MEDO 2024./2025.

Prvo kolo

26.10.2024.

Zadaci i rješenja

Juniori

Zadatak J-1.1. [10 bodova]

Umnožak dvaju prirodnih brojeva iznosi 5704. Ako prvi broj umanjimo za 20, a drugi ostane isti, umnožak postaje 2024. Koliko iznosi drugi broj?

Prvo rješenje.

Primjećujemo da je drugi broj zajednički djelitelj brojeva 5704 i 2024, jer se i jedan i drugi dobivaju množenjem drugog broja s nekim brojem. Stoga želimo odrediti zajedničke djelitelje ova dva broja.

U tu svrhu, rastavljamo brojeve 5704 i 2024 na proste faktore. Standardnim i dobro poznatim postupkom (uzastopno dijeljenje s najmanjim prostim faktorom) dobijemo

$$5704 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 31$$
$$2024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23.$$

Primjećujemo da su zajednički prosti faktori 2 (i to 3 puta kod oba broja) i 23. Svi zajednički djelitelji ova dva broja se dakle sastoje (što se tiče prostih faktora) od najviše tri faktora 2 i najviše jednog faktora 23. Dakle, svi mogući zajednički djeljitelji brojeva 2024 i 5704 su:

$$2, 4, 8, 23, 46, 92 \text{ i } 184.$$

S druge strane, prvi faktor u drugom broju mora biti za 20 manji od onoga u prvom broju. Odmah vidimo da faktori 31 broja 5704 i 11 broja 2024 zadovoljavaju ovo svojstvo. Stoga je drugi broj preostali dio, a to je $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 = \mathbf{184}$. Isprobavanjem ostalih zajedničkih djelitelja vidimo da je razlika između prvih brojeva uvijek veća od 20, stoga je ovo jedino moguće rješenje.

Drugo rješenje.

Označimo prvi broj s A, a drugi broj s B. Prva rečenica nam govori da vrijedi $A \cdot B = 5704$. Iz druge rečenice saznajemo da vrijedi $(A - 20) \cdot B = 2024$.

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} A \cdot B = 5704 \\ (A - 20) \cdot B = 2024 \end{cases}$$

Dobiveni sustav se može riješiti na razne načine. Razmnožimo zagradu u drugoj jednadžbi koristeći svojstvo distributivnosti:

$$A \cdot B - 20 \cdot B = 2024.$$

Uvrstimo sada vrijednost $A \cdot B$ koju imamo iz prve jednadžbe, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} 5704 - 20 \cdot B &= 2024 \\ (-20) \cdot B &= 2024 - 5704 \\ (-20) \cdot B &= -3680 \quad / : (-20) \\ B &= 184 \end{aligned}$$

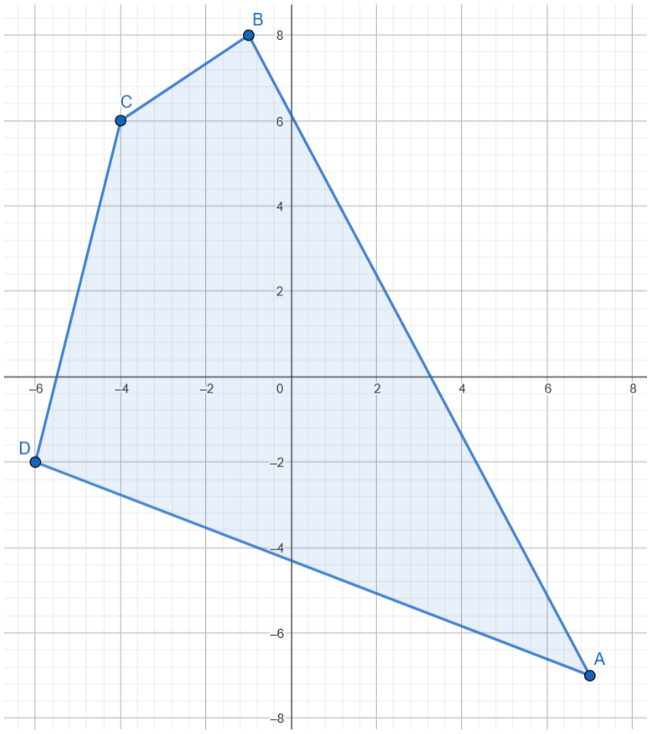
Vrijednost drugog broja je dakle **184**.

Zadatak J-1.2. [20 bodova]

Izračunaj površinu četverokuta čiji su vrhovi u točkama $(-6,-2)$, $(-4,6)$, $(-1,8)$ i $(7,-7)$.

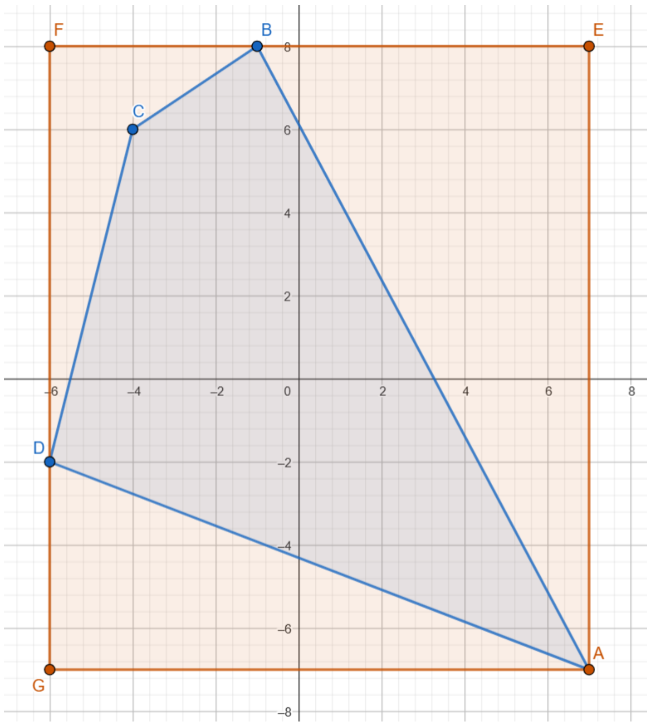
Rješenje.

