MEDO 2024./2025.

Prvo kolo

26.10.2024.

Zadaci i rješenja

Seniori

Zadatak S-1.1. [10 bodova]

Leda prehoda određeni put po ravnoj stazi i vrati se natrag (istim putem) autobusom za ukupno 3 sata i 45 minuta. Ako isti put prijeđe vozeći bicikl, a natrag ponovno autobusom, treba joj ukupno 2 sata i 15 minuta.

Ako znamo da Leda vozi bicikl dvostruko brže nego što hoda, koliko bi joj ukupno vremena trebalo da prijeđe isti put (u oba smjera) vozeći bicikl cijelim putem?

Prvo rješenje.

Kako Leda u prva dva „izleta" u povratku uvijek putuje autobusom, razlika u vremenima između dužeg i kraćeg izleta stvori se samo u prvom dijelu puta. Dakle, 1 sat i 30 minuta joj treba duže dok ide pješke nego dok ide biciklom, u jednom smjeru.

S druge strane, znamo da je vrijeme koje joj treba da pređe put pješke točno dvostruko veće od vremena koje joj treba da isti put prijeđe biciklom, jer je poznato da je biciklom dvostruko brža. Stoga joj biciklom u jednom smjeru treba upravo 1 sat i 30 minuta. Za oba smjera vozeći bicikl joj onda treba ukupno 3 sata.

Drugo rješenje.

Označimo s t_P, t_B i t_A redom vremena koja Ledi trebaju da prijeđe put u jednom smjeru pješke, biciklom, odnosno autobusom. Iz uvjeta zadatka znamo da vrijedi:

$$t_P + t_A = 2\,\mathrm{h}\ 45\,\mathrm{min} = 165\,\mathrm{min}$$
$$t_B + t_A = 1\,\mathrm{h}\ 15\,\mathrm{min} = 75\,\mathrm{min}$$
$$t_P = 2t_B$$

Oduzimanjem prve dvije jednadžbe dobivamo $t_P - t_B = 90\,\mathrm{min}$. Sada uvrštavanjem t_P iz treće jednadžbe direktno dobijamo $t_B = 90\,\mathrm{min}$. Zaključujemo da Ledi u dva smjera biciklom treba $2t_B = 180\,\mathrm{min}$, dakle 3 sata.

Zadatak S-1.2. [20 bodova]

Neka je $M = 5555^{4444}$ i $N = 5555^{2222}$. Odredi ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9.

Rješenje.

Zadani brojevi su očito preveliki za direktno računanje ostataka. Stoga ćemo trebati koristiti matematički alat koji nam olakšava računanje s ostatcima pri dijeljenju. Taj alat se zove *modularna aritmetika* i detaljno je pojašnjen kroz edukativno rješenje za one koji se još nisu susreli s njim.

Najprije primijetimo da umjesto direktnog potenciranja broja M na N-tu potenciju možemo potencirati njegov ostatak pri dijeljenju s 9. Stoga najprije određujemo koji ostatak daje $M = 5555^{4444}$ pri dijeljenju s 9. Ponovno možemo primijeniti isti argument da zaključimo da prvo treba odrediti koliki ostatak daje 5555 pri dijeljenju s 9. Dijeljenjem dobijemo da je taj ostatak jednak 2.

Idući zadatak je odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 za broj 2^{4444}. Potencije broja 2 pri dijeljenju s 9 periodički daju ostatke 1, 2, 4, 8, 7 i 5. Stoga ćemo dobiti da 2^{4444} daje isti ostatak pri dijeljenju s 9 kao i 2^4, jer je 4 ostatak pri dijeljenju sa 6 (= duljina perioda) broja 4444. Dakle, ostatak pri dijeljenju broja 2^{4444}, a time i $M = 5555^{4444}$, pri dijeljenju s 9 je 7.

Sada trebamo odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 7^N. Stoga promatramo periodične ostatke koje potencije broja 7 daju pri dijeljenju s 9; dobijemo da su to 1, 7 i 4. Stoga trebamo odrediti ostatak broja N pri dijeljenju s 3, što će nam reći kojoj potenciji broja 7 je taj ostatak jednak.

N je potencija 5555^{4444} te vrijedi da je ostatak pri dijeljenju baze 5555 s 3 jednak 2, pa možemo promatrati potenciju 2^{4444}. Potencije broja 2 pri dijeljenju s 3 periodično daju ostatke 1 i 2, što znači da je ostatak kojeg daje potencija 2^{4444}, a time i $N = 5555^{4444}$ jednak 1.

Vratimo se sada na 7^N. Kako N daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, ova potencija će dati ostatak **7** pri dijeljenju s 9. Time smo stigli do kraja izračuna.

Edukativno rješenje.

Počinjemo od osnovnih zapažanja koja će nam u konačnici omogućiti rješavanje danog problema. „Usput” ćemo se upoznati s već spomenutim matematičkim alatom, modularnom aritmetikom.

