Hrvatsko matematičko društvo

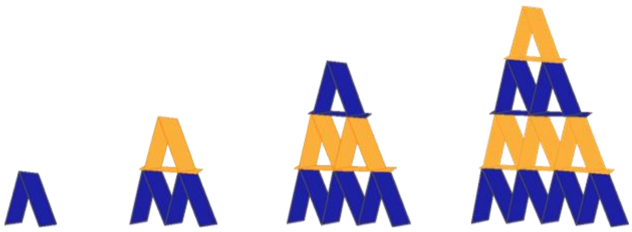
HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

Rješenja zadataka za grupu C (6./7. razred)

1. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjence do najvišeg reda. Svaki red osim najnižeg sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula sastoji od dvije plave karte, druga od četiri plave i tri narančaste karte, treća od devet plavih i šest narančastih karata. Kad bismo na isti način nastavili graditi kule, koliko bi se plavih karata nalazilo u dvadesetčetvrtoj kuli?



Rezultat: 444

Rješenje.

Plave karte nalaze se u prvom (donjem), trećem, petom,… i svim ostalim neparnim recima. Na vrhu (u gornjem redu) druge, četvrte, šeste,… i dvadesetčetvrte kule su tri narančaste karte.

Odredimo broj plavih karata u kulama na parnim mjestima u nizu:

broj kule u nizu	broj plavih karata
2	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 3$
4	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3$
6	$6 \cdot 2 + (4 + 2) \cdot 3$
8	$8 \cdot 2 + (6 + 4 + 2) \cdot 3$
10	$10 \cdot 2 + (8 + 6 + 4 + 2) \cdot 3$
…	…
bilo koji paran n	$n \cdot 2 + ((n-2) + (n-4) + \cdots + 4 + 2) \cdot 3$

U dvadesetčetvrtoj kuli, za $n = 24$, nalazile bi se

$$24 \cdot 2 + (22 + 20 + \cdots + 2) \cdot 3 = 24 \cdot 2 + 132 \cdot 3 = 444$$

plave karte.

2. Ušteđevina

Mirna i Luka marljivo štede još od prvog razreda. Danas su prebrojali svoje ušteđevine i Mirna je rekla Luki: „Da sam uštedjela 20 % više nego što jesam, ti bi imao točno dva puta više eura od mene.“ Na to je Luka odgovorio: „A da sam ja uštedio 27 € više nego što jesam, imao bih točno tri puta više eura od tebe.“ Koliko su ukupno uštedjeli Mirna i Luka?

Rezultat: 153

Prvo rješenje.

Neka su m i l iznosi koje su uštedjeli Mirna i Luka.

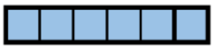
Mirna je rekla da je $2 \cdot (m + 20\% \cdot m) = l$, tj. $l = \frac{12}{5}m$. Luka je rekao da je $l + 27 = 3 \cdot m$.

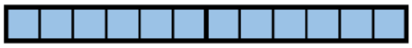
Tada je $\frac{12}{5}m + 27 = 3m$ pa je $m = 45$ i $l = 108$. Mirna i Luka su zajedno uštedjeli $45 + 108 = 153$ eura.

Drugo rješenje.

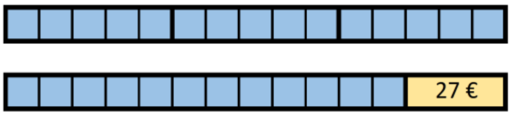
Označimo s  20 % Mirnine ušteđevine.

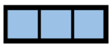
Mirna je uštedjela 

a da je uštedjela 20 % više, imala bi 

Prema Mirninoj izjavi, Luka ima dvostruko više od toga, tj. .

Prema Lukinoj izjavi, trostruka Mirnina ušteđevina jednaka je iznosu njegove ušteđevine uvećane za 27 €.