Ucrtajmo najprije dane točke u koordinatni sustav i označimo ih. Kako bismo ispoštovali standardno matematičko usmjerenje u ravnini (suprotno od kazaljke na satu), nazovimo dane točke obrnutim redoslijedom, dakle s $A=(7,-7)$, $B=(-1,8)$, $C=(-4,6)$ i $D=(-6,-2)$. Naravno, podsjetimo da prva koordinata označava pomak po horizontalnoj x-osi (apscisa), a druga po vertikalnoj y-osi (ordinata).



Dobiveni četverokut ne odgovara niti jednom liku kojem znamo lako odrediti površinu (pravokutnik, trapez ili paralelogram). Stoga moramo smisliti način na koji ćemo uvesti *pomoćne likove* u našu sliku koji će nam pojednostaviti zadatak. U geometrijskim zadacima se ne trebamo ograničavati na samo ono što je zapisano u zadatku, već imamo slobodu „dodavati", „oduzimati" i „mijenjati" neke dijelove problema.

U ovom slučaju, iskoristit ćemo činjenicu da je zadani četverokut smješten u koordinatni sustav. Koordinatni sustav počiva na međusobno okomitim pravcima, pa ćemo to iskoristiti i „uokviriti" naš četverokut velikim pravokutnikom $AEFG$ (vidi sliku).



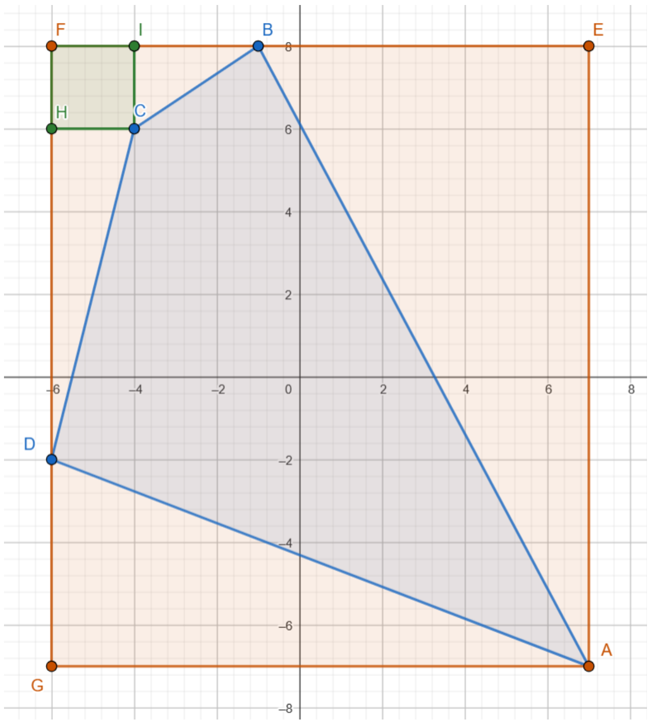
Sada je jasno da je tražena površina četverokuta $ABCD$ jednaka površini velikog pravokutnika $AEFG$ umanjenoj za narančasto osjenčanu površinu (izvan četverokuta $ABCD$ i unutar pravokutnika $AEFG$). Površinu pravokutnika $AEFG$ lako izračunamo: duljine stranice su mu $|AE| = |7-(-6)| = 13$ i $|GA| = |8-(-7)| = 15$, pa mu površina iznosi

$$P_{AEFG} = 13 \cdot 15 = 195.$$

Preostaje izračunati površinu narančastog dijela. On se sastoji od dva pravokutna trokuta ADG i AEB i četverokuta $DCBF$. Površinu pravokutnih trokuta lako izračunati jer su im stranice paralelne s koordinatnim osima, zbog čega lako možemo izmjeriti duljinu kateta. Dobivamo:

$$P_{ADG} = \frac{|DG| \cdot |GA|}{2} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32.5$$
$$P_{AEB} = \frac{|AE| \cdot |EB|}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60.$$

Jedino što preostaje je odrediti površinu četverokuta $DCBF$. Podijelimo ga na tri dijela tako da povučemo okomice iz točke C na stranice BF i FD. Kako su ove stranice paralelne s koordinatnim osima, dobivene okomice su također paralelne s koordinatnim osima.



