Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

drugo kolo – srijeda, 9. listopada 2024.

Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Neka su A, B, C, D, E i F različite znamenke za koje vrijedi

$$\overline{AA} + A = \overline{AB}$$
$$\overline{BB} + B = \overline{CD}$$
$$\overline{CC} + C = \overline{EF}$$

Koliko je $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF}$?

Rješenje.

Znamenka A ne može biti 0. Ispitajmo ostale mogućnosti.

A	$\overline{AB} = \overline{AA} + A$	B	$\overline{CD} = \overline{BB} + B$	C, D	$\overline{EF} = \overline{CC} + C$	E, F
1	12	2	24	$C = 2$, nemoguće jer $B = C$		
2	24	4	48	$C = 4$, nemoguće jer $B = C$		
3	36	6	72	$C = 7, D = 2$	84	$E = 8, F = 4$
4	48	8	96	$C = 9, D = 6$	108, nemoguće	

Ako je $A \geq 5$, onda prva znamenka zbroja $\overline{AA} + A$ nije A.

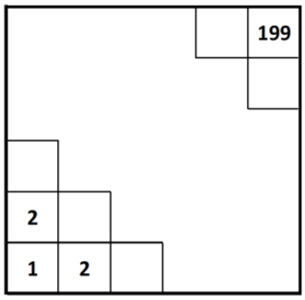
Vidimo da postoji samo jedna mogućnost, $\overline{AB} = 36$, $\overline{CD} = 72$, $\overline{EF} = 84$, pa je

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = 36 + 72 + 84 = 192.$$

Napomena.

Iz prve jednakosti zaključujemo da je A manji od 5 i da je B $= 2$A. Iz druge jednadžbe slijedi da je B veći od 5, pa je B = 6 ili B = 8. Ta dva slučaja provjeravamo kao u tablici u danom rješenju.

2. U tablicu 100×100 upisani su prirodni brojevi tako da se brojevi u susjednim poljima razlikuju za 1. Susjedna polja su ona koja imaju zajedničku stranicu. U donje lijevo polje upisan je broj 1, u njemu susjedna polja broj 2 i tako dalje, do gornjeg desnog polja u koje je upisan broj 199. Odredi zbroj svih brojeva upisanih u tablicu.



Prvo rješenje.

U tablici je ukupno zapisano $100 \cdot 100 = 10\,000$ brojeva.

Pojavljuje se jedan broj 1, dva broja 2, …. , sto brojeva 100 (na dijagonali), a zatim se broj pojedinih brojeva smanjuje. Zbroj svih tih brojeva je:

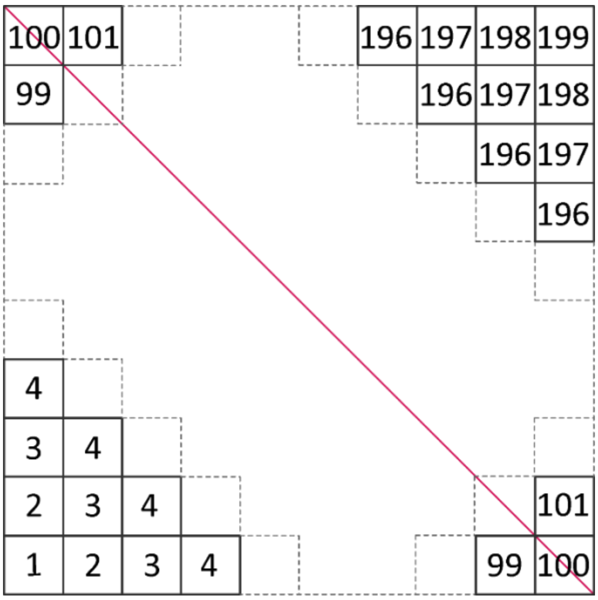
$$1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \cdots + (100 + 100 + \cdots + 100) + \cdots + (197 + 197 + 197) + (198 + 198) + 199.$$

Uočimo da je zbroj brojeva u poljima koja su simetrična u odnosu na označenu dijagonalu uvijek jednak 200.

Grupiranjem dobivamo:

$$(1 + 199) + (2 + 198) + (2 + 198) + (3 + 197) + \cdots + (100 + 100) + \cdots + (100 + 100)$$

Zbroj brojeva u svakoj zagradi je 200. Takvih je zagrada $10\,000 : 2 = 5000$ jer smo zbrojili svih 10 000 brojeva. Dakle, zbroj svih brojeva u tablici iznosi $200 \cdot 5000 = 1\,000\,000$.



