HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

1. Neka su A, B, C, D, E i F različite znamenke za koje vrijedi

$$\overline{AA} + A = \overline{AB}$$
$$\overline{BB} + B = \overline{CD}$$
$$\overline{CC} + C = \overline{EF}$$

Koliko je $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$?

Rješenje.

Znamenka A ne može biti 0. Ispitajmo ostale mogućnosti.

A	$\overline{AB} = \overline{AA} + A$	B	$\overline{CD} = \overline{BB} + B$	C, D	$\overline{EF} = \overline{CC} + C$	E, F
1	12	2	24	$C = 2$, nemoguće jer $B = C$		
2	24	4	48	$C = 4$, nemoguće jer $B = C$		
3	36	6	72	$C = 7, D = 2$	84	$E = 8, F = 4$
4	48	8	96	$C = 9, D = 6$	108, nemoguće	

Ako je $A \geq 5$, onda prva znamenka zbroja $\overline{AA} + A$ nije A.

Vidimo da postoji samo jedna mogućnost, $\overline{AB} = 36$, $\overline{CD} = 72$, $\overline{EF} = 84$, pa je

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = 36 + 72 + 84 = 192.$$

Napomena.

Iz prve jednakosti zaključujemo da je A manji od 5 i da je B = 2A. Iz druge jednadžbe slijedi da je B veći od 5, pa je B = 6 ili B = 8. Ta dva slučaja provjeravamo kao u tablici u danom rješenju.

2. Neka je $ABCD$ kvadrat. Točka E pripada stranici $\overline{BC}$ i vrijedi $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$, a točka F pripada stranici $\overline{CD}$ i vrijedi $|FC| = \frac{4}{5}|CD|$. Ako površina trokuta AEF iznosi 5292 cm^2, koliki su opseg i površina kvadrata $ABCD$?

Rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

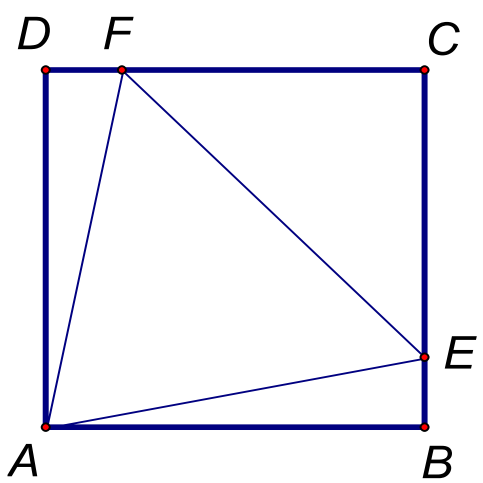
Znači, $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.

Površina kvadrata $ABCD$ jednaka je a^2.

Kako je $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$, slijedi da je $|BE| = \frac{1}{5}a = 0.2a$ i $|EC| = \frac{4}{5}a = 0.8a$.

Kako je $|FC| = \frac{4}{5}|CD|$, slijedi da je $|DF| = \frac{1}{5}a = 0.2a$ i $|FC| = \frac{4}{5}a = 0.8a$.

Površine trokuta ΔABE i ΔAFD su jednake i iznose $(a \cdot 0.2a) : 2 = 0.1a^2$. Površina trokuta ΔECF iznosi $(0.8a \cdot 0.8a) : 2 = 0.32a^2$. Zbroj površina tih triju trokuta iznosi $0.1a^2 + 0.1a^2 + 0.32a^2 = 0.52a^2$.



Površina trokuta ΔAEF jednaka je površini kvadrata $ABCD$ umanjenoj za zbroj površina trokuta ABE, AFD i ECF, tj. iznosi $a^2 - 0.52a^2 = 0.48a^2$.

Površina trokuta ΔAEF iznosi 5292 cm^2 pa vrijedi $0.48a^2 = 5292$, odnosno

$$a^2 = 5292 : 0.48 = 11025.$$

Površina kvadrata jednaka je 11025 cm^2.

Broj 11025 rastavimo na proste faktore: $11025 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$.

Proste faktore podijelimo u dvije jednake grupe: $11025 = (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7) = 105 \cdot 105$.

Znači, duljina stranice kvadrata iznosi $a = 105$ cm, pa je opseg $105 \cdot 4 = 420$ cm.

3. U nizu od deset prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći član niza jednak je zbroju dvaju prethodnih članova, a sedmi član niza je 184. Dokaži da je u svakom takvom nizu zbroj prvih deset članova isti, te odredi taj zbroj.

Rješenje.

Neka su prva dva člana niza prirodni brojevi a i b. Svih deset članova možemo prikazati pomoću a i b:

$$F_1 = a, \quad F_2 = b, \quad F_3 = a + b, \quad F_4 = a + 2b, \quad F_5 = 2a + 3b,$$
$$F_6 = 3a + 5b, \quad F_7 = 5a + 8b, \quad F_8 = 8a + 13b, \quad F_9 = 13a + 21b, \quad F_{10} = 21a + 34b.$$

Označimo njihov zbroj sa Z. Vrijedi

$$Z = a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b)$$
$$+(5a + 8b) + (8a + 13b) + (13a + 21b) + (21a + 34b) = 55a + 88b,$$

odnosno

$$Z = 11 \cdot (5a + 8b).$$

Kako je sedmi član niza 184, tj. $5a + 8b = 184$, vrijednost zbroja Z je

$$Z = 11 \cdot 184$$
$$Z = 2024$$

Zbroj deset brojeva takvog niza je 2024.

Napomena. Postoje četiri takva niza. Kako su pribrojnici $8b$ i 184 djeljivi s 8, pribrojnik $5a$ mora biti djeljiv s 8. Brojevi 5 i 8 su relativno prosti pa a mora biti djeljiv s 8.

