HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Koliko ima međusobno različitih (nesukladnih) raznostraničnih trokuta kojima su duljine svih stranica prirodni brojevi, a duljina najdulje stranice je 100 ?

Prvo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta prirodni brojevi a, b, c, pri čemu je $a < b < c$, tj. $a < b < 100$. Vrijede sljedeće nejednakosti (nejednakost trokuta)

$$a < b + 100$$
$$b < a + 100$$
$$100 < a + b$$

Kako je $a < b$, prva nejednakost $a < b + 100$ je zadovoljena za svaki $a \in \mathbb{N}$ pa je, u nastavku, ne treba promatrati.

I druga nejednakost, $b < a + 100$, zadovoljena je za svaki $a \in \mathbb{N}$, jer je, prema uvjetu zadatka $b < 100$ pa je, u nastavku, ne treba promatrati.

Iz treće nejednakosti, $100 < a + b$, slijedi da je $b > 100 - a$.

Promatrajmo, redom, $a \in \mathbb{N}$ i odgovarajuće vrijednosti za b, $b < 100$. Najveći a koji promatramo je 98, u slučaju kada je $98 < 99 < 100$.

a	$b > a$	$b > 100 - a$	konačni uvjet	broj trokuta
1	$b > 1$	$b > 99$	$99 < b < 100$	0
2	$b > 2$	$b > 98$	$98 < b < 100$	1
3	$b > 3$	$b > 97$	$97 < b < 100$	2
4	$b > 4$	$b > 96$	$96 < b < 100$	3
…	…	…	…	…
49	$b > 49$	$b > 51$	$51 < b < 100$	48
50	$b > 50$	$b > 50$	$50 < b < 100$	49
51	$b > 51$	$b > 49$	$51 < b < 100$	48
52	$b > 52$	$b > 48$	$52 < b < 100$	47
53	$b > 53$	$b > 47$	$53 < b < 100$	46
…			…	…
97	$b > 97$	$b > 3$	$97 < b < 100$	2
98	$b > 98$	$b > 2$	$98 < b < 100$	1

Broj trokuta koji ispunjavaju uvjete zadatka je

$1 + 2 + \cdots + 48 + 49 + 48 + 47 + \cdots + 1 = 2 \cdot (1 + 2 + \cdots 48) + 49 = 2401.$

Drugo rješenje.

Neka su kao u prvom rješenju duljine stranica trokuta prirodni brojevi a, b, 100, pri čemu je $a < b < 100$, te zaključimo da vrijede nejednakosti trokuta:

$$a < b + 100$$
$$b < a + 100$$
$$100 < a + b$$

Ako je $b = 99$, onda mora vrijediti $a \in \{2,3,\ldots,98\}$, odnosno imamo 97 trokuta.

Ako je $b = 98$, onda mora vrijediti $a \in \{3,4,\ldots,97\}$, odnosno imamo 95 trokuta.

Ako je $b = 97$, onda mora vrijediti $a \in \{4,5,\ldots,96\}$, odnosno imamo 93 trokuta.

Nastavimo li na isti način zaključivati, možemo uočiti da ako smanjimo b za 1, broj trokuta se smanjuje za 2.

Ako je $b = 52$, onda mora vrijediti $a \in \{49,50,51\}$, odnosno imamo 3 trokuta.

Ako je $b = 51$, onda mora vrijediti $a \in \{50\}$, odnosno imamo 1 trokut.

Za $b \leq 50$, nema trokuta koji zadovoljavaju uvjet $a < b$.

Ukupno imamo $1 + 3 + 5 + \cdots + 93 + 95 + 97 = 49 \cdot 98 : 2 = 2401$ trokut.

2. U nizu od deset prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova, a sedmi član niza je 184. Koliko ima takvih nizova? Za svaki od njih napiši prva dva člana i odredi zbroj svih deset članova niza.

Rješenje.