Drugo rješenje.

U prvi stupac tablice upisani su brojevi od 1 do 100.

Njihov je zbroj

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101.$$

U drugi stupac tablice upisani su brojevi od 2 do 101.

Njihov je zbroj

$$2 + 3 + 4 + \cdots + 51 + 52 + \cdots + 98 + 99 + 100 + 101 = 50 \cdot 103.$$

Analogno, sljedeći zbrojevi su $50 \cdot 105, 50 \cdot 107, \dots, 50 \cdot 299$.

Zbroj zbrojeva po svim stupcima je

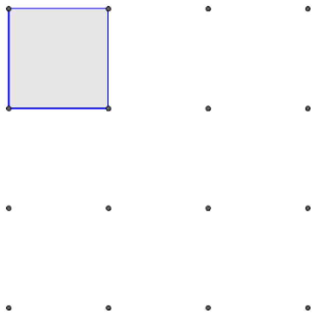
$$\begin{aligned} &50 \cdot 101 + 50 \cdot 103 + 50 \cdot 105 + \cdots + 50 \cdot 295 + 50 \cdot 297 + 50 \cdot 299 \\ &= 50 \cdot (101 + 103 + 105 + \cdots + 295 + 297 + 299) \\ &= 50 \cdot ((101 + 299) + (103 + 297) + \cdots + (199 + 201)) \\ &= 50 \cdot (400 \cdot 50) = 1\,000\,000. \end{aligned}$$

3. U kvadratnoj mreži na slici najbliže su točke udaljene 2 cm. Skiciraj pet kvadrata različitih veličina s vrhovima u toj mreži, a zatim odredi njihove površine.

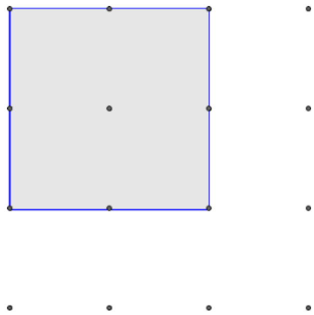
Rješenje.

Postoji pet različitih veličina kvadrata:

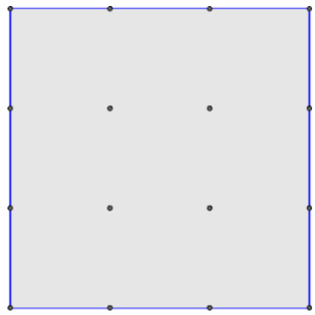
A:



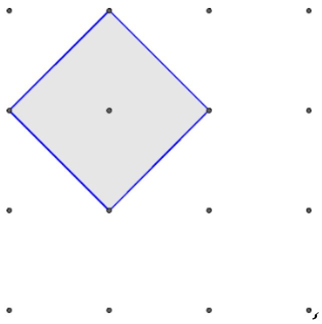
B:



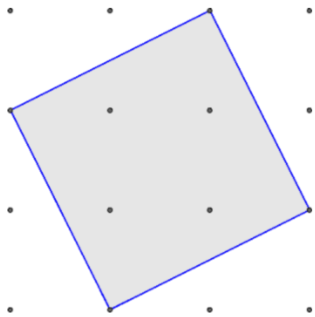
C:



D:



E:

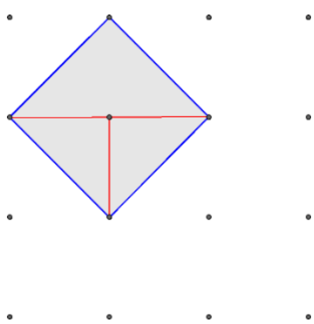


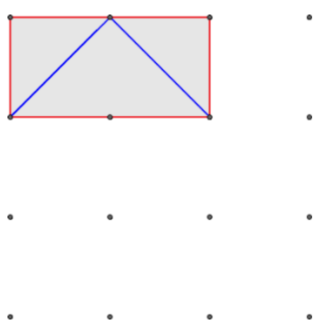
Površine prva tri kvadrata lako je odrediti, jer su duljine njihovih stranica redom 2 cm, 4 cm i 6 cm. Zato površina kvadrata A iznosi 4 cm^2, površina kvadrata B 16 cm^2, a površina kvadrata C je 36 cm^2.

Površine kvadrata D i E mogu se izračunati na više načina. Prikazat ćemo dva načina.

Prvi način određivanja površine kvadrata D i E

Da bismo odredili površinu kvadrata D, razrežimo ga kao na lijevoj slici.