Kako su a i b prirodni brojevi, pribrojnik $5a$ mora biti manji od 184, tj. $a < 36.8$.

Postoje četiri niza koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

1. niz: $8, 18, \ldots$
2. niz: $16, 13, \ldots$
3. niz: $24, 8, \ldots$
4. niz: $32, 3, \ldots$

4. Neka su a, b, c prirodni brojevi za koje vrijedi $15a + 6b = 20c$.

a) Je li umnožak $a \cdot b \cdot$ c uvijek djeljiv s 30 ?

b) Je li umnožak $a \cdot b \cdot$ c uvijek djeljiv s 20 ?

Rješenje.

a) U izrazu $15a + 6b = 20c$ brojevi $6b$ i $20c$ su djeljivi s 2 pa i pribrojnik $15a$ mora biti djeljiv s 2. Kako su brojevi 15 i 2 relativno prosti, to će biti jedino ako je i a djeljiv s 2. Neka je $a = 2k, k \in$ N.

U izrazu $15a + 6b = 20c$ brojevi $15a$ i $20c$ su djeljivi s 5 pa i pribrojnik $6b$ mora biti djeljiv s 5. Kako su brojevi 6 i 5 relativno prosti, to će biti jedino ako je i b djeljiv s 5. Neka je $b = 5m, m \in$ N.

U izrazu $15a + 6b = 20c$ pribrojnici $15a$ i $6b$ su djeljivi s 3 pa i zbroj $20c$ mora biti djeljiv s 3. Kako su brojevi 20 i 3 relativno prosti, to će biti jedino ako je i c djeljiv s 3. Neka je $c = 3n, n \in$ N.

Tada je $a \cdot b \cdot c = 2k \cdot 5m \cdot 3n = 30 \cdot kmn$, pa je umnožak $a \cdot b \cdot c$ uvijek djeljiv s 30.

b) Ne; na primjer, za $a = 2,\ b = 5,\ c = 3$ je $15 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 20 \cdot 3$, a umnožak $2 \cdot 5 \cdot 3$ nije djeljiv s 20.

5. Mario treba odabrati lozinku koja se sastoji od pet znakova među kojima trebaju biti tri znamenke i dva slova hrvatske abecede pri čemu **nisu** svi znakovi različiti. Koliko ima takvih lozinki?

Prvo rješenje.

Broj mogućih lozinki odredit ćemo tako da od broja svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede oduzmemo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

Lozinka se sastoji od pet znakova. Biraju se 3 znamenke iz skupa od 10 znamenaka te 2 slova hrvatske abecede iz skupa od 30 slova. Neka je Z oznaka za znamenku, a S oznaka za slovo u lozinki.

Odredimo najprije na koliko se pozicija u lozinki mogu rasporediti dva slova. Prvo slovo možemo rasporediti na jednu od 5 pozicija, a drugo slovo na jednu od preostale 4 pozicije. Kako u rasporedu pozicija, prije odabira slova, nije važno koje je prvo, a koje drugo slovo, broj načina $5 \cdot 4$ treba podijeliti s 2. Znamenkama, tada, popunjavamo slobodne pozicije.

Dakle, dva slova i tri znamenke mogu se u lozinki rasporediti na 10 načina.

(To su: SSZZZ, SZSZZ, SZZSZ, SZZZS, ZSSZZ, ZSZSZ, ZSZZS, ZZSSZ, ZZSZS, ZZZSS.)

Odredimo broj svih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki smiju se ponavljati pa svako od njih možemo odabrati na 30 načina, tj. ukupno $30 \cdot 30$ načina
- znamenke u lozinki smiju se ponavljati pa svaku od njih možemo odabrati na 10, tj. ukupno $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina.

Broj svih mogućih lozinki koje se mogu napisati pomoću tri znamenke i dva slova hrvatske abecede je $10 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000$.

Odredimo broj takvih lozinki u kojima su svi znakovi različiti.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slova u lozinki moraju biti međusobno različita pa prvo slovo možemo odabrati na 30, a drugo na 29, ukupno $30 \cdot 29$ načina.
- znamenke u lozinki moraju biti međusobno različite pa prvu znamenku možemo odabrati na 10, drugu na 9, treću na 8, ukupno $10 \cdot 9 \cdot 8$ načina.

Broj lozinki u kojima su svi znakovi različiti je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 6264000$.

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$9000000 - 6264000 = 2736000.$$

Drugo rješenje.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su dva ista slova.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- slovo koje se ponavlja u lozinki možemo odabrati na 30 načina
- tri znamenke biramo na $10 \cdot 10 \cdot 10$ načina

Broj lozinki u kojima su dva slova ista je $10 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 300\,000$.

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja točno dva puta možemo odabrati na 10 načina, a preostalu znamenku na 9 načina
- tri su moguće pozicije na koje se može rasporediti znamenka koja se ne ponavlja

Broj lozinki u kojima su slova različita, a jedna znamenka se ponavlja točno dva puta je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 3 = 2\,349\,000.$

Odredimo broj svih lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta.

U svakom od 10 mogućih rasporeda:

- dva različita slova možemo odabrati na $30 \cdot 29$ načina
- znamenku u lozinki koja se ponavlja tri puta možemo odabrati na 10 načina

Broj lozinki u kojima su slova različita, znamenka se ponavlja tri puta je

$10 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 10 = 87\,000.$

Prema tome, broj lozinki u kojima nisu svi znakovi različiti je

$$300\,000 + 2\,349\,000 + 87\,000 = 2736000.$$