Dobili smo dva pravokutna trokuta DCH i CBI i jedan pravokutnik $HCIF$, kojima lako odredimo duljine kateta/stranica, a onda i površinu:

$$P_{DCH} = \frac{|CH| \cdot |HD|}{2} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$$
$$P_{CBI} = \frac{|BI| \cdot |IC|}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$
$$P_{HCIF} = |HC| \cdot |CI| = 2 \cdot 2 = 4.$$

Dakle, površina četverokuta $DCBF$ iznosi

$$P_{DCBF} = P_{DCH} + P_{CBI} + P_{HCIF} = 8 + 3 + 4 = 15.$$

Sada napokon možemo izračunati traženu površinu četverokuta $ABCD$ kao:

$$P_{ABCD} = P_{AEFG} - P_{ADG} - P_{AEB} - P_{DCBF} = 195 - 32.5 - 60 - 15 = \mathbf{87.5}.$$

Zadatak J-1.3. [30 bodova]

U svako polje tablice 3×3 treba upisati po jedan od brojeva 1, 2, ..., 9 tako da svi brojevi budu iskorišteni i da svi zbrojevi brojeva u svakom retku i svakom stupcu budu neparni. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje.

Najprije primijetimo da parnost zbroja ovisi samo o parnosti pribrojnika, a ne i o njihovom iznosu. Dalje, znamo da je zbroj dva parna i dva neparna broja uvijek paran, a zbroj parnog i neparnog broja uvijek neparan. Iz toga zaključujemo da samo sljedeće kombinacije parnosti tri broja daju neparan zbroj: sva tri neparna ili točno dva parna i jedan neparan.

Razmotrimo sada kako možemo dane brojeve rasporediti u tablicu. Među njima je 5 neparnih i 4 parna. U svakom stupcu možemo imati točno 0 ili 2 parna broja. Zaključujemo da je jedina mogućnost da u neka dva stupca imamo dva parna broja, a u preostalom sva tri neparna broja.

Kako moramo paziti i da ista tvrdnja vrijedi i u svakom retku, svi mogući rasporedi parnih i neparnih brojeva u tablici su sljedeći:

P	P	N
P	P	N
N	N	N

P	P	N
N	N	N
P	P	N

P	N	P
P	N	P
N	N	N

P	N	P
N	N	N
P	N	P

N	P	P
N	P	P
N	N	N

N	P	P
N	N	N
N	P	P

N	N	N
P	P	N
P	P	N

N	N	N
P	N	P
P	N	P

N	N	N
N	P	P
N	P	P

Promotrimo sada tablice prvog tipa. U svakoj od njih, parni brojevi su raspoređeni na neki način unutar svoja 4 polja. Prebrojimo koliko postoji različitih rasporeda ovih brojeva. Na prvu poziciju (gore lijevo) možemo upisati jedan od 4 moguća parna broja. Nakon toga, u drugo polje (desno od njega), možemo upisati neki od preostala tri broja. U treće polje (prvo u drugom redu) sada možemo upisati neki od preostala dva broja, a u zadnje polje (centralno) ćemo upisati preostali broj. Kako bismo odredili ukupni broj mogućnosti, dobivene brojeve **pomnožimo** (ovo se zove *princip uzastopnog prebrojavanja*). Stoga dobijemo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mogućnosti za smještanje parnih brojeva.

Prelazimo na neparne brojeve. Analognim zaključivanjem kao i za parne, dobijemo da postoji $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ različitih mogućih rasporeda neparnih brojeva.

Naglasimo da su rasporedi parnih i neparnih brojeva međusobno *neovisni*: izbor jednoga ne utječe na mogućnosti izbora drugoga i obratno. Stoga, ukupni broj mogućnosti smještanja parnih i neparnih brojeva dobijemo opet principom uzastopnog prebrojavanja, kao umnožak $24 \cdot 120 = 2880$. Ovo je dakle broj tablica prvog tipa.

U ostalih 8 tipova tablica, rezultat je isti, jer su brojevi parnih i neparnih brojeva nepromijenjeni. Stoga je ukupni broj mogućih tablica jednak $9 \cdot 2880 = \mathbf{25920}$.

Zadatak J-1.4. [40 bodova]

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednakost $ab + bc + cd + da = 2024$. Koliko najviše može iznositi $a + b + c + d$?

Rješenje.

S lijeve strane dane jednakosti imamo algebarski izraz koji je zapisan kao zbroj 4 pribrojnika. Zadatak nam je zapisati 2024 kao zbroj od 4 pribrojnika koji se dalje mogu zapisati u obliku umnoška određenih brojeva. No, 2024 se može na jako puno načina rastaviti na zbroj od 4 prirodna pribrojnika te bismo za svaki takav rastav morali odrediti možemo li pronaći brojeve a, b, c i d koji pomnoženi u parovima daju baš te pribrojnike.

Stoga ćemo pokušati algebarskim operacijama transformirati lijevu stranu jednakosti u oblik koji nam omogućuje direktnije rješavanje problema. Primijetili smo da sada imamo „zbroj umnožaka” - pitamo se sada možemo li transformirati izraz u „umnožak pribrojnika”. To bi nam bilo pogodnije, jer postoji relativno mali broj načina na koji broj 2024 možemo rastaviti na umnožak prirodnih faktora.

Pokušajmo grupirati pribrojnike i koristeći svojstvo *distributivnosti* množenja prema zbrajanju „unatrag” (tj. „izvlačenjem zajedničkog faktora”) doći do željene faktorizacije. Dobit ćemo:

$$(ab + bc) + (cd + da) = 2024$$
$$b(a + c) + d(c + a) = 2024$$
$$(a + c) \cdot (b + d) = 2024$$

S lijeve strane smo dobili umnožak dva izraza. Prisjetimo se da su svi brojevi a, b, c i d prirodni, pa su takvi i njihovi zbrojevi. Stoga brojevi $(a + c)$ i $(b + d)$ moraju biti prirodni brojevi koji u umnošku daju 2024.