Neka su prva dva člana niza prirodni brojevi a i b. Svih deset članova možemo prikazati pomoću a i b:

$F_1 = a,$ $F_2 = b,$ $F_3 = a + b,$ $F_4 = a + 2b,$ $F_5 = 2a + 3b,$
$F_6 = 3a + 5b,$ $F_7 = 5a + 8b,$ $F_8 = 8a + 13b,$ $F_9 = 13a + 21b,$ $F_{10} = 21a + 34b.$

Označimo njihov zbroj sa Z. Vrijedi

$$Z = a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) +$$
$$(3a + 5b) + (5a + 8b) + (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b)$$
$$Z = 55a + 88b$$
$$Z = 11 \cdot (5a + 8b)$$

Kako je sedmi član niza 184, tj. $5a + 8b = 184$, vrijednost zbroja Z je

$$Z = 11 \cdot 184$$
$$Z = 2024$$

Zbroj deset brojeva tog niza je 2024.

Promotrimo za koje je vrijednosti prirodnih brojeva a i b sedmi član tog niza jednak 184, odnosno za koje vrijednosti brojeva a i b je $5a + 8b = 184$.

Kako su pribrojnici $8b$ i 184 djeljivi s 8, pribrojnik $5a$ mora biti djeljiv s 8. Brojevi 5 i 8 su relativno prosti pa a mora biti djeljiv s 8.

Kako su a i b prirodni brojevi, pribrojnik $5a$ mora biti manji od 184, tj. $a < 36.8$.

a	$b = (184 - 5a) : 8$
8	18
16	13
24	8
32	3

Postoje četiri niza koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1. niz: 8, 18, …
2. niz: 16, 13, …
3. niz: 24, 8, …
4. niz: 32, 3, …

3. Mario treba odabrati lozinku koja se sastoji od pet znakova među kojima trebaju biti tri znamenke i dva slova hrvatske abecede pri čemu **nisu** svi znakovi različiti. Koliko ima takvih lozinki?

Prvo rješenje.

Broj mogućih lozinki odredit ćemo tako da od broja svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede oduzmemo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

Lozinka se sastoji od pet znakova. Biraju se 3 znamenke iz skupa od 10 znamenaka te 2 slova hrvatske abecede iz skupa od 30 slova. Neka je Z oznaka za znamenku, a S oznaka za slovo u lozinki.

Odredimo najprije na koliko se pozicija u lozinki mogu rasporediti dva slova. Prvo slovo možemo rasporediti na jednu od 5 pozicija, a drugo slovo na jednu od preostale 4 pozicije. Kako u rasporedu pozicija, prije odabira slova, nije važno koje je prvo, a koje drugo slovo, broj načina $5 \cdot 4$ treba podijeliti s 2. Znamenkama, tada, popunjavamo slobodne pozicije.

Dakle, dva slova i tri znamenke mogu se u lozinki rasporediti na 10 načina.

(To su *SSZZZ*, *SZSZZ*, *SZZSZ*, *SZZZS*, *ZSSZZ*, *ZSZSZ*, *ZSZZS*, *ZZSSZ*, *ZZSZS*, *ZZZSS*.)

Odredimo broj svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki smiju se ponavljati pa svako od njih možemo odabrati na 30 načina, tj. ukupno $30 \cdot 30$ načina
- znamenke u lozinki smiju se ponavljati pa svaku od njih možemo odabrati na 10, tj. ukupno $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina.

Broj svih mogućih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede je $10 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000$.

Odredimo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki moraju biti međusobno različita pa prvo slovo možemo odabrati na 30, a drugo na 29, ukupno $30 \cdot 29$ načina.
- znamenke u lozinki moraju biti međusobno različite pa prvu znamenku možemo odabrati na 10, drugu na 9, treću na 8, ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8$ načina.

Broj lozinki u kojima su svi znakovi različiti je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 6264000$.

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$9000000 - 6264000 = 2736000.$$

Drugo rješenje.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su dva ista slova.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slovo koje se ponavlja u lozinki možemo odabrati na 30 načina
- tri znamenke biramo na $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina

Broj lozinki u kojima su dva slova ista je $10 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 300\,000$.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja točno dva puta možemo odabrati na 10 načina, a preostalu znamenku na 9 načina
- tri su moguće pozicije na koje se može rasporediti znamenka koja se ne ponavlja

Broj lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3 = 2\,349\,000$.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja tri puta možemo odabrati na 10 načina

Broj lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 = 87\,000$.