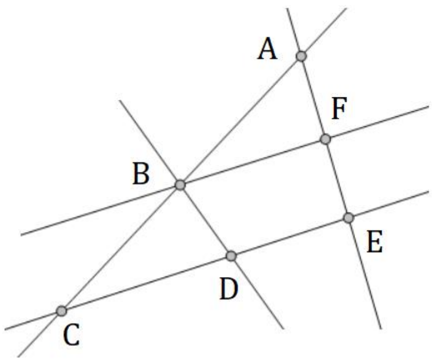
Sada vidimo da je  jednako 

, pa je  = 9 €.

Mirnina ušteđevina iznosi 45 €, a Lukina 108 €. Zajedno su uštedjeli 153 €.

3. Broj u točki *B*

Svakoj od točaka na slici pridružen je po jedan broj. Ti su brojevi međusobno različiti uzastopni višekratnici broja 17, počevši od najmanjeg troznamenkastog višekratnika tog broja. Brojevi pridruženi točkama koje pripadaju istom pravcu su zbrojeni.
Zbroj svih pet tako dobivenih zbrojeva iznosi 1870. Koji je broj pridružen točki *B* ?



Rezultat: 136

Prvo rješenje.

Najmanji troznamenkasti višekratnik broja 17 je broj $17 \cdot 6 = 102$, a sljedećih pet višekratnika su 119, 136, 153, 170 i 187. Ti su brojevi (nepoznatim redom) pridruženi točkama A, B, C, D, E i F.

Neka su a, b, c, d, e i f redom brojevi pridruženi točkama A, B, C, D, E i F.

Promotrimo zbrojeve brojeva pridruženih točkama na istom pravcu:

$$a+b+c, \quad a+f+e, \quad b+d, \quad b+f, \quad c+d+e.$$

Njihov je zbroj 1870, tj.

$$(a+b+c)+(a+f+e)+(b+d)+(b+f)+(c+d+e)=1870$$

$$2\cdot(a+b+c+d+e+f)+b=1870$$

Brojevi a, b, c, d, e i f su upravo brojevi 102, 119, 136, 153, 170 i 187 (nepoznatim redoslijedom) pa je

$$a+b+c+d+e+f=102+119+136+153+170+187$$

$$a+b+c+d+e+f=17\cdot(6+7+8+9+10+11)=17\cdot 51=867$$

Sada iz gornje jednadžbe dobivamo

$$2\cdot 867+b=1870$$

$$b=1870-2\cdot 867=1870-1734$$

$$b=136$$

Drugo rješenje.

Točkama A, B, C, D, E i F pridruženi su, ne nužno tim redoslijedom, brojevi 102, 119, 136, 153, 170, 187. Svaka od točaka, osim točke B, pripada dvama pravcima. Točka B pripada trima pravcima.

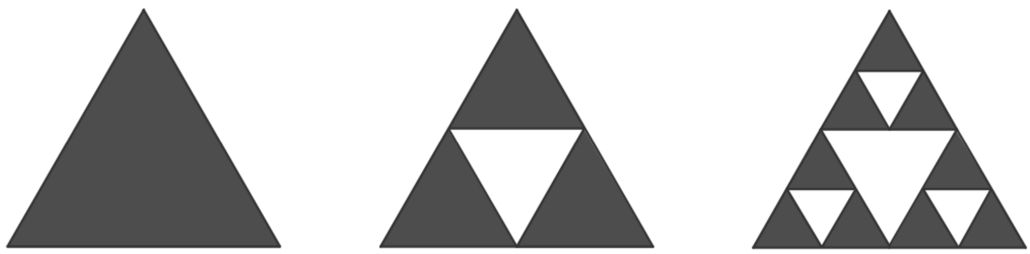
Zato je ukupan zbroj, 1870, jednak dvostrukom zbroju svih brojeva i broja pridruženog točki B. Dakle, broj koji pridružen točki B je

$$1870-2\cdot(102+119+136+153+170+187)=1870-2\cdot 867=136.$$

Točki B pridružen je broj 136.