Rastav broja 2024 na proste faktore izračunali smo u prvom zadatku: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Odavdje možemo vidjeti koji su sve rastavi broja 2024 na dva pozitivna faktora:

$$1 \cdot 2024,\ 2 \cdot 1012,\ 4 \cdot 506,\ 8 \cdot 253,\ 11 \cdot 184,\ 22 \cdot 92,\ 44 \cdot 46,\ 88 \cdot 23.$$

Dakle, zbroj $(a+c)$ može poprimiti vrijednost jednog faktora, dok $(b+d)$ tada postaje jednak vrijednosti drugog faktora. Primijetimo ovdje da iz razmatranja moramo izbaciti rastav $1\cdot 2024$, jer bi u tom slučaju zbroj dva prirodna broja trebao biti jednak 1, što nije moguće.

Primijetimo još na kraju da izraz kojeg želimo maksimizirati možemo zapisati i kao

$$a + b + c + d = (a + c) + (b + d),$$

tj. kao zbroj dva faktora koja promatramo. Stoga samo trebamo odrediti kod kojeg od mogućih rastava je zbroj faktora najveći mogući. To je slučaj za faktore 2 i 1012, što znači da je tražena najveća vrijednost jednaka $1012 + 2 = \mathbf{1014}$.

Zadatak J-1.5. [50 bodova]

Neka je $M = 5555^{4444}$ i $N = 5555^{2222}$. Odredi ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9.

Rješenje.

Zadani brojevi su očito preveliki za direktno računanje ostataka. Stoga ćemo trebati koristiti matematički alat koji nam olakšava računanje s ostatcima pri dijeljenju. Taj alat se zove *modularna aritmetika* i detaljno je pojašnjen kroz edukativno rješenje za one koji se još nisu susreli s njim.

Najprije primijetimo da umjesto direktnog potenciranja broja M na N-tu potenciju možemo potencirati njegov ostatak pri dijeljenju s 9. Stoga najprije određujemo koji ostatak daje $M = 5555^{4444}$ pri dijeljenju s 9. Ponovno možemo primijeniti isti argument da zaključimo da prvo treba odrediti koliki ostatak daje 5555 pri dijeljenju s 9. Dijeljenjem dobijemo da je taj ostatak jednak 2.

Idući zadatak je odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 za broj 2^{4444}. Potencije broja 2 pri dijeljenju s 9 periodički daju ostatke 1, 2, 4, 8, 7 i 5. Stoga ćemo dobiti da 2^{4444} daje isti ostatak pri dijeljenju s 9 kao i 2^4, jer je 4 ostatak pri dijeljenju sa 6 (= duljina perioda) broja 4444. Dakle, ostatak pri dijeljenju broja 2^{4444}, a time i $M = 5555^{4444}$, pri dijeljenju s 9 je 7.

Sada trebamo odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 7^N. Stoga promatramo periodične ostatke koje potencije broja 7 daju pri dijeljenju s 9; dobijemo da su to 1, 7 i 4. Stoga trebamo odrediti ostatak broja N pri dijeljenju s 3, što će nam reći kojoj potenciji broja 7 je taj ostatak jednak.

N je potencija 5555^{4444} te vrijedi da je ostatak pri dijeljenju baze 5555 s 3 jednak 2, pa možemo promatrati potenciju 2^{4444}. Potencije broja 2 pri dijeljenju s 3 periodično daju ostatke 1 i 2, što znači da je ostatak kojeg daje potencija 2^{4444}, a time i $N = 5555^{4444}$ jednak 1.

Vratimo se sada na 7^N. Kako N daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, ova potencija će dati ostatak **7** pri dijeljenju s 9. Time smo stigli do kraja izračuna.

Edukativno rješenje.

Počinjemo od osnovnih zapažanja koja će nam u konačnici omogućiti rješavanje danog problema. „Usput” ćemo se upoznati s već spomenutim matematičkim alatom, modularnom aritmetikom.

Prva činjenica koja će nam trebati je sljedeća: ostatak pri dijeljenju s 9 umnoška neka dva broja jednak je umnošku ostataka tih brojeva pri dijeljenju s 9. Doista, neka su ti brojevi a i b te neka su p i q redom ostatci koji oni daju pri dijeljenju s 9. To znači da vrijedi $a = 9k + p$ i $b = 9\ell + q$, za neke prirodne brojeve k i ℓ (to su količnici dijeljenja s 9 brojeva a i b, no oni nam nisu zanimljivi ovdje). Pomnožimo sada ove brojeve:

$$a \cdot b = (9k + p)(9\ell + q) = 81k\ell + 9(kq + p\ell) + pq.$$

Vidimo da su prva dva pribrojnika u zadnjem raspisu uvijek djeljiva s 9. Stoga je ostatak pri dijeljenju umnoška ab s 9 isti kao i ostatak kojeg daje umnožak pq.

Naglasimo da isti rezultat vrijedi i za zbroj dva broja (dokaže se na potpuno analogan način). Također, uočimo da ove činjenice vrijede neovisno o broju s kojim dijelimo.