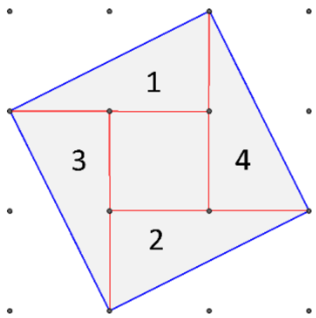


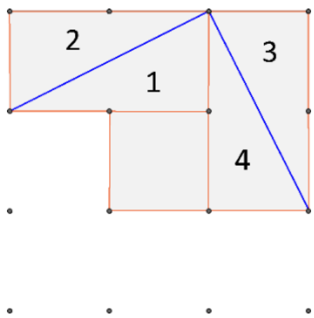


Premještanjem dvaju manjih pravokutnih trokuta (slika desno) dobivamo pravokutnik čije su duljine stranica 4 cm i 2 cm. Njegova je površina 8 cm^2.

Odredimo na kraju i površinu kvadrata E.

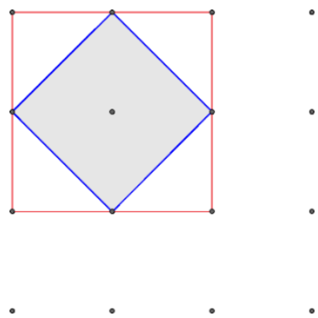
Razrežimo kvadrat E na 4 jednaka pravokutna trokuta (označena brojevima 1, 2, 3 i 4) i manji kvadrat.





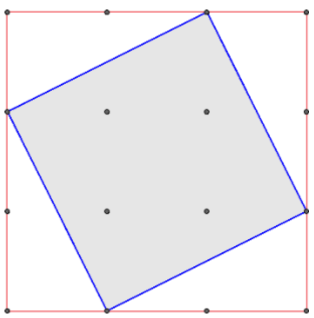
Premještanjem pravokutnog trokuta 2 iznad pravokutnog trokuta 1 i pravokutnog trokuta 4 desno od pravokutnog trokuta 3 (vidi slike gore) dobivamo dva pravokutnika čije su duljine stranica 4 cm i 2 cm. Površine tih pravokutnika su $4 \cdot 2 = 8$ cm^2.

Površina kvadrata E jednaka je zbroju površina tih dvaju pravokutnika i površine manjeg kvadrata, odnosno $2 \cdot 8 + 4 = 20$ cm^2.



Drugi način određivanja površine kvadrata D i E

Nadopunimo kvadrat D s četirima jednakim pravokutnim trokutima (koji su jednaki pravokutnim trokutima na koje je podijeljen kvadrat D). Tim dopunjavanjem dobili smo kvadrat stranice duljine 4 cm čija je površina dva puta veća od površine kvadrata D. Zato površina kvadrata D iznosi $(4 \cdot 4) : 2 = 8$ cm^2.



Nadopunimo kvadrat E s četirima jednakim pravokutnim trokutima. Tim dopunjavanjem dobili smo kvadrat čija je površina $6 \cdot 6 = 36$ cm^2.

Površina svakog od četiri pravokutna trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 2 cm. Površina tog pravokutnika je 8 cm^2, a površina svakog od dodanih pravokutnih trokuta 4 cm^2.

Površina kvadrata E jednaka je razlici površina velikog kvadrata dobivenog dopunjavanjem i zbroja površina četiriju pravokutnih trokuta

$$36 - 4 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2.$$

4. Troje učenika petog razreda i četvero učenika četvrtog razreda koji su odabrani za sudjelovanje na ekipnom matematičkom natjecanju trebaju se podijeliti u dvije ekipe - Gru i Malci. U jednoj ekipi trebaju biti tri, a u drugoj četiri učenika. U svakoj ekipi treba biti barem jedan učenik petog razreda. Na koliko se načina učenici mogu podijeliti u ekipe?

Rješenje.

Razlikujemo četiri slučaja, ovisno o broju učenika u ekipama i razredima koje pohađaju.

Gru	5-4-4	5-5-4	5-4-4-4	5-5-4-4
Malci	5-5-4-4	5-4-4-4	5-5-4	5-4-4

Neka su A, B i C učenici petog razreda, a D, E, F i G učenici četvrtog razreda.

1. slučaj: Gru = 5-4-4, Malci = 5-5-4-4

Ekipa Gru ima tri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda, a ekipa Malci četiri učenika od kojih su dva učenika petog razreda.