Prva činjenica koja će nam trebati je sljedeća: ostatak pri dijeljenju s 9 umnoška neka dva broja jednak je umnošku ostataka tih brojeva pri dijeljenju s 9. Doista, neka su ti brojevi a i b te neka su p i q redom ostatci koji oni daju pri dijeljenju s 9. To znači da vrijedi $a = 9k + p$ i $b = 9\ell + q$, za neke prirodne brojeve k i ℓ (to su količnici dijeljenja s 9 brojeva a i b, no oni nam nisu zanimljivi ovdje). Pomnožimo sada ove brojeve:

$$a \cdot b = (9k + p)(9\ell + q) = 81k\ell + 9(kq + p\ell) + pq.$$

Vidimo da su prva dva pribrojnika u zadnjem raspisu uvijek djeljiva s 9. Stoga je ostatak pri dijeljenju umnoška ab s 9 isti kao i ostatak kojeg daje umnožak pq.

Naglasimo da isti rezultat vrijedi i za zbroj dva broja (dokaže se na potpuno analogan način). Također, uočimo da ove činjenice vrijede neovisno o broju s kojim dijelimo.

Primijetimo sada da, kako je potenciranje ništa drugo doli uzastopno množenje broja sa samim sobom, umjesto broja kojeg potenciramo i onda promatramo ostatak pri dijeljenju s 9, možemo odmah računati s ostatkom kojeg on daje pri dijeljenju s 9. To nam omogućuje da drastično smanjimo brojeve koje potenciramo.

Sve što smo do sada opisali poznato je u matematici pod imenom *modularna aritmetika*. Kako nam ova tehnika pomaže kod rješavanja mnogih zadataka iz teorije brojeva, upoznajmo se malo s njom i uvedimo standarne oznake koje će nam pomoći u lakšem zapisivanju rješenja. Neka je ostatak koji neki prirodni broj a daje pri dijeljenju s 9 jednak p, kao i prije. Kraće ćemo ovo zapisivati kao:

$$a \equiv p \pmod 9 \text{ (čita se „}a\text{ je kongruentno }p\text{ modulo 9”).}$$

Primjerice, vrijedi $2024 \equiv 8 \pmod 9$.

Iz onoga što smo do sada dokazali, vidimo da za $a \equiv p \pmod D$ i $b \equiv q \pmod D$, gdje je D proizvoljan prirodni broj s kojim dijelimo (u našem slučaju je $D = 9$, ali pišemo općenito), vrijede sljedeće tvrdnje:

$$\begin{aligned} a + b &\equiv p + q \pmod D \\ a \cdot b &\equiv p \cdot q \pmod D \\ a^n &\equiv p^n \pmod D. \end{aligned}$$

Okrenimo se sada s ovim alatom našem problemu. Krajnji cilj nam je odrediti ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9. Iz onoga što smo do sada zaključili, znamo da umjesto M možemo potencirati njegov ostatak pri dijeljenju s 9. Dakle, odredimo najprije ostatak pri dijeljenju broja $M = 5555^{4444}$ s 9.

Možemo ponovno primijeniti isto razmišljanje i zaključiti da umjesto baze 5555 možemo potencirati ostatak ovog broja pri dijeljenju s 9. Dakle, određujemo ostatak pri dijeljenju broja 5555 s 9. Ovo možemo učiniti „pješke" pisanim dijeljenjem, ali i ovdje nam posao može skratiti modularna aritmetika. Prisjetimo se da djeljivost s 9 nekog broja možemo odrediti zbrajajući njegove znamenke i promatranjem djeljivosti dobivenog zbroja s 9. Vrijedi i jača tvrdnja od ovoga: ostatak pri dijeljenju bilo kojeg broja s 9 upravo je jednak ostatku kojeg pri dijeljenju s 9 daje zbroj znamenki ovog broja.

Dokažimo i ovu tvrdnju koristeći modularnu aritmetiku. Neka je promatrani broj zapisan u dekadskom zapisu kao $\overline{z_n z_{n-1} \cdots z_2 z_1 z_0}$, gdje su svi z_0, z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1} i z_n znamenke. Ključno je primjetiti da vrijedi $10 \equiv 1 \pmod 9$. Zbog pravila o modularnom potenciranju, dobijemo i da vrijedi $10^e \equiv 1^e = 1 \pmod 9$, za bilo koji eksponent e. Sada raspisom broja u dekadskom sustavu i primjenom prethodnih pravila o modularnom računanju direktno dobivamo:

$$\begin{aligned}
\overline{z_n z_{n-1} \cdots z_2 z_1 z_0} &= z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0 \\
&\equiv z_n \cdot 1 + z_{n-1} \cdot 1 + \cdots + z_2 \cdot 1 + z_1 \cdot 1 + z_0 \pmod 9 \\
&= z_n + z_{n-1} + \cdots + z_2 + z_1 + z_0 \pmod 9.
\end{aligned}$$

Dakle, umjesto direktnog dijeljenja broja s 9, možemo gledati ostatak koji zbroj njegovih znamenki daje pri dijeljenju s 9. Za broj 5555 tako dobijemo da je ostatak pri dijeljenju s 9 jednak 2.