Primijetimo sada da, kako je potenciranje ništa drugo doli uzastopno množenje broja sa samim sobom, umjesto broja kojeg potenciramo i onda promatramo ostatak pri dijeljenju s 9, možemo odmah računati s ostatkom kojeg on daje pri dijeljenju s 9. To nam omogućuje da drastično smanjimo brojeve koje potenciramo.

Sve što smo do sada opisali poznato je u matematici pod imenom *modularna aritmetika*. Kako nam ova tehnika pomaže kod rješavanja mnogih zadataka iz teorije brojeva, upoznajmo se malo s njom i uvedimo standarne oznake koje će nam pomoći u lakšem zapisivanju rješenja. Neka je ostatak koji neki prirodni broj a daje pri dijeljenju s 9 jednak p, kao i prije. Kraće ćemo ovo zapisivati kao:

$$a \equiv p \pmod 9 \text{ (čita se „}a\text{ je kongruentno }p\text{ modulo 9”).}$$

Primjerice, vrijedi $2024 \equiv 8 \pmod 9$.

Iz onoga što smo do sada dokazali, vidimo da za $a \equiv p \pmod D$ i $b \equiv q \pmod D$, gdje je D proizvoljan prirodni broj s kojim dijelimo (u našem slučaju je $D = 9$, ali pišemo općenito), vrijede sljedeće tvrdnje:

$$\begin{aligned} a + b &\equiv p + q \pmod D \\ a \cdot b &\equiv p \cdot q \pmod D \\ a^n &\equiv p^n \pmod D. \end{aligned}$$

Okrenimo se sada s ovim alatom našem problemu. Krajnji cilj nam je odrediti ostatak pri dijeljenju broja M^N s 9. Iz onoga što smo do sada zaključili, znamo da umjesto M možemo potencirati njegov ostatak pri dijeljenju s 9. Dakle, odredimo najprije ostatak pri dijeljenju broja $M = 5555^{4444}$ s 9.

Možemo ponovno primijeniti isto razmišljanje i zaključiti da umjesto baze 5555 možemo potencirati ostatak ovog broja pri dijeljenju s 9. Dakle, određujemo ostatak pri dijeljenju broja 5555 s 9. Ovo možemo učiniti „pješke” pisanim dijeljenjem, ali i ovdje nam posao može skratiti modularna aritmetika. Prisjetimo se da djeljivost s 9 nekog broja možemo odrediti zbrajajući njegove znamenke i promatranjem djeljivosti dobivenog zbroja s 9. Vrijedi i jača tvrdnja od ovoga: ostatak pri dijeljenju bilo kojeg broja s 9 upravo je jednak ostatku kojeg pri dijeljenju s 9 daje zbroj znamenki ovog broja.

Dokažimo i ovu tvrdnju koristeći modularnu aritmetiku. Neka je promatrani broj zapisan u dekadskom zapisu kao $\overline{z_n z_{n-1} \cdots z_2 z_1 z_0}$, gdje su svi $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ i z_n znamenke. Ključno je primjetiti da vrijedi $10 \equiv 1 \pmod 9$. Zbog pravila o modularnom potenciranju, dobijemo i da vrijedi $10^e \equiv 1^e = 1 \pmod 9$, za bilo koji eksponent e. Sada raspisom broja u dekadskom sustavu i primjenom prethodnih pravila o modularnom računanju direktno dobivamo:

$$\begin{aligned} \overline{z_n z_{n-1} \cdots z_2 z_1 z_0} &= z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + z_2 \cdot 10^2 + z_1 \cdot 10 + z_0 \\ &\equiv z_n \cdot 1 + z_{n-1} \cdot 1 + \cdots + z_2 \cdot 1 + z_1 \cdot 1 + z_0 \pmod 9 \\ &= z_n + z_{n-1} + \cdots + z_2 + z_1 + z_0 \pmod 9. \end{aligned}$$

Dakle, umjesto direktnog dijeljenja broja s 9, možemo gledati ostatak koji zbroj njegovih znamenki daje pri dijeljenju s 9. Za broj 5555 tako dobijemo da je ostatak pri dijeljenju s 9 jednak 2.

Dokazali smo da vrijedi $5555^{4444} \equiv 2^{4444} \pmod 9$. Dakle, treba odrediti ostatak pri dijeljenju broja 2^{4444} pri dijeljenju s 9. Za ovo, koristimo novi „trik". Promotrimo prvih par potencija broja 2 i ostatke koje daju pri dijeljenju s 9:

$$
\begin{aligned}
2^1 &= 2 \equiv 2 \pmod 9\\
2^2 &= 4 \equiv 4 \pmod 9\\
2^3 &= 8 \equiv 8 \pmod 9\\
2^4 &= 16 \equiv 7 \pmod 9\\
2^5 &= 32 \equiv 5 \pmod 9\\
2^6 &= 64 \equiv 1 \pmod 9\\
2^7 &= 128 \equiv 2 \pmod 9\\
2^8 &= 256 \equiv 4 \pmod 9\\
2^9 &= 512 \equiv 8 \pmod 9\\
2^{10} &= 1024 \equiv 7 \pmod 9\\
2^{11} &= 2048 \equiv 5 \pmod 9\\
2^{12} &= 4096 \equiv 1 \pmod 9\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Primjećujemo da se ostatci 2, 4, 8, 7, 5 i 1 periodički ponavljaju! Ovo će se doista uvijek događati kod potencija: naime, može postojati samo konačno mnogo različitih ostataka, a kad jednom dođemo do nekoga na kojem smo već bili, ostatci se počinju periodički ponavljati jer uvijek množimo dobiveni ostatak istim brojem.