U ekipi Gru jednog učenika petog razreda moguće je odabrati na 3 načina (to je A ili B ili C). Preostala dva člana ekipe Gru, učenike četvrtog razreda, moguće je odabrati na $4 \cdot 3 : 2 = 6$ načina (to su D, E ili D, F ili D, G ili E, F ili E, G ili F, G; poredak nije bitan). Ekipu Gru moguće je sastaviti na $3 \cdot 6 = 18$ načina. U ekipi Malci su svi preostali učenici.

2. slučaj: Gru = 5-5-4, Malci = 5-4-4-4

Ekipa Gru ima tri učenika od kojih su dva učenika petog razreda, a ekipa Malci četiri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda.

U ekipi Gru dva učenika petog razreda moguće je odabrati na 3 načina – isto kao da biramo onog učenika petog razreda koji će biti u ekipi Malci. Preostalog člana ekipe Gru, učenika četvrtog razreda, moguće je odabrati na 4 načina. Ovakvu podjelu moguće je napraviti na $3 \cdot 4 = 12$ načina.

3. slučaj: Gru = 5-4-4-4, Malci = 5-5-4

Ekipa Gru ima četiri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda, a ekipa Malci tri učenika od kojih su dva učenika petog razreda.

Ovakvih podjela ima jednako kao i podjela u drugom slučaju, 12, jer su samo zamijenjene uloge (imena) ekipa.

4. slučaj: Gru = 5-5-4-4, Malci = 5-4-4

Ekipa Gru ima četiri učenika od kojih su dva učenika petog razreda, a ekipa Malci tri učenika od kojih je samo jedan učenik petog razreda.

Ovakvih je podjela jednako kao u prvom slučaju, 18.

Ukupan broj mogućih podjela učenika u ekipe Gru i Malci je $18 + 12 + 12 + 18 = 60$.

5. Vedran je zamolio prijatelje da zamisle dvoznamenkasti broj. Zatim im je davao upute:

- dodaj zamišljenom broju 42
- pomnoži dobiveni rezultat s 20
- dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio
- podijeli dobiveni broj sa 7
- dodaj 80.

Kada je čuo da je Mirela dobila broj 311, a Nikola broj 443, Vedran je odmah odredio koje su brojeve zamislili. Možeš li i ti odrediti te brojeve? Objasni na koji način Vedran određuje zamišljene brojeve.

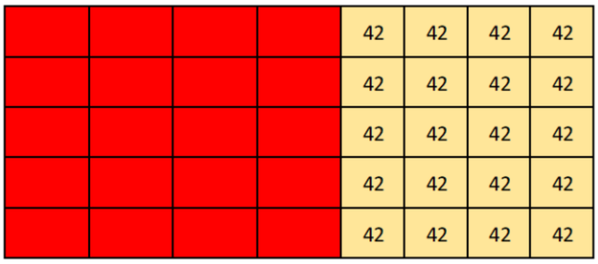
Prvo rješenje.

Prikažimo zamišljeni broj kao crveni pravokutnik: 

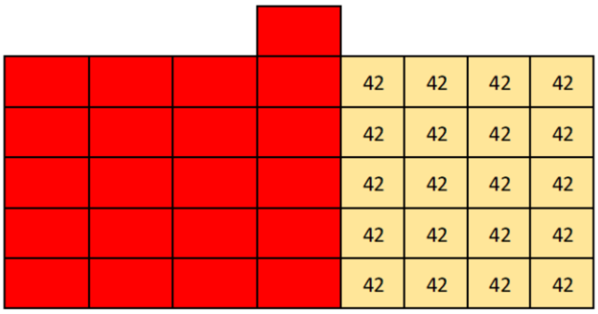
Slijedom Vedranovih uputa dobivamo:

(dodaj zamišljenom broju 42) 

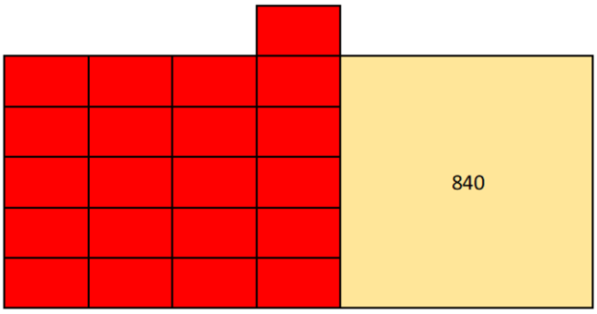
(pomnoži dobiveni rezultat s 20)