Dokazali smo da vrijedi $5555^{4444} \equiv 2^{4444} \pmod 9$. Dakle, treba odrediti ostatak pri dijeljenju broja 2^{4444} pri dijeljenju s 9. Za ovo, koristimo novi „trik". Promotrimo prvih par potencija broja 2 i ostatke koje daju pri dijeljenju s 9:

$$\begin{aligned}
2^1 &= 2 \equiv 2 \pmod 9 \\
2^2 &= 4 \equiv 4 \pmod 9 \\
2^3 &= 8 \equiv 8 \pmod 9 \\
2^4 &= 16 \equiv 7 \pmod 9 \\
2^5 &= 32 \equiv 5 \pmod 9 \\
2^6 &= 64 \equiv 1 \pmod 9 \\
2^7 &= 128 \equiv 2 \pmod 9 \\
2^8 &= 256 \equiv 4 \pmod 9 \\
2^9 &= 512 \equiv 8 \pmod 9 \\
2^{10} &= 1024 \equiv 7 \pmod 9 \\
2^{11} &= 2048 \equiv 5 \pmod 9 \\
2^{12} &= 4096 \equiv 1 \pmod 9 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Primjećujemo da se ostatci 2, 4, 8, 7, 5 i 1 periodički ponavljaju! Ovo će se doista uvijek događati kod potencija: naime, može postojati samo konačno mnogo različitih ostataka, a kad jednom dođemo do nekoga na kojem smo već bili, ostatci se počinju periodički ponavljati jer uvijek množimo dobiveni ostatak istim brojem.

Ako dodamo i „nulti red" $2^0 = 1 \equiv 1 \pmod 9$ u našu listu potencija, vidimo da je period ponavljanja ostataka jednak 6. Sada smo zaključili sljedeće: ostatci potencija broja 2 pri dijeljenju s 9 se periodički ponavljaju s periodom 6 i glase redom: 1, 2, 4, 8, 7 i 5. Primijetite usput da se u ovoj listi ne pojavljuju svi mogući ostatci pri dijeljenju s 9 (nema 0, 3 i 6). Takva opažanja važna su primjerice kod dokazivanja nepostojanja rješenja određenih diofantskih jednadžbi; nama ovdje to nije od interesa.

Sada je važno shvatiti da za određivanje ostatka pri dijeljenju s 9 broja 2^n moramo odrediti ostatak pri dijeljenju s 6 broja n. Time ćemo znati koliko smo otišli od početka perioda i koji ostatak ćemo dobiti.

U našem slučaju, želimo izračunati $2^{4444} \pmod 9$. Odredimo koliki ostatak daje 4444 pri dijeljenju s 6. Dobijemo da je to 4, jer je 4440 očito djeljiv s 2 i 3. Dakle, zbog pokazanog svojstva periodičnosti ostataka pri dijeljenju s 9 potencija broja 2, vrijedi $2^{4444} \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod 9$.

Rezimirajmo što smo do sada izračunali. Prvo smo uvidjeli da za računanje ostatka pri dijeljenju s 9 zadanog broja M^N moramo najprije odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 za bazu potencije M. Kako je i M sam potencija 5555^{4444}, prvo smo odredili ostatak pri dijeljenju s 9 za njegovu bazu 5555 i dobili da je taj ostatak 2. Onda smo promatranjem periodičnosti ostataka pri dijeljenju s 9 za potencije broja 2 zaključili da je ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 2^{4444} jednak 7. Ukratko:

$$M = 5555^{4444} \equiv 2^{4444} \pmod 9 \equiv 2^4 \pmod 9 \equiv 7 \pmod 9.$$

Dakle, sad smo „riješili" bazu potencije M^N. Sad nam je zadatak odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 7^N. Koristimo isti postupak da odredimo period ponavljanja ostataka kod potencije broja 7:

$$\begin{aligned}
7^0 &= 1 \equiv 1 \pmod 9\\
7^1 &= 7 \equiv 7 \pmod 9\\
7^2 &= 49 \equiv 4 \pmod 9\\
7^3 &= 343 \equiv 1 \pmod 9.
\end{aligned}$$

Dalje ne trebamo računati jer već sada znamo zaključiti da je period ponavljanja ostataka u ovom slučaju jednak 3. Dakle, da bismo odredili koji ostatak pri dijeljenju s 9 daje potencija 7^N, dovoljno je odrediti koji ostatak daje eksponent N pri dijeljenju s 3.