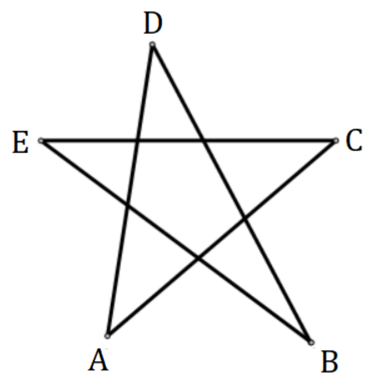
Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$300\,000 + 2\,349\,000 + 87\,000 = 2736000.$$

4. Za lik na slici vrijedi

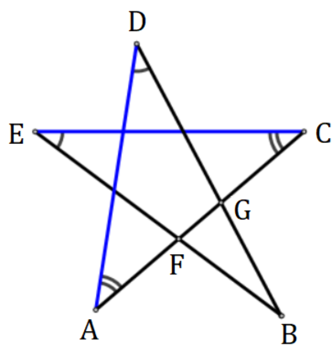
$|\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle ADB|, \quad |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ECA| \;\text{ i }\; |CE| = |AD|.$

Dokaži da je $|BD| = |BE|$.



Prvo rješenje.

Neka je točka F sjecište dužina $\overline{BE}$ i $\overline{AC}$, a točka G sjecište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$.



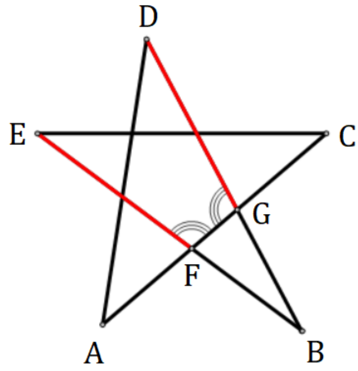
Pokažimo da je $\Delta DAG \cong \Delta CEF$.

Kako je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle FEC$ i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle GAD$ te $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADG$ i $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ECF$, imamo (uvjeti zadatka):

$$\sphericalangle FEC \cong \sphericalangle ADG$$
$$\sphericalangle GAD \cong \sphericalangle ECF$$
$$\overline{CE} \cong \overline{AD}$$

Stoga je $\Delta DAG \cong \Delta CEF$ (poučak KSK) pa je i $|EF| = |DG|$.

Pokažimo da je ΔBGF jednakokračan.



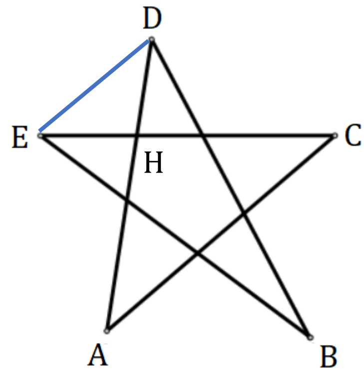
Trokut DAG i trokut CEF podudaraju se u kutovima uz stranice $\overline{CE}$ i $\overline{AD}$ pa se podudaraju i u trećem kutu, $\measuredangle CFE \cong \measuredangle DGA$.

Kutovi $\measuredangle CFE$ i $\measuredangle DGA$ su sukladni pa su sukladni i njihovi susjedni kutovi, $\measuredangle BFG \cong \measuredangle FGB$. To su kutovi uz stranicu $\overline{FG}$ pa je ΔBGF jednakokračan. Stoga je i $|BF| = |BG|$.

Dakle, pokazali smo da je $|EF| = |DG|$ i $|BF| = |BG|$.

Kako je $|BD| = |BG| + |GD|$ i $|BE| = |BF| + |FE|$, tada je $|BD| = |BE|$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.



Neka je točka H sjecište dužina $\overline{CE}$ i $\overline{AD}$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $|\measuredangle CAH| = |\measuredangle HCA|$, pa je $|AH| = |HC|$.

Budući da je $|CE| = |AD|$, slijedi $|CE| - |HC| = |AD| - |AH|$,

odnosno $|EH| = |HD|$.

Dakle, trokut DEH je jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$, pa je $|\measuredangle HED| = |\measuredangle EDH|$.

Slijedi

$$|\measuredangle HED| + |\measuredangle BEH| = |\measuredangle EDH| + |\measuredangle HDB|,$$

odnosno $|\measuredangle BED| = |\measuredangle EDB|$. Zaključujemo da je trokut EBD jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$.

Dakle, vrijedi $|BD| = |BE|$, što je i trebalo dokazati.