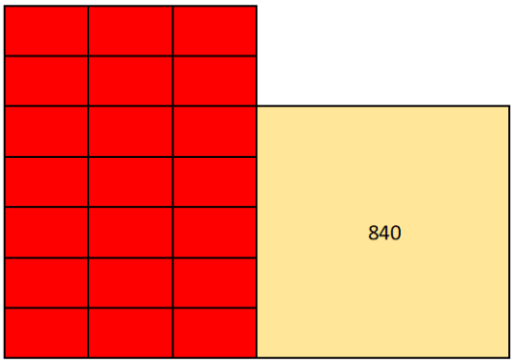


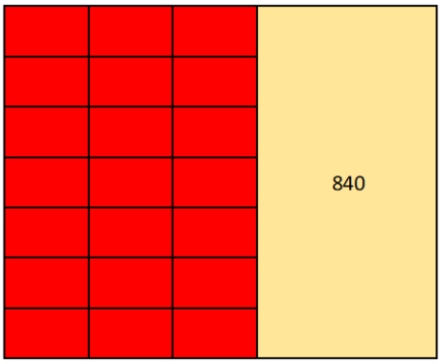
(dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio)

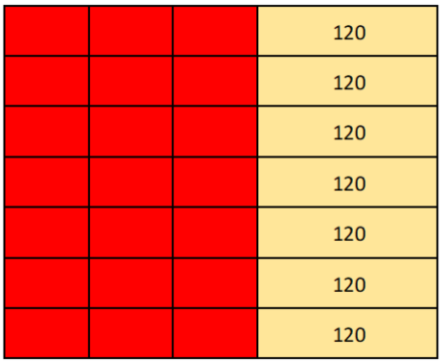


odnosno...



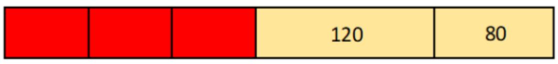




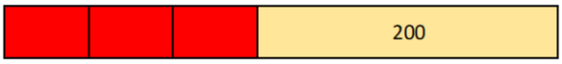


(podijeli dobiveni broj sa 7)

(dodaj 80)



Konačno, dobiveni rezultat Vedranovih prijatelja možemo prikazati ovako:



Ako je  + 200 = 311, onda je  = 111 i  = 111 : 3 = 37.

Mirela je zamislila broj 37.

Slično zaključujemo da je Nikola zamislio broj $(443 - 200) : 3 \;=\; 243 : 3 = 81$.

Da bi dobio zamišljeni broj, Vedran mora od rezultata oduzeti broj 200 i zatim podijeliti s 3.

Drugo rješenje

Umjesto da broju dodaju 42, pa pomnože rezultat s 20, Vedranovi prijatelji mogu zamišljeni broj pomnožiti s 20 te rezultatu dodati $42 \cdot 20 = 840$. Kada tom rezultatu dodaju zamišljeni broj, rezultat je zamišljeni broj pomnožen s 21 te uvećan za 840. Dijeljenjem sa 7 dobije se zamišljeni broj pomnožen s 3 i uvećan za $840 : 7 = 120$. Na kraju dodaju još 80 te dobiju zamišljeni broj pomnožen s 3 i uvećan za 200.

To znači da Vedran mora od rezultata oduzeti broj 200 i zatim podijeliti s 3 da bi dobio zamišljeni broj.

Mirela je zamislila broj $(311 - 200) : 3 = 111 : 3 = 37$, a Nikola broj $(443 - 200) : 3 = 243 : 3 = 81$.

Treće rješenje

Neka je x broj zamišljeni broj.

Slijedeći Vedranove upute, nakon prva tri koraka dobije se

- (dodaj zamišljenom broju 42) $\quad x + 42$
- (pomnoži dobiveni rezultat s 20) $\quad (x + 42) \cdot 20$
- (dodaj tom rezultatu broj koji si zamislio) $\quad (x + 42) \cdot 20 + x$

Sređivanjem dobivamo $(x + 42) \cdot 20 + x = 20x + 840 + x = 21x + 840$

Nakon sljedećeg koraka (podijeli dobiveni broj sa 7) rezultat je $3x + 120$

te na kraju (dodaj 80) konačno $3x + 200$.

Mirelin broj dobit ćemo rješavanjem jednadžbe $3x + 200 = 311$.

$$3x = 311 - 200 = 111, \qquad x = 111 : 3 = 37.$$

Za Nikolin broj vrijedi $3x + 200 = 443$ te dobivamo $x = 81$.

Mirela je zamislila broj 37, a Nikola broj 81.

Vedran zamišljeni broj dobiva tako da rezultat umanji za 200 i dobivenu razliku podijeli brojem 3.