 3. Sada vidimo da zbroj $A+B$ mora davati ostatak 1 pri dijeljenju s 3, što je ekvivalentno tome da broj $\overline{AB}$ daje ostatak 1. Stoga su sve moguće kombinacije za $\overline{AB}$ jednake:

$$01,\ 04,\ 07,\ 10,\ \ldots,\ 94,\ 97.$$

Ovih kombinacija ima 33 (jedan manje nego u prethodnom slučaju).

Kod trećeg oblika $\overline{A15B0}$ ponovno dobijemo da broj $\overline{AB}$ mora biti djeljiv s 3, no znamenka A u ovom slučaju ne smije biti 0, jer bismo dobili četveroznamenkasti broj umjesto peteroznamenkastog. Stoga je broj kombinacija u ovom slučaju jednak $34-4=30$.

Kod četvrtog oblika $\overline{A15B5}$ zaključujemo analogno i dobijemo da je broj kombinacija ponovno jednak $33-3=30$. Za peti oblik $\overline{AB150}$ broj kombinacija je također 30, kao i za šesti oblik $\overline{AB155}$.

Preostaje još samo izbrojati broj kombinacija znamenaka za sedmi oblik $\overline{ABC15}$. Ovdje vidimo da troznamenkasti broj $\overline{ABC}$ mora biti djeljiv s 3 te $A\neq 0$. Stoga su sve moguće kombinacije:

$$102,\ 105,\ 108,\ 111,\ \ldots,\ 996,\ 999,$$

kojih je ukupno $\frac{999-102}{3}+1=300$.

Do sada smo izbrojali ukupno

$$34+33+30+30+30+30+300=487$$

brojeva koji zadovoljavaju dano svojstvo. Međutim, neke od njih smo brojali više od jednom! Stoga moramo otkriti koliko je takvih i oduzeti od ovog broja, jer svaki broj moramo brojati točno jednom.

Da bismo to učinili, moramo vidjeti koji brojevi se mogu prikazati na dva ili više oblika iz ($\star$). Počnimo s brojevima oblika $\overline{15AB0}$: oni ne mogu biti prikazani u obliku $\overline{15AB5}$ (razlikuju se u zadnjoj znamenci), u obliku $\overline{A15B0}$ (druga znamenka), u obliku $\overline{A15B5}$ (druga znamenka), u obliku $\overline{AB155}$ (zadnja znamenka), niti u obliku $\overline{ABC15}$ (zadnja znamenka). Vidimo dakle da se brojevi oblika $\overline{15AB0}$ mogu prikazati još jedino u obliku $\overline{AB150}$. Pitamo se koliko smo brojeva prebrojali „duplo", jednom u svakoj od ove dvije skupine – to su upravo oni koji spadaju u obje skupine. Vidimo da je to jedino broj $\overline{15150}$, koji doista zadovoljava uvjete zadatka, dakle 1 broj smo brojali dva puta u ovom slučaju.

Nastavljamo s drugim oblikom $\overline{15AB5}$. Brojevi ovog oblika mogu biti i oblika $\overline{AB155}$ te oblika $\overline{ABC15}$. Prve dvije navedene skupine imaju samo 15155 kao zajednički broj, no on nije djeljiv s 3, pa ga nismo ni brojali. Brojevi koji istovremeno spadaju u skupinu oblika $\overline{15AB5}$ i $\overline{ABC15}$ su 15015, 15315, 15615 i 15915, što su 4 broja u ovom slučaju.

Brojevi oblika $\overline{A15B0}$ ne mogu biti niti jednog od drugih oblika. Brojevi oblika $\overline{A15B5}$ mogu biti i oblika $\overline{ABC15}$; u ovom slučaju, zajednički brojevi su $\overline{31515}$, $\overline{61515}$ i $\overline{91515}$, dakle 3 broja. Brojevi oblika $\overline{AB150}$ ne mogu biti niti jednog sljedećeg oblika, kao ni brojevi oblika $\overline{AB155}$.