5. Odredi sve parove prirodnih brojeva a i b za koje je

$$a \cdot b + 102 = 3 \cdot V(a,b) + 36 \cdot D(a,b).$$

$V(a,b)$ je najmanji zajednički višekratnik, a $D(a,b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake $D(a,b) = D$ i $V(a,b) = V$.

$$a \cdot b + 102 = 3 \cdot V + 36 \cdot D$$

Kako je $a \cdot b = D \cdot V$, imamo

$$DV + 102 = 3V + 36D$$
$$DV - 36D = 3V - 102$$
$$D(V - 36) = 3V - 102$$
$$D = \frac{3V - 102}{V - 36} = \frac{3 \cdot (V - 36) + 6}{V - 36} = 3 \cdot \frac{V - 36}{V - 36} + \frac{6}{V - 36} = 3 + \frac{6}{V - 36}$$

Najveći zajednički djelitelj brojeva je prirodan broj pa $V - 36$ mora biti djelitelj broja 6.

$V-36$	V	$D=3+\dfrac{6}{V-36}$	D dijeli V i $D>0$
1	37	9	nije rješenje
2	38	6	nije rješenje
3	39	5	nije rješenje
6	42	4	nije rješenje
-1	35	-3	nije rješenje
-2	34	0	nije rješenje
-3	33	1	1 dijeli 33
-6	30	2	2 dijeli 30

U slučaju kada je $D=1$ i $V=33$ imamo $a\cdot b=D\cdot V=33$. Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$.

U slučaju kada je $D=2$ i $V=30$ imamo $a\cdot b=D\cdot V=60$. Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,60\}$, $\{2,30\}$, $\{3,20\}$, $\{4,15\}$, $\{5,12\}$, $\{6,10\}$. Kako je $D=2$, jedina rješenja su $\{2,30\}$ i $\{6,10\}$.

Konačno, parovi prirodnih brojeva a i b za koje je $a\cdot b+102=3\cdot V(a,b)+36\cdot D(a,b)$ su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$, $\{2,30\}$ i $\{6,10\}$.

Napomena. Tvrdnja $a\cdot b=D\cdot V$ se dokazuje koristeći rastav na proste faktore. Ako je p bilo koji prost faktor brojeva a i b, onda postoje brojevi $k,\ell\in\mathbb{N}_0$ takvi da je p^k potencija broja p u rastavu broja a, te p^ℓ potencija broja p u rastavu broja b na proste faktore. Manja od tih potencija je upravo potencija broja p u rastavu broja D, a veća je potencija broja p u rastavu broja V na proste faktore.

Drugo rješenje.

Uvedimo oznaku $D(a,b)=D$. Neka je $a=Da_1$ i $b=Db_1$, pri čemu prirodni brojevi a_1 i b_1 nemaju zajedničkih prostih faktora (relativno su prosti). Tada je $V(a,b)=Da_1b_1$.

U novim oznakama jednadžba glasi

$$Da_1\cdot Db_1+102=3Da_1b_1+36D.$$

Uočimo da svi pribrojnici, osim 102, imaju faktor D, pa slijedi da je D djelitelj broja 102.

Budući da je $102=2\cdot 3\cdot 17$, slijedi da je $D\in\{1,2,3,6,17,34,51,102\}$.

Ako je $D=1$, onda imamo jednadžbu

$$a_1b_1+102=3a_1b_1+36,$$

odnosno

$$33=a_1b_1.$$

Mogući parovi brojeva a i b su $\{1,33\}$, $\{3,11\}$.

Ako je $D=2$, onda imamo jednadžbu $4a_1b_1+102=6a_1b_1+72$, odnosno $15=a_1b_1$.

Mogući parovi brojeva a i b su $\{2,30\}$, $\{6,10\}$.

Ako je $D=3$, onda imamo jednadžbu $6a_1b_1+102=6a_1b_1+108$, što je nemoguće.

Slično, u ostalim slučajevima dobivamo:

za $D=6$ jednadžbu $18a_1b_1=114$,

za $D=17$ jednadžbu $14a_1b_1=30$,

za $D=34$ jednadžbu $31a_1b_1=33$,

za $D=51$ jednadžbu $48a_1b_1=34$,

te za $D=102$ jednadžbu $99a_1b_1=35$, od kojih nijedna nema rješenja.