Eksponent N je u našem slučaju i sam potencija 5555^{2222}. Želimo odrediti njen ostatak pri dijeljenju s 3. Proceduru sada znamo: pojednostavimo bazu, promatramo period njenih potencija i odredimo ostatak pri dijeljenju ekponenta s tim periodom. Vrijedi $5555 \equiv 2 \pmod 3$ te

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1 \equiv 1 \pmod 3\\
2^1 &= 2 \equiv 2 \pmod 3\\
2^2 &= 4 \equiv 1 \pmod 3,
\end{aligned}$$

dakle period je u ovom slučaju 2. Kako je $2222 \equiv 0 \pmod 2$, konačno dobivamo:

$$N = 5555^{2222} \equiv 2^{2222} \pmod 3 \equiv 2^0 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3.$$

Dobili smo $M \equiv 7 \pmod 9$ i $N \equiv 1 \pmod 3$, gdje promatramo $N \bmod 3$ jer je period ponavljanja ostataka pri dijeljenju s 9 za potenciju s bazom 7 upravo jednak 3. Konačno dobijemo:

$$M^N \equiv 7^1 \pmod 9 \equiv \mathbf{7} \pmod 9.$$

Traženi ostatak je dakle jednak **7**.

Zadatak S-1.3. [30 bodova]

Za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi $a+b+c=1$ i $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=9$.

Izračunaj $\dfrac{1}{a^{2024}}+\dfrac{1}{b^{2024}}+\dfrac{1}{c^{2024}}$.

Prvo rješenje.

Igrajući se malo „pogađanja" rješenja, možemo vidjeti da „najjednostavniji" odabir za a, b i c u kojem su svi međusobno jednaki zadovoljava dva zadana uvjeta, jer tada iz prve jednakosti slijedi $a=b=c=\frac{1}{3}$, što uvrštavanjem u drugu doista daje točnu jednakost.

Ako pokušamo uvrstiti neke druge vrijednosti za a, b i c ne uspijevamo zadovoljiti obje jednakosti istovremeno (primjerice $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$, no $4+4+2=10 \neq 9$). Možda čak i primijetimo da koje god vrijednosti uvrstimo tako da zadovoljavaju prvu jednakost, vrijednost lijeve strane u drugoj jednakosti bude **veća** od 9.

Ovo nas može navesti da se zapitamo vrijedi li između dva izraza $a+b+c$ i $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ neki opći poredak s obzirom na veličinu. Odgovor na ovu slutnju je potvrdan i poznat je pod nazivom *AH nejednakost.* Pojasnimo malo ovaj izraz.

Aritmetička sredina je svima dobro poznat pojam; za tri pozitivna realna broja a, b i c definirana je kao realni broj

$$A = \frac{a+b+c}{3}.$$

Harmonijska sredina je pak manje poznata; za ista tri pozitivna realna broja a, b i c definira se kao realni broj

$$H = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Između ove dvije sredine (koje su ustvari realni brojevi) uvijek vrijedi isti „omjer snaga”: aritmetička sredina je uvijek barem toliko velika koliko i harmonijska, tj. za bilo koje a, b i c uvijek vrijedi $A \geq H$.

Dodatno, znamo čak i točno odrediti kada će vrijediti jednakost $A = H$: jednakost se postiže **samo** u slučaju da su svi brojevi čije sredine promatramo međusobno jednaki, tj. ako i samo ako vrijedi $a = b = c$.

Vidimo da su u našem zadatku upravo zadani izrazi koji se pojavljuju u računanju ove dvije sredine, stoga ih možemo odrediti. Aritmetička sredina iznosi $A = \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{1}{3}$, dok harmonijska iznosi $H = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$. Uočavamo da smo upravo dobili jednakost $A = H$! Stoga znamo točno kakav je odnos između polaznih brojeva a, b i c: mora vrijediti $a = b = c$.

Uvrštavanjem u prvu jednakost dobijemo već spomenutu vrijednost $a = b = c = \frac{1}{3}$. Već smo provjerili da ona zadovoljava i drugu jedankost. Sada možemo zaključiti da je ovo **jedini** slučaj u kojem su obe jednakosti istovremeno zadovoljene. Stoga je jedina moguća vrijednost izraza čiju vrijednost trebamo izračunati jednaka:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^{2024}}+\frac{1}{b^{2024}}+\frac{1}{c^{2024}} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2024}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2024}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2024}} = \frac{1}{\frac{1}{3^{2024}}}+\frac{1}{\frac{1}{3^{2024}}}+\frac{1}{\frac{1}{3^{2024}}}\\ &= 3^{2024}+3^{2024}+3^{2024} = 3\cdot 3^{2024} = \mathbf{3^{2025}}.\end{aligned}$$

Drugo rješenje. *(Credit: Mate Šarić)*

Zadatak se može riješiti i bez AH nejednakosti, spretnim korištenjem algebarskih transformacija.

Krenemo od druge jednakosti $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 9$ i pomnožimo je s abc da dobijemo $ab+bc+ca = 9abc$. Sada iskoristimo prvu jednakost $a+b+c = 1$ i pomnožimo lijevu stranu s 1 pa dobijemo:

$$\begin{gathered}(a+b+c)(ab+bc+ca) = 9abc\\ a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a = 9abc\\ (ab^2-2abc+ac^2)+(a^2b-2abc+bc^2)+(a^2c-2abc+b^2c) = 0\\ a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 = 0\end{gathered}$$

Prisjetimo se da su a, b i c pozitivni realni brojevi. Također, kvadrati realnih brojeva su uvijek nenegativni. Stoga je jedina mogućnost da je gornja jednakost zadovoljena u slučaju da vrijedi $(a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0$. Iz ovoga slijedi $a = b = c$. Sada kao u prvom rješenju lako dolazimo to konačnog rezultata.