Ako dodamo i „nulti red" $2^0 = 1 \equiv 1 \pmod 9$ u našu listu potencija, vidimo da je period ponavljanja ostataka jednak 6. Sada smo zaključili sljedeće: ostatci potencija broja 2 pri dijeljenju s 9 se periodički ponavljaju s periodom 6 i glase redom: 1, 2, 4, 8, 7 i 5. Primijetite usput da se u ovoj listi ne pojavljuju svi mogući ostatci pri dijeljenju s 9 (nema 0, 3 i 6). Takva opažanja važna su primjerice kod dokazivanja nepostojanja rješenja određenih diofantskih jednadžbi; nama ovdje to nije od interesa.

Sada je važno shvatiti da za određivanje ostatka pri dijeljenju s 9 broja 2^n moramo odrediti ostatak pri dijeljenju s 6 broja n. Time ćemo znati koliko smo otišli od početka perioda i koji ostatak ćemo dobiti.

U našem slučaju, želimo izračunati $2^{4444} \pmod 9$. Odredimo koliki ostatak daje 4444 pri dijeljenju s 6. Dobijemo da je to 4, jer je 4440 očito djeljiv s 2 i 3. Dakle, zbog pokazanog svojstva periodičnosti ostataka pri dijeljenju s 9 potencija broja 2, vrijedi $2^{4444} \equiv 2^4 \equiv 7 \pmod 9$.

Rezimirajmo što smo do sada izračunali. Prvo smo uvidjeli da za računanje ostatka pri dijeljenju s 9 zadanog broja M^N moramo najprije odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 za bazu potencije M. Kako je i M sam potencija 5555^{4444}, prvo smo odredili ostatak pri dijeljenju s 9 za njegovu bazu 5555 i dobili da je taj ostatak 2. Onda smo promatranjem periodičnosti ostataka pri dijeljenju s 9 za potencije broja 2 zaključili da je ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 2^{4444} jednak 7. Ukratko:

$$M = 5555^{4444} \equiv 2^{4444} \pmod 9 \equiv 2^4 \pmod 9 \equiv 7 \pmod 9.$$

Dakle, sad smo „riješili" bazu potencije M^N. Sad nam je zadatak odrediti ostatak pri dijeljenju s 9 potencije 7^N. Koristimo isti postupak da odredimo period ponavljanja ostataka kod potencije broja 7:

$$\begin{aligned}
7^0 &= 1 \equiv 1 \pmod 9\\
7^1 &= 7 \equiv 7 \pmod 9\\
7^2 &= 49 \equiv 4 \pmod 9\\
7^3 &= 343 \equiv 1 \pmod 9.
\end{aligned}$$

Dalje ne trebamo računati jer već sada znamo zaključiti da je period ponavljanja ostataka u ovom slučaju jednak 3. Dakle, da bismo odredili koji ostatak pri dijeljenju s 9 daje potencija 7^N, dovoljno je odrediti koji ostatak daje eksponent N pri dijeljenju s 3.

Eksponent N je u našem slučaju i sam potencija 5555^{2222}. Želimo odrediti njen ostatak pri dijeljenju s 3. Proceduru sada znamo: pojednostavimo bazu, promatramo period njenih potencija i odredimo ostatak pri dijeljenju ekponenta s tim periodom. Vrijedi $5555 \equiv 2 \pmod 3$ te

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1 \equiv 1 \pmod 3\\
2^1 &= 2 \equiv 2 \pmod 3\\
2^2 &= 4 \equiv 1 \pmod 3,
\end{aligned}$$

dakle period je u ovom slučaju 2. Kako je $2222 \equiv 0 \pmod 2$, konačno dobivamo:

$$N = 5555^{2222} \equiv 2^{2222} \pmod 3 \equiv 2^0 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3.$$

Dobili smo $M \equiv 7 \pmod 9$ i $N \equiv 1 \pmod 3$, gdje promatramo $N \bmod 3$ jer je period ponavljanja ostataka pri dijeljenju s 9 za potenciju s bazom 7 upravo jednak 3. Konačno dobijemo:

$$M^N \equiv 7^1 \pmod 9 \equiv \mathbf{7} \pmod 9.$$

Traženi ostatak je dakle jednak **7**.

Zadatak J-1.6. [60 bodova]

U trokut ABC upisan je polukrug čiji promjer leži na stranici $\overline{AB}$ i koji dira stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama D i E redom. Neka je F nožište okomice iz točke C na $\overline{AB}$. Ako je $\sphericalangle ECF = 21°$ i $\sphericalangle FCD = 33°$, koliko iznose $\sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CDF$?