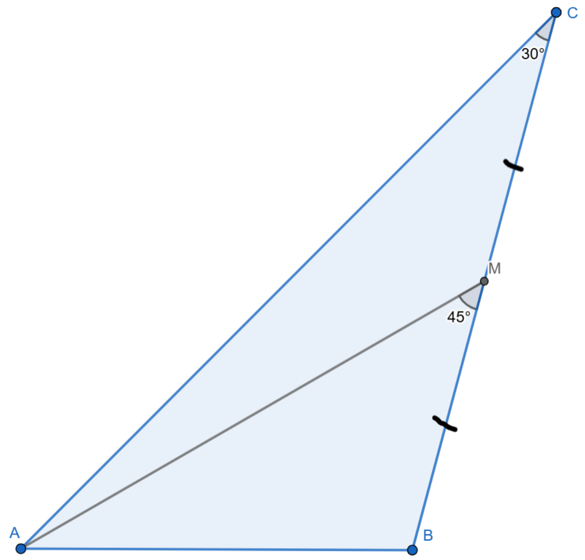
Konačno, možemo izračunati traženi broj, oduzimajući broj duplo prebrojanih kombinacija:

$$487-1-4-3=479.$$

Zadatak J-2.5. [50 bodova]

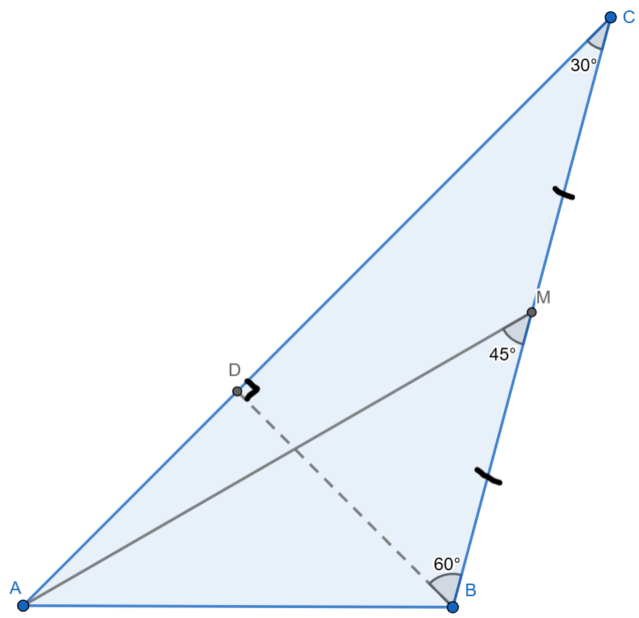
Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Ako je $\sphericalangle AMB=45^\circ$ i $\sphericalangle ACM=30^\circ$, koliko iznosi $\sphericalangle BAM$?

Rješenje.

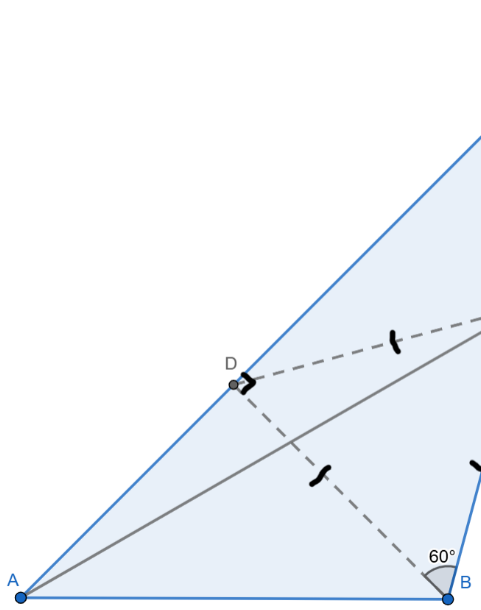


Sa slike vidimo da nam u ovoj geometrijskoj konfiguraciji nije dano mnogo podataka. Stoga ćemo morati ponovno docrtavati objekte kako bismo odredili traženu veličinu kuta. Razmislimo kako to možemo učiniti. Jedino što nam je poznato je postojanje kutova veličine $30°$ i $45°$. Ovi kutovi nas mogu podsjetiti na dva poznata trokuta: polovina jednakostraničnog trokuta (s kutovima od $30°$, $60°$ i pravim kutom) te jednakokračni pravokutni trokut (s dva kuta od $45°$ i pravim kutom). U svakom slučaju, potaknuti smo da tražimo kako uvesti pravi kut u našu sliku, jer bismo na taj način mogli stvoriti jedan od navedenih trokuta.

Povlačenje okomice iz točke B na težišnicu $\overline{AM}$ kako bismo dobili jednakokračni pravokutni trokut je jedan mogući način, ali ne čini se obećavajuć. Stoga krećemo drugim putem, možda i prirodnijim, i povlačimo okomicu iz točke B na stranicu $\overline{AC}$, tj. visinu trokuta ABC iz vrha B: time dobivamo polovinu jednakostraničnog trokuta BCD, gdje je D nožište visine iz točke B.