Treće rješenje. *(Credit: Filip Šuškavčević)*

Kako je AG nejednakost poznatija od AH nejednakosti, pokažimo kako se zadatak može riješiti i samo koristeći AG. Primjenjujući AG nejednakost direktno na brojeve a, b i c i iskorištavajući prvu zadanu jednakost, dobijemo:

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc}\\ \frac{1}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \quad /^3\\ \frac{1}{27} &\geq abc.\end{aligned}$$

Primijenimo sada AG nejednakost na brojeve $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{c}$ te iskoristimo drugu zadanu jednakost da dobijemo:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\\ \frac{9}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \quad /^3\\ 27 &\geq \frac{1}{abc} \quad /^{-1}\\ \frac{1}{27} &\leq abc.\end{aligned}$$

Sve skupa, dobili smo da vrijedi $\frac{1}{27} \leq abc \leq \frac{1}{27}$, iz čega zaključujemo da mora biti $abc = \frac{1}{27}$. No, tada se u prvoj (i drugoj) AG nejednakosti postiže jednakost. Znamo da to vrijedi samo ako su brojevi čije sredine promatramo jednaki, dakle vrijedi $a = b = c$. Konačni rezultat sada lako dobijemo kao u prvom rješenju.

Zadatak S-1.4. [40 bodova]

U trokut ABC upisan je polukrug čiji promjer leži na stranici $\overline{AB}$ i koji dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D i E redom. Neka je F nožište okomice iz točke C na $\overline{AB}$. Ako je $\sphericalangle ECF = 21°$ i $\sphericalangle FCD = 33°$, koliko iznose $\sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CDF$?

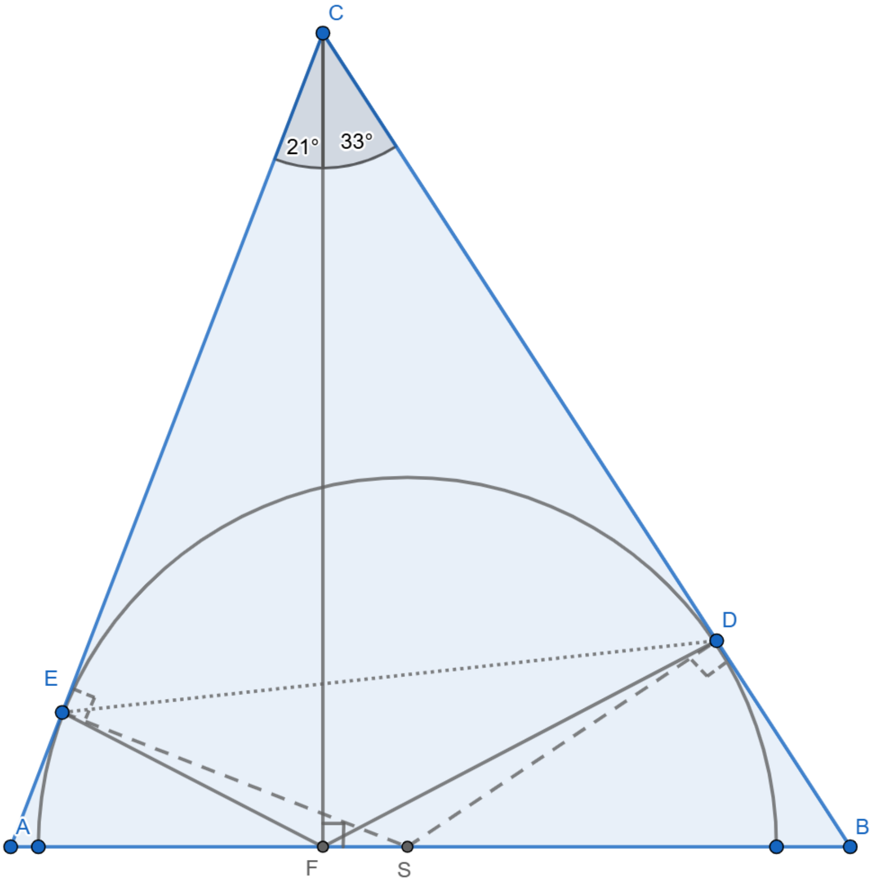
Rješenje.

Rješenje ovog zadatka će nas uvjeriti koliko „moćan” može biti *teorem o obodnim kutevima* nad istom tetivom kružnice. Prisjetimo se da su svi obodni kutevi nad istom tetivom kružnice međusobno jednaki. Glavna ideja ovog zadatka je smjestiti zadane točke na jednu kružnicu i sustavno koristiti ovaj teorem.