4. Crno-bijeli trokut

Jednakostraničan je trokut obojen crnom bojom. Ana je označila polovišta njegovih stranica i spojila ih dužinama te tako podijelila polazni trokut na četiri sukladna jednakostranična trokuta. Trokut čiji su vrhovi označena polovišta obojila je bijelom bojom. U svakom sljedećem koraku Ana je ponovila isti postupak na svim preostalim crnim trokutima. Na slici je prikazan trokut na početku te nakon prva dva koraka.



polazni trokut | nakon prvog koraka | nakon dugog koraka

Odredi koliki je dio polaznog trokuta obojan crnom bojom nakon petog koraka i zapiši ga u obliku do kraja skraćenog razlomka $\frac{a}{b}$. Kolika je razlika $b-a$?

Rezultat: 781

Rješenje.

Nakon prvog koraka crno su obojane $\frac{3}{4}$ trokuta. Nakon drugog koraka crno je obojano $\frac{9}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ trokuta.

Zaključujemo da je nakon petog koraka crnom bojom obojano $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$ trokuta.

Razlomak $\frac{243}{1024}$ je do kraja skraćen pa je tražena razlika $1024 - 243 = 781$.

5. Potpuni kvadrat

Odredi najmanji prirodan broj x za koji je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rezultat: 798

Rješenje.

Kvadrat prirodnog broja a je broj $a^2 = a \cdot a$. U rastavu umnoška $a \cdot a$ na proste faktore, svi prosti faktori broja a pojavit će se paran broj puta.

Kako bismo odredili najmanji prirodan broj x takav da je umnožak $3192 \cdot x$ kvadrat prirodnog broja, rastavit ćemo broj 3192 na proste faktore: $3192 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$.

Uočimo da se faktor 2 pojavljuje triput, a svaki od preostalih prostih faktora jedanput.

Kako bi umnožak $3192 \cdot x$ bio kvadrat prirodnog broja, u rastavu broja x na proste faktore trebaju se nalaziti (po jednom) faktori 2, 3, 7 i 19.

Prema tome, najmanji prirodan broj x s traženim svojstvom je $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 798$.

6. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 2.5 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 8 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 10 sati. Da bi napunio prazni bazen, Ivan je otvorio sve tri cijevi. Kad se napunila četvrtina bazena, prva se cijev začepila i njome se bazen više nije punio. U nekom trenutku se začepila i druga cijev, te je nakon toga samo treća cijev punila bazen još 1 sat i 30 minuta, sve dok bazen nije bio pun. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

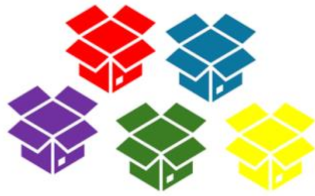
Rezultat: 274

Rješenje.

Prva cijev za jedan sat napuni $\frac{1}{2.5} = \frac{2}{5}$ bazena, druga $\frac{1}{8}$ bazena, a treća $\frac{1}{10}$ bazena.
Zajedno u jednom satu, tj. za 60 minuta, napune $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$ bazena.
U 12 minuta napune $\frac{1}{8}$ bazena, a u 24 minute napune $\frac{2}{8}$, tj. $\frac{1}{4}$ bazena.
Na kraju će samo treća cijev puniti bazen 1.5 sati. Za to vrijeme će napuniti $1.5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$ bazena.
To znači da su druga i treća cijev punile zajedno $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ bazena.
Druga i treća cijev zajedno u jednom satu, tj. za 60 minuta, napune $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{9}{40}$ bazena.
Da bi zajedno napunile $\frac{3}{5}$ bazena, potrebno im je $\frac{3}{5} : \frac{9}{40} = \frac{8}{3}$ sata, tj. 160 minuta.

Sveukupno, punjenje je trajalo 24 + 160 + 90 = 274 minute.

7. Kuglice u kutijama



Fran sprema svojih 40 potpuno jednakih kuglica u 5 kutija različitih boja. Na koliko ih načina može rasporediti u kutije ako u jednu kutiju stane najviše 9 kuglica, a svaka kuglica mora biti spremljena u neku od kutija?

Rezultat: 126

Rješenje.
Fran ima 40 kuglica pa ne može u svaku od pet kutija spremiti po 9 kuglica.