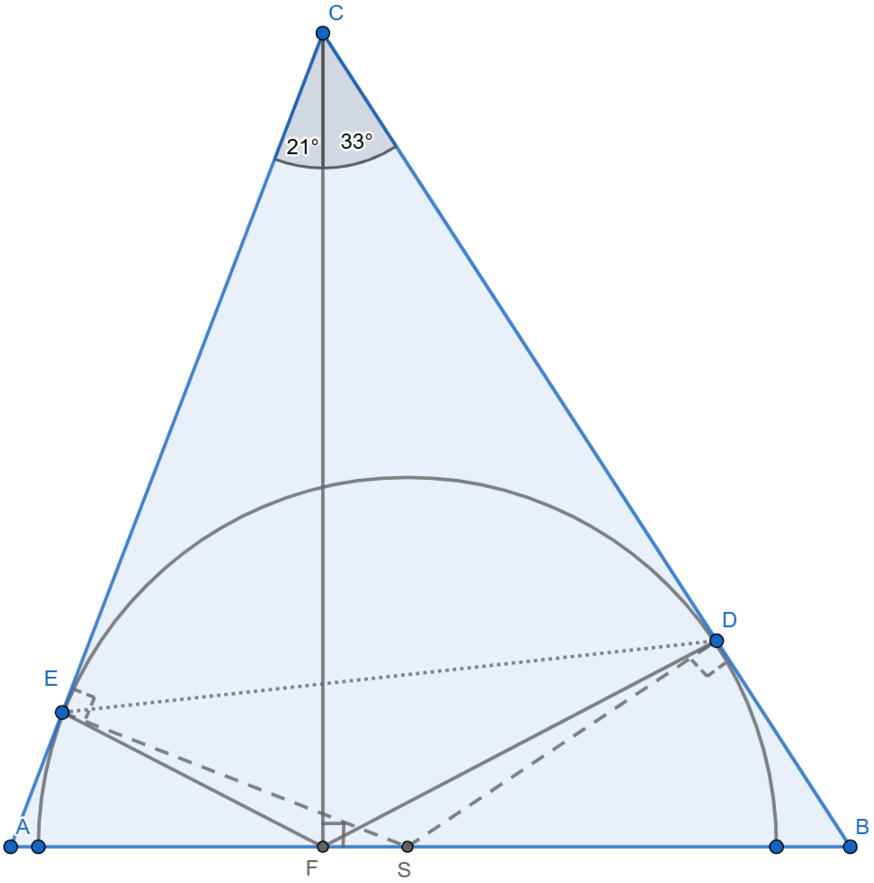
Rješenje.

Rješenje ovog zadatka će nas uvjeriti koliko „moćan” može biti *teorem o obodnim kutevima* nad istom tetivom kružnice. Prisjetimo se da su svi obodni kutevi nad istom tetivom kružnice međusobno jednaki. Glavna ideja ovog zadatka je smjestiti zadane točke na jednu kružnicu i sustavno koristiti ovaj teorem.

Najvažniji korak u ovom smjeru je uvođenje središta polukruga S. Kako promjer kruga leži na stranici $\overline{AB}$, jasno je da se S nalazi na $\overline{AB}$. Stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ leže na tangentama na zadani polukrug (jer ga diraju u po jednoj točki), pa znamo da je $\overline{SD} \perp \overline{BC}$ i $\overline{SE} \perp \overline{CA}$, jer dužina koja spaja središe kruga i diralište s tangentom je okomita na tangentu.

Nadalje, znamo i da je $\overline{SF} \perp \overline{FC}$. Sada po obratu Talesovog poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice možemo zaključiti da točke D, E i F sve leže na kružnici čiji je promjer dužina SC. Dakle, pokazali smo da 5 točaka C, D, E, F i S sve leže na istoj kružnici.

Sada u igru dolaze obodni kutovi. Želimo izmjeriti veličinu kutova $\sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CDF$. Primijetimo da su oni obodni kutovi tetive FC s različitih strana, pa vrijedi $\sphericalangle FEC + \sphericalangle CDF = 180°$. Stoga je dovoljno odrediti jedan od njih, pa se koncentriramo samo na $\sphericalangle CDF$.



Vidimo da je $\sphericalangle CDF = \sphericalangle CDS - \sphericalangle FDS = 90° - \sphericalangle FDS$. Kut $\sphericalangle FDS$ možemo dobiti kao $\sphericalangle EDS - \sphericalangle EDF$. Kut $\sphericalangle EDF$ je obodni kut nad tetivom $\overline{EF}$, pa je jednak $\sphericalangle ECF = 21°$.

Preostaje odrediti $\sphericalangle EDS$. Njega ćemo izračunati iz jednakokračnog trokuta ESD (prisjetimo se da je S središte polukruga, pa vrijedi $|SD| = |SE|$). Kut $\sphericalangle DSE$ je obodni kut nad tetivom DE i to s druge strane od obodnog kuta $\sphericalangle ECD$. Stoga vrijedi $\sphericalangle DSE = 180° - (21° + 33°) = 126°$. Kut $\sphericalangle EDS$ onda iznosi $\dfrac{180° - \sphericalangle DSE}{2} = \dfrac{180° - 126°}{2} = 27°$.

Sve skupa, dobijamo:

$$\sphericalangle CDF = 90° - \sphericalangle FDS = 90° - (\sphericalangle EDS - \sphericalangle EDF) = 90° - (27° - 21°) = \mathbf{84}°.$$

Kut $\sphericalangle FEC$ iznosi $180° - 84° = \mathbf{96}°$.

Zadatak J-1.7. [70 bodova]

Mali medo ima 24 male kutije označene brojevima od 1 do 24, jednu veliku kutiju i neograničenu količinu loptica na raspolaganju. Na početku igre medo uzima neku količinu loptica i razmješta ih po volji u neke od malih kutija (može i u sve). Velika kutija je na početku igre prazna. Tokom igre, medo ponavlja sljedeći potez, dok god može:

- odabire neku od malih kutija u kojoj je trenutni broj loptica jednak oznaci te kutije, uzima sve loptice iz te kutije i stavlja po jednu u svaku od malih kutija označenih brojevima $1, 2, \ldots, k-1$, gdje je k oznaka odabrane kutije, a preostalu lopticu ubaci u veliku kutiju.