Najvažniji korak u ovom smjeru je uvođenje središta polukruga S. Kako promjer kruga leži na stranici $\overline{AB}$, jasno je da se S nalazi na $\overline{AB}$. Stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ leže na tangentama na zadani polukrug (jer ga diraju u po jednoj točki), pa znamo da je $\overline{SD} \perp \overline{BC}$ i $\overline{SE} \perp \overline{CA}$, jer dužina koja spaja središe kruga i diralište s tangentom je okomita na tangentu.

Nadalje, znamo i da je $\overline{SF} \perp \overline{FC}$. Sada po obratu Talesovog poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice možemo zaključiti da točke D, E i F sve leže na kružnici čiji je promjer dužina SC. Dakle, pokazali smo da 5 točaka C, D, E, F i S sve leže na istoj kružnici.

Sada u igru dolaze obodni kutovi. Želimo izmjeriti veličinu kutova $\sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CDF$. Primijetimo da su oni obodni kutovi tetive FC s različitih strana, pa vrijedi $\sphericalangle FEC + \sphericalangle CDF = 180°$. Stoga je dovoljno odrediti jedan od njih, pa se koncentriramo samo na $\sphericalangle CDF$.



Vidimo da je $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CDS - \sphericalangle FDS = 90° - \sphericalangle FDS$. Kut $\sphericalangle FDS$ možemo dobiti kao $\sphericalangle EDS - \sphericalangle EDF$. Kut $\sphericalangle EDF$ je obodni kut nad tetivom $\overline{EF}$, pa je jednak $\sphericalangle ECF = 21°$.

Preostaje odrediti $\sphericalangle EDS$. Njega ćemo izračunati iz jednakokračnog trokuta ESD (prisjetimo se da je S središte polukruga, pa vrijedi $|SD| = |SE|$). Kut $\sphericalangle DSE$ je obodni kut nad tetivom DE i to s druge strane od obodnog kuta $\sphericalangle ECD$. Stoga vrijedi $\sphericalangle DSE = 180° - (21° + 33°) = 126°$. Kut $\sphericalangle EDS$ onda iznosi $\dfrac{180° - \sphericalangle DSE}{2} = \dfrac{180° - 126°}{2} = 27°$.

Sve skupa, dobijamo:

$$\sphericalangle CDF = 90° - \sphericalangle FDS = 90° - (\sphericalangle EDS - \sphericalangle EDF) = 90° - (27° - 21°) = \mathbf{84}°.$$

Kut $\sphericalangle FEC$ iznosi $180° - 84° = \mathbf{96}°$.

Zadatak S-1.5. [50 bodova]

Mali medo ima 24 male kutije označene brojevima od 1 do 24, jednu veliku kutiju i neograničenu količinu loptica na raspolaganju. Na početku igre medo uzima neku količinu loptica i razmješta ih po volji u neke od malih kutija (može i u sve). Velika kutija je na početku igre prazna. Tokom igre, medo ponavlja sljedeći potez, dok god može:

- odabire neku od malih kutija u kojoj je trenutni broj loptica jednak oznaci te kutije, uzima sve loptice iz te kutije i stavlja po jednu u svaku od malih kutija označenih brojevima 1, 2, …, $k-1$, gdje je k oznaka odabrane kutije, a preostalu lopticu ubaci u veliku kutiju.

Igra završava kada medo više ne može napraviti potez. Kažemo da je medo *pobijedio* ako su na kraju igre sve male kutije prazne. Odredi najveći mogući broj loptica u velikoj kutiji nakon igre u kojoj je medo pobijedio.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveći mogući broj kuglica jednak **209**. Kako bismo dokazali da je upravo ovo traženi najveći broj, obavezno moramo dokazati dvije tvrdnje: da se ovaj broj kuglica doista može postići (donja ograda), tj. da postoji igra u kojoj medo pobjeđuje s ovim brojem kuglica u velikoj kutiji na kraju te da nije moguće bolje od ovoga (gornja ograda), tj. da sigurno ne postoji igra u kojoj medo pobjeđuje s većim brojem kuglica u velikoj kutiji na kraju od ovoga broja.

Pokažimo najprije da medo ne može pobijediti s više od 209 kuglica u velikoj kutiji. Za malu kutiju kažemo da smo je *ispraznili* ako smo na tu kutiju primijenili jedan potez igre. Iz pravila igre znamo da će broj kuglica u velikoj kutiji odgovarati ukupnom broju pražnjenja svih kutija (jer se prilikom svakog pražnjenja točno jedna kuglica ubaci u veliku kutiju i to je jedini način da kuglice dođu u veliku kutiju). Nadalje, uočimo da kada jednom ispraznimo kutiju na poziciji n nju možemo jedino napuniti pražnjenjem kutija na pozicijama većim od n. Posebno, ako se kutije od $n+1$ do 24 više ne mogu isprazniti ili su prazne te medo u nekom trenutku isprazni kutiju na poziciji n, tada ju u ostatku igre može zanemariti jer je više nikada neće moći napuniti s lopticama. Uočimo još da u pobjedničkoj igri u nikojem trenutku bilo koja kutija ne smije imati više kuglica od njene oznake jer je u suprotnom nikada ne bi mogli isprazniti.