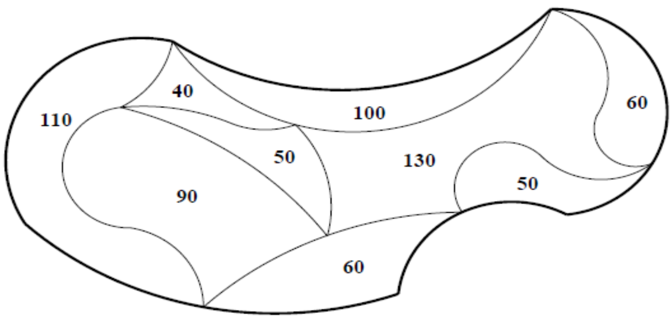
- Ako u četiri kutije spremi po 9 kuglica, u jednu kutiju mora spremiti još 4 kuglice. Označimo takvu vrstu rasporeda sa **[9-9-9-9-4]**. Kutiju u koju mora spremiti 4 kuglice može odabrati na 5 načina.
- Ako u tri kutije spremi po 9 kuglica, u dvije kutije mora spremiti još 13 kuglica.
    - **[9-9-9-8-5]** Kutiju s 8 kuglica može odabrati na 5 načina, a za svaki takav izbor, kutiju s 5 kuglica može odabrati na 4 načina, dok u preostale tri kutije sprema po 9 kuglica. To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ načina.
    - **[9-9-9-7-6]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako u dvije kutije spremi po 9 kuglica, u tri kutije mora spremiti još 22 kuglice. To ne može učiniti tako da u svakoj od te tri kutije spremi najviše 7 kuglica pa barem u jednu od te tri kutije mora spremiti 8 kuglica. U preostale dvije kutije mora spremiti još 14 kuglica.
    - **[9-9-8-8-6]** Kutiju sa 6 kuglica može odabrati na 5 načina. Za svaki takav odabir postoji 6 rasporeda preostalih kuglica u četiri kutije: (9,9,8,8), (9,8,9,8), (9,8,8,9), (8,9,9,8), (8,9,8,9), (8,8,9,9). To je ukupno $5 \cdot 6 = 30$ načina.
    - **[9-9-8-7-7]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 6 = 30$ načina.
- Ako u jednu kutiju spremi 9 kuglica, u četiri kutije mora spremiti još 31 kuglicu. To mora učiniti tako da u jednu od te četiri kutije spremi 7 kuglica, a u preostale po 8 kuglica **[9-8-8-8-7]**. To može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako niti u jednu od kutija ne spremi 9 kuglica, onda u svakoj od pet kutija mora biti točno 8 kuglica **[8-8-8-8-8]**. To je još 1 mogući raspored.

Kuglice se u kutije, prema uvjetima zadatka, mogu spremiti na $5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$ načina.

Napomena. U svaku od pet kutija stane najviše 9 kuglica, ukupno 45 kuglica. Fran ima 40 kuglica pa umjesto broja kuglica u kutijama možemo promatrati broj slobodnih mjesta u svakoj od pet kutija. Slobodnih je mjesta ukupno 5, te možemo promatrati slučajeve kao u gornjem rješenju samo što u zapisu pišemo broj slobodnih mjesta umjesto broja kuglica u pojedinoj kutiji. Na primjer, umjesto [9-9-9-8-5] pišemo [0-0-0-1-4] itd.

8. Opseg

Koliki je opseg lika na slici ako su brojevi na slici opsezi odgovarajućih dijelova lika?