Kako je trokut BCD polovina jednakostraničnog trokuta, znamo da je stranica $\overline{BD}$ upola kraća od stranice $\overline{BC}$. No, tada vrijedi $|BD| = |BM|$, jer je $\overline{BM}$ upravo polovica stranice $\overline{BC}$. To nas potiče da docrtamo i dužinu $\overline{DM}$, jer time dobivamo jednakostranični trokut BMD (kao jednakokračni s jednim kutem od $60°$).



Sada konačno možemo krenuti s određivanjem kutova. Zanima nas veličina kuta $\sphericalangle BAM$. Njega možemo dobiti kao razliku kutova $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle MAD$. Kut $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAC$ lagano odredimo iz trokuta AMC: vanjski kut kod vrha M iznosi $45°$, pa vrijedi $\sphericalangle MAC + \sphericalangle ACM = 45°$, pa zbog $\sphericalangle ACM = 30°$ dobijemo $\sphericalangle MAC = 15°$.

Primijetimo sada da je trokut AMD jednakokračan: vrijedi $\sphericalangle MAD = \sphericalangle DMA$, jer zbog $\sphericalangle DMB = 60°$ dobijemo $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMB - \sphericalangle AMB = 60° - 45° = 15°$. Stoga vrijedi $|AD| = |DM| = |BD|$, pa je i trokut ABD jednakokračan. Kako je $\sphericalangle ADB$ pravi kut, odmah dobijemo $\sphericalangle BAD = 45°$. Stoga konačno možemo dobiti veličinu traženog kuta $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BAD - \sphericalangle MAD = 45° - 15° = 30°$.

Zadatak J-2.6. [60 bodova]

Odredi sve prirodne brojeve n za koje za koje se razlomak $\dfrac{7n+1}{4n+3}$ može skratiti prirodnim brojem većim od 1.

Prvo rješenje.

Ako se dani razlomak može skratiti prirodnim brojem većim od 1, nazovimo ga k, tada postoje prirodni brojevi a i b takvi da vrijedi $7n+1 = ka$ i $4n+3 = kb$. Promotrimo sada razliku ovih brojeva:

$$(7n+1) - (4n+3) = 3n-2 = ka - kb = k(a-b).$$

Sada vidimo da vrijedi $k \mid 3n-2$. Općenito će vrijediti da ako $k \mid x$ i $k \mid y$, tada i $k \mid (x-y)$. Nastavimo stoga dalje s postupkom. Oduzimanjem $3n-2$ od izraza $4n+3$ dobijemo da k dijeli i $n+5$. Konačno, oduzimanjem $n+5$ tri puta od $3n-2$, dobijemo da k dijeli i

$$(3n-2) - 3\cdot(n+5) = -17.$$

Jedini pozitivni djelitelji od -17 su 1 i 17. Kako smo uzeli $k > 1$, ostaje mogućnost $k = 17$.

Sada znamo da mora vrijediti $17 \mid n+5$, što znači da vrijedi $n = 17m - 5$, za neki prirodni broj m. Uvrštavanjem u početne jednakosti dobijemo da vrijedi:

$$7\cdot(17m-5) + 1 = 7\cdot 17m - 34 = 17\cdot(7m-2)$$
$$4\cdot(17m-5) + 3 = 4\cdot 17m - 17 = 17\cdot(4m-1),$$

dakle, 17 doista skraćuje početni razlomak $\dfrac{7n+1}{4n+3}$ za bilo koji $n = 17m-5$, gdje je m proizvoljan prirodni broj. Kako je ovo jedina mogućnost, ovo su svi brojevi koji zadovoljavaju traženo svojstvo.

Drugo rješenje.

Promatramo najveći zajednički djelitelj brojnika i nazivnika $D := \mathrm{NZD}(7n+1, 4n+3)$. U zadatku se zapravo traži da odredimo sve n za koje vrijedi $D > 1$, jer se tada dani razlomak može skratiti s D.

Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja provodimo uzastopno koristeći jednakost $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(a-b, b)$, gdje su a i b proizvoljni prirodni brojevi (nije važan redoslijed brojeva, jer vrijedi $\mathrm{NZD}(a, b) = \mathrm{NZD}(b, a)$). Primjenjujući to na naše brojeve, dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(7n+1, 4n+3) &= \mathrm{NZD}(3n-2, 4n+3) = \mathrm{NZD}(3n-2, n+5)\\ &= \mathrm{NZD}(2n-7, n+5) = \mathrm{NZD}(n-12, n+5) = \mathrm{NZD}(-17, n+5).\end{aligned}$$

Dobili smo da D dijeli -17, pa mora biti $D = 1$ ili $D = 17$; tražimo $D > 1$, pa ostaje jedino mogućnost $D = 17$. Sada analogno kao u prvom rješenju dobijemo da n može biti bilo koji prirodni broj oblika $17m - 5$.