Primijenimo gornje zaključke na kutije iz igre, krenuvši od posljednje koja ne ovisi o nijednoj drugoj. Kutiju na poziciji 24 će medo moći isprazniti samo jednom. Nakon toga imamo da će se kutija na poziciji 23 napuniti najviše jednom lopticom, dakle ukupan broj loptica koji će se tokom pobjedničke igre naći u toj kutiji je najviše $23+1=24$, tj. kutija na poziciji 23 će se isto prazniti najviše jednom. Analogno zaključujemo za kutije na pozicijama $22, \ldots, 14$ i 13. Za kutiju na poziciji 12 znamo da će na početku sadržavati najviše 12 loptica, što znači da će ona tijekom igre imati najviše $12+12=24$ loptice, odnosno da nju možemo isprazniti najviše 2 puta.

Analognim zaključivanjem dalje redom dobivamo: kutija na poziciji 11 se prazni najviše 2 puta, kutija na poziciji 10 se prazniti najviše 2 puta, kutija na poziciji 9 se prazni najviše 3 puta, kutija na poziciji 8 se prazni najviše 3 puta, kutija na poziciji 7 se prazni najviše 4 puta, kutija na poziciji 6 se prazni najviše 5 puta, kutija na poziciji 5 se prazni najviše 7 puta, kutija na poziciji 4 se prazni najviše 11 puta, kutija na poziciji 3 se prazni najviše 18 puta, kutija na poziciji 2 se prazni najviše 35 puta i kutija na poziciji 1 se prazni najviše 105 puta.

Prema tome ukupan broj svih pražnjenja malih kutija je najviše

$$12 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 7 + 11 + 18 + 35 + 105 = 209.$$

Pokažimo sada da doista možemo postići ukupno 209 kuglica u velikoj kutiji kod pobjedničke igre. Na početku stavimo: 24 kuglice u kutiju na poziciji 24, 22 kuglice u kutiju na poziciji 23, 20 kuglice u kutiju na poziciji $22, \ldots,$ 4 kuglice u kutiju na poziciji 14 i 2 kuglice u kutiju na poziciji 13. Zatim 12 kuglice u kutiju na poziciji 12, 8 kuglice u kutiju na poziciji 1, 4 kuglice u kutiju na poziciji 10, 9 kuglice u kutiju na poziciji 9, 3 kuglice u kutiju na poziciji 8, 4 kuglice u kutiju na poziciji 7, 2 kuglice u kutiju na poziciji 6, 2 kuglice u kutiju na poziciji 5, 4 kuglice u kutiju na poziciji 4, 3 kuglice u kutiju na poziciji 3, 1 kuglice u kutiju na poziciji 2 i 1 kuglice u kutiju na poziciji 1.

Da bi medo pobijedio u igri s gornjim rasporedom loptica u svakom potezu mora pronaći najmanju poziciju kutije koju je moguće isprazniti i zatim tu kutiju isprazniti. Takvim redoslijedom pražnjenja siguran je da će sve kutije isprazniti najveći mogući broj puta, jer pražnjenjem kutija s većih pozicija bi prepunio kutiju na manjoj poziciji koja je također spremna za pražnjenje.

Zadatak S-1.6. [60 bodova]

Za točku T u koordinatnoj ravnini kažemo da je *skladna* ako su joj obje koordinate cjelobrojne i ako dužina koja spaja ishodište i točku T ne sadrži niti jednu drugu točku s cjelobrojnim koordinatama. Za prirodan broj k, označimo sa $S(k)$ broj skladnih točaka (x, y) za koje vrijedi $x^2 + y^2 = k^2$.

Izračunaj zbroj svih vrijednosti $S(d)$, gdje su d svi različiti pozitivni djelitelji broja $2021 \cdot 2025$.

Rješenje.

Prvo ćemo pokazati da je cjelobrojna točka (x, y) vidljiva ako i samo ako je $\gcd(x, y) = 1$. Neka je

(x, y) vidljiva i neka je $x = ka$, $y = kb$, pri čemu je $k = \gcd(x, y)$. Tada se točka (a, b) nalazi na spojnici ishodišta i točke (x, y), pa (x, y) nije vidljiva, osim u slučaju $k = 1$. Neka je sada $\gcd(x, y) = 1$ i neka je (a, b) na dužini koja spaja ishodište i (x, y). Tada je $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$. Kako je $\frac{x}{y}$ do kraja skraćen i $|a| \leq |x|, |b| \leq |y|$, slijedi $a = x$ i $b = y$ pa je (x, y) vidljiva.