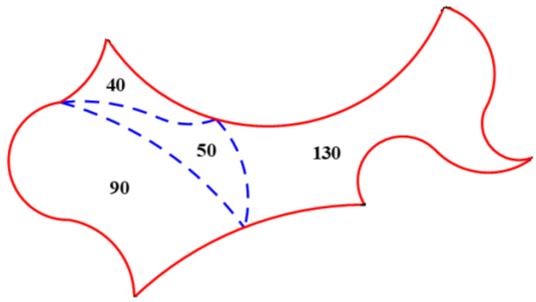


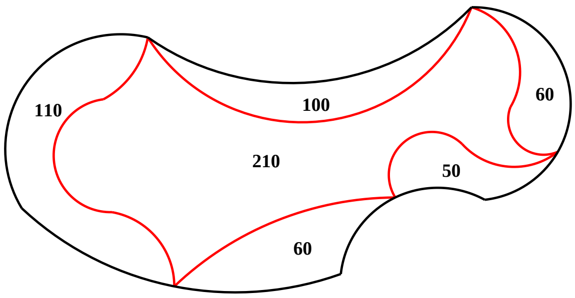
Rezultat: 170

Rješenje.

Uočimo dio početnog lika istaknut crvenim rubom. Njegov je opseg jednak zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (likovi opsega 90, 40 i 130) umanjenom za dijelove koji nisu na njegovom rubu. Dakle opseg lika s plavim rubom iznosi

$$90 + 40 + 130 - 50 = 210.$$





Analogno, opseg zadanog lika jednak je zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (to su likovi opsega 110, 100, 60, 50 i 60) umanjenom za duljinu dijelova tih likova koji ne pripadaju rubu zadanog lika. Drugim riječima, zbroj opsega spomenutih dijelova treba umanjiti za opseg lika s crvenim rubom. Zato je opseg zadanog lika jednak:

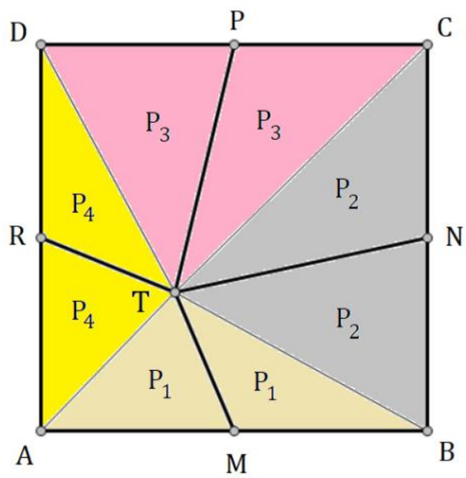
$$110 + 100 + 60 + 50 + 60 - 210 = 170.$$

9. Površina četverokuta

Točke M, N, P i R su, redom, polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Unutar kvadrata $ABCD$ odabrana je točka T tako da su površine četverokuta $P(AMTR) = 180$, $P(CPTN) = 340$ i $P(DRTP) = 273$. Kolika je površina četverokuta $BNTM$?

Rezultat: 247

Prvo rješenje.



Točkom M stranica $\overline{AB}$ kvadrata podijeljena je na dva sukladna dijela pa trokut AMT i trokut MBT imaju sukladne osnovice $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ te zajedničku visinu iz vrha T. Stoga su im i površine jednake,

$$P(AMT) = P(MBT) = P_1.$$

Analogno je i $P(BNT) = P(NCT) = P_2$, $P(CPT) = P(PDT) = P_3$,. $P(DRT) = P(RAT) = P_4$.

Uočimo da je

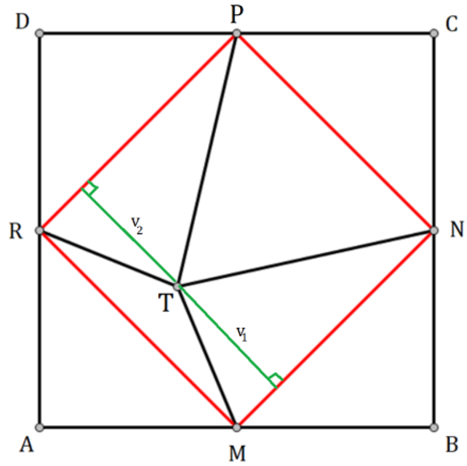
$$P_1 + P_4 + P_2 + P_3 = P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = 520.$$

Zato površina četverokuta $BNTM$ iznosi

$$P(BNTM) = P_1 + P_2 = 520 - (P_3 + P_4) = 520 - P(DRTP)$$
$$= 520 - 273 = 247.$$

Drugo rješenje.