Zadatak J-2.7. [70 bodova]

Neka su a, b, c i d pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} a^2 + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{2} \\ b^2 + \dfrac{4}{c^2} = 8 \\ c^2 + \dfrac{16}{d^2} = 2 \\ d^2 + \dfrac{4}{a^2} = 32. \end{cases}$$

Odredi vrijednost umnoška $abcd$.

Prvo rješenje.

Množenjem svih jednadžbi dobijemo

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right)\left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) = 2^8.$$

Po AG nejednakosti vrijedi $a^2 + \frac{1}{b^2} \geqslant 2 \cdot \frac{a}{b}$, gdje se jednakost postiže ako i samo ako je $a = \frac{1}{b}$. Analogno vrijedi i $b^2 + \frac{4}{c^2} \geqslant 4 \cdot \frac{b}{c}$ (jednakost ako i samo ako $b = \frac{2}{c}$), $c^2 + \frac{16}{d^2} \geqslant 8 \cdot \frac{c}{d}$ (jednakost ako i samo ako $c = \frac{4}{d}$) i $d^2 + \frac{4}{a^2} \geqslant 4 \cdot \frac{d}{a}$ (jednakost ako i samo ako $d = \frac{2}{a}$). Množenjem navedenih nejednakosti dobijemo

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b^2 + \frac{4}{c^2}\right)\left(c^2 + \frac{16}{d^2}\right)\left(d^2 + \frac{4}{a^2}\right) \geqslant 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot 4 \cdot \frac{b}{c} \cdot 8 \cdot \frac{c}{d} \cdot 4 \cdot \frac{d}{a} = 2^8.$$

Usporedbom s prethodno dobivenom jednakosti, vidimo da se u ovoj nejednakosti zapravo postiže jednakost. To je moguće jedino ako se jednakost postiže u svim navedenim nejednakostima, dakle mora vrijediti $a = \frac{1}{b}$, $b = \frac{2}{c}$, $c = \frac{4}{d}$ i $d = \frac{2}{a}$. Množenjem svih ovih jednakosti dobijamo $abcd = \frac{16}{abcd}$, odakle je $(abcd)^2 = 16$. Kako su svi a, b, c i d pozitivni, zaključujemo da vrijedi $abcd = 4$.

Drugo rješenje.

Uvođenjem supstitucija $a = \dfrac{x}{2}$, $b = 2y$, $c = z$ i $d = 4t$, polazni sustav postaje:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4y^2} = \dfrac{1}{2} \\ 4y^2 + \dfrac{4}{z^2} = 8 \\ z^2 + \dfrac{16}{16t^2} = 2 \\ 16t^2 + \dfrac{4 \cdot 4}{x^2} = 32. \end{cases}$$

Množenjem prve jednadžbe s 4, druge s $\frac{1}{4}$ i četvrte s $\frac{1}{16}$ dobivamo ekvivalentni sustav:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} = 2, \\ \\ y^2 + \dfrac{1}{z^2} = 2, \\ \\ z^2 + \dfrac{1}{t^2} = 2, \\ \\ t^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2. \end{cases}$$

Sada zbrajanjem svih jednadžbi dobijemo

$$x^2 + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{1}{z^2} + z^2 + \frac{1}{t^2} + t^2 + \frac{1}{x^2} = 8.$$

Za svaki pozitivni realni broj u po AG nejednakosti vrijedi $u + \frac{1}{u} \geqslant 2$, uz jednakost ako i samo ako je $u = 1$. Zbrajanjem nejednakosti $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$, $y^2 + \frac{1}{y^2} \geqslant 2$, $z^2 + \frac{1}{z^2} \geqslant 2$ i $t^2 + \frac{1}{t^2} \geqslant 2$ dobijamo

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 + \frac{1}{z^2} + t^2 + \frac{1}{t^2} \geqslant 8.$$

No, znamo da se u ovoj nejednakosti zapravo postiže jednakost. Stoga se u svim navedenim nejednakostima također postiže jednakost, tj. vrijedi $x^2 = y^2 = z^2 = t^2 = 1$. Kako su svi brojevi pozitivni, mora biti $x = y = z = t = 1$. Konačno izračunamo $abcd = \frac{x}{2} \cdot 2y \cdot z \cdot 4t = 4xyzt = 4$.