Igra završava kada medo više ne može napraviti potez. Kažemo da je medo *pobijedio* ako su na kraju igre sve male kutije prazne. Odredi najveći mogući broj loptica u velikoj kutiji nakon igre u kojoj je medo pobijedio.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveći mogući broj kuglica jednak **209**. Kako bismo dokazali da je upravo ovo traženi najveći broj, obavezno moramo dokazati dvije tvrdnje: da se ovaj broj kuglica doista može postići (donja ograda), tj. da postoji igra u kojoj medo pobjeđuje s ovim brojem kuglica u velikoj kutiji na kraju te da nije moguće bolje od ovoga (gornja ograda), tj. da sigurno ne postoji igra u kojoj medo pobjeđuje s većim brojem kuglica u velikoj kutiji na kraju od ovoga broja.

Pokažimo najprije da medo ne može pobijediti s više od 209 kuglica u velikoj kutiji. Za malu kutiju kažemo da smo je *ispraznili* ako smo na tu kutiju primijenili jedan potez igre. Iz pravila igre znamo da će broj kuglica u velikoj kutiji odgovarati ukupnom broju pražnjenja svih kutija (jer se prilikom svakog pražnjenja točno jedna kuglica ubaci u veliku kutiju i to je jedini način da kuglice dođu u veliku kutiju). Nadalje, uočimo da kada jednom ispraznimo kutiju na poziciji n nju možemo jedino napuniti pražnjenjem kutija na pozicijama većim od n. Posebno, ako se kutije od $n+1$ do 24 više ne mogu isprazniti ili su prazne te medo u nekom trenutku isprazni kutiju na poziciji n, tada ju u ostatku igre može zanemariti jer je više nikada neće moći napuniti s lopticama. Uočimo još da u pobjedničkoj igri u nikojem trenutku bilo koja kutija ne smije imati više kuglica od njene oznake jer je u suprotnom nikada ne bi mogli isprazniti.

Primijenimo gornje zaključke na kutije iz igre, krenuvši od posljednje koja ne ovisi o nijednoj drugoj. Kutiju na poziciji 24 će medo moći isprazniti samo jednom. Nakon toga imamo da će se kutija na poziciji 23 napuniti najviše jednom lopticom, dakle ukupan broj loptica koji će se tokom pobjedničke igre naći u toj kutiji je najviše $23+1=24$, tj. kutija na poziciji 23 će se isto prazniti najviše jednom. Analogno zaključujemo za kutije na pozicijama $22, \ldots, 14$ i 13. Za kutiju na poziciji 12 znamo da će na početku sadržavati najviše 12 loptica, što znači da će ona tijekom igre imati najviše $12+12=24$ loptice, odnosno da nju možemo isprazniti najviše 2 puta.

Analognim zaključivanjem dalje redom dobivamo: kutija na poziciji 11 se prazni najviše 2 puta, kutija na poziciji 10 se prazniti najviše 2 puta, kutija na poziciji 9 se prazni najviše 3 puta, kutija na poziciji 8 se prazni najviše 3 puta, kutija na poziciji 7 se prazni najviše 4 puta, kutija na poziciji 6 se prazni najviše 5 puta, kutija na poziciji 5 se prazni najviše 7 puta, kutija na poziciji 4 se prazni najviše 11 puta, kutija na poziciji 3 se prazni najviše 18 puta, kutija na poziciji 2 se prazni najviše 35 puta i kutija na poziciji 1 se prazni najviše 105 puta.

Prema tome ukupan broj svih pražnjenja malih kutija je najviše

$$12 \cdot 1+3 \cdot 2+2 \cdot 3+4+5+7+11+18+35+105=209.$$

Pokažimo sada da doista možemo postići ukupno 209 kuglica u velikoj kutiji kod pobjedničke igre. Na početku stavimo: 24 kuglice u kutiju na poziciji 24, 22 kuglice u kutiju na poziciji 23, 20 kuglice u kutiju na poziciji $22, \ldots, 4$ kuglice u kutiju na poziciji 14 i 2 kuglice u kutiju na poziciji 13. Zatim 12 kuglice u kutiju na poziciji 12, 8 kuglice u kutiju na poziciji 1, 4 kuglice u kutiju na poziciji 10, 9 kuglice u kutiju na poziciji 9, 3 kuglice u kutiju na poziciji 8, 4 kuglice u kutiju na poziciji 7, 2 kuglice u kutiju na poziciji 6, 2 kuglice u kutiju na poziciji 5, 4 kuglice u kutiju na poziciji 4, 3 kuglice u kutiju na poziciji 3, 1 kuglice u kutiju na poziciji 2 i 1 kuglice u kutiju na poziciji 1.

Da bi medo pobijedio u igri s gornjim rasporedom loptica u svakom potezu mora pronaći najmanju poziciju kutije koju je moguće isprazniti i zatim tu kutiju isprazniti. Takvim redoslijedom pražnjenja siguran je da će sve kutije isprazniti najveći mogući broj puta, jer pražnjenjem kutija s većih pozicija bi prepunio kutiju na manjoj poziciji koja je također spremna za pražnjenje.