Neka je (x, y) vidljiva točka za koju je $x^2 + y^2 = k^2$. Neka $p \mid k$, pri čemu je $p \equiv 3 \pmod 4$. Slijedi $x^2 \equiv -y^2 \pmod p$. Ako $p \mid y$ onda i $p \mid x$ pa (x, y) nije vidljiva. U suprotnom, možemo pomnožiti prethodnu kongruenciju s $y^{-2} = (y^{-1})^2$, gdje je y^{-1} modularni inverz od y modulo p, pa imamo $x^2 \cdot y^2 \equiv -1 \pmod p$. To je kontradikcija jer -1 nije kvadratni ostatak modulo p jer je p oblika $4k+3$.

Dakle, dovoljno je promatrati samo one k koji nisu djeljivi s prostim brojem oblika $4k + 3$, a to su u našem slučaju kada promatramo djelitelje od $2021 \cdot 2025 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 43 \cdot 47$ jedino $1, 5, 25$. Ovo je sada lako izračunati ručno. Za $k = 1$ mogućnosti su $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$, ima ih 4. Za $k = 5$ mogućnosti su $(\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3)$, ima ih 8. Za $k = 25$ (vidljive) mogućnosti su $(\pm 7, \pm 24), (\pm 24, \pm 7)$, ima ih 8. Dakle, tražena suma iznosi **20**.

Zadatak S-1.7. [70 bodova]

U nekoj dalekoj državi banka izdaje kovanice raznih apoena (vrijednosti) iz intervala $[0, 1]$. Odredi najmanju pozitivnu konstantu C takvu da, neovisno o izdanim apoenima, vrijedi:

- bilo koji konačan skup kovanica čija ukupna vrijednost ne prelazi 1000 može se rasporediti u 10 skupina tako da ukupna vrijednost kovanica u svakoj skupini bude najviše C.

Rješenje.

Tvrdimo da je tražena konstanta $C = 101 - \frac{101}{1001}$.

Dokažimo najprije da za bilo koju manju vrijednost C' postoji konačan skup kovanica koje ne možemo rasporediti na željeni način. Zapišimo $C' = 101 - 101\alpha$, za $\frac{1}{1001} < \alpha < 1$. Odaberimo proizvoljni $r \in \left[\frac{1}{1001}, \alpha\right\rangle$. Uzmimo sada neki prirodni broj $n \in \left[1001, \frac{1000}{1-r}\right]$ (interval je dobro definiran jer vrijedi $\frac{1000}{1-r} \geq 1001 \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{1001}$). Uzmimo skup od n kovanica koje su sve indivudualne vrijednosti $1 - r$. Njihova ukupna vrijednost zadovoljava $n \cdot (1-r) \leq \frac{1000}{1-r} \cdot (1-r) = 1000$. No, kako god da ih rasporedili u dane kutije, po Dirichletovom principu postojat će kutija koja sadrži barem 101 kovanicu ($n \geq 1001$ kovanica i 10 kutija), pa će vrijednost kovanica u toj kutiji biti barem $101(1 - r) = 101 - 101r > 101 - 101\alpha = C'$.

Ostaje pokazati da se s vrijednošću $C = 101 - \frac{101}{1001} = 101 \cdot \frac{1000}{1001}$ doista može provesti tražena podjela kovanica. Počinjemo s praznim kutijama i u koracima ih punimo kovanicama s kojima raspolažemo. Razmotrimo najprije kovanice čija individualna vrijednost je veća od $\frac{1000}{1001}$. Kako je ukupna vrijednost svih kovanica s kojima raspolažemo najviše 1000, vidimo da ovakvih kovanica imamo najviše 1000. To znači da sve ove kovanice možemo rasporediti tako da u svakoj od 10 kutija imamo najviše 100 ovakvih kovanica. Najveći iznos koji smo do sada stavili u svaku kutiju je $100 \cdot \frac{1000}{1001} < 100 < C$, dakle nismo premašili našu konstantu.

S preostalim kovanicama provodimo „pohlepni" algoritam u kojem jednostavno uzmemo bilo koju kovanicu i stavimo je u bilo koju kutiju u koju je smijemo staviti, tj. tako da suma vrijednosti kovanica u kutiji ne prijeđe konstantu C. Pokažimo da ovim algoritmom možemo rasporediti sve kovanice. Pretpostavimo suprotno, tj. da za neku kovanicu ne postoji kutiju u koju je smijemo staviti. Označimo vrijednost te kovanice s x, a trenutne vrijednosti kovanica u kutijama redom s x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}. Tada bi vrijedilo $x_i + x > C$ za sve kutije $i = 1, 2 \ldots, 10$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i + 10x > 10C.$$

S druge strane, znamo da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$x \leq \frac{1000}{1001} \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{10} x_i + x \leq 1000,$$

iz kojih dobivamo:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i + 10x \leq 1000 + 9 \cdot \frac{1000}{1001} = 100 \cdot \frac{10100}{1001} = 10 \cdot 101 \cdot \frac{1000}{1001} = 10C,$$

čime smo došli do kontradikcije. Dakle, algoritam se doista može provesti do kraja i sve kovanice će biti uspješno raspoređene u kutije.