Nacrtajmo četverokut $MNPR$. Trokuti RAM, MBN, NCP i PDR su međusobno sukladni jednakokračni pravokutni trokuti, a zbroj njihovih površina jednak je polovini površine kvadrata $ABCD$. Četverokut $MNPR$ je kvadrat jer su mu stranice sukladne, a kutovi pravi. Njegova je površina jednaka polovini površine kvadrata $ABCD$. Označimo s a duljinu stranice kvadrata $MNPR$.



Prema oznakama na slici vrijedi:

$$P_{\Delta MNT} + P_{\Delta PRT} = \frac{|MN| \cdot v_1}{2} + \frac{|PR| \cdot v_2}{2}$$

a kako je $|MN| = |PR| = a$,

$$P(MNT) + P(PRT) = \frac{a \cdot v_1}{2} + \frac{a \cdot v_2}{2} = \frac{a \cdot (v_1 + v_2)}{2}$$

Primijetimo da je $v_1 + v_2 = a$ (označene visine u trokutima TMN i TPR dijele kvadrat $MNPR$ na dva pravokutnika) pa je

$$P(MNT) + P(PRT) = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}P(MNPR) = \frac{1}{4}P(ABCD).$$

Analogno, $P(RMT) + P(NPT) = \frac{1}{2}P(MNPR) = \frac{1}{4}P(ABCD)$.

Dakle,

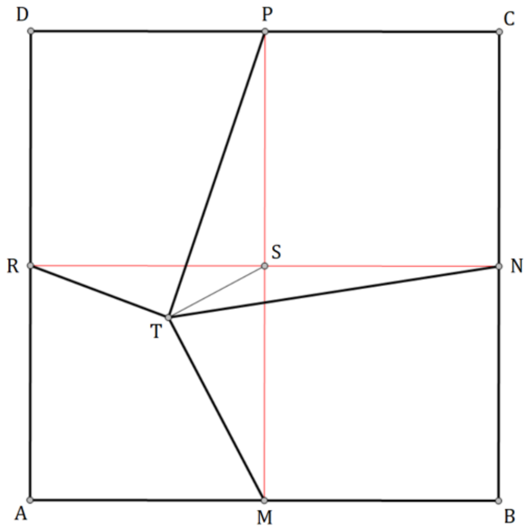
$$\begin{aligned} P(AMTR) + P(CPTN) &= P(AMR) + P(RMT) + P(CPN) + P(NPT) \\ &= \big(P(AMR) + P(CPN)\big) + \big(P(RMT) + P(NPT)\big) = \frac{1}{4}P(ABCD) + \frac{1}{4}P(ABCD) = \frac{1}{2}P(ABCD). \end{aligned}$$

Kako je $P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = \frac{1}{2}P(ABCD)$, znači da je $P(BNTM) + P(DRTP) = \frac{1}{2}P(ABCD)$. Slijedi da je $P(BNTM) + 273 = 180 + 340$, pa je $P(BNTM) = 247$.

Treće rješenje.

Označimo sa S središte kvadrata $ABCD$.

Dužine $\overline{RN}$ i $\overline{PM}$ dijele kvadrat na četiri sukladna kvadrata. Točka T nalazi se u jednom od tih kvadrata. Pretpostavimo da se točka T nalazi unutar kvadrata $AMSR$. Zbroj površina kvadrata $AMSR$ i $SNCP$ čini polovinu površine kvadrata $ABCD$.



$P(CPTN) = P(SNCP) + P(SPT) + P(NST)$

$P(AMTR) = P(AMSR) - P(MST) - P(SRT)$

Uočimo da trokuti SPT i MST imaju jednake površine (sukladne su im osnovice $\overline{SP}$ i $\overline{MS}$ i zajednička visina). Također, trokuti NST i SRT imaju jednake površine.

Prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(AMTR) + P(CPTN) &= P(AMSR) - P(MST) - P(SRT) + P(SNCP) + P(SPT) - P(NST) \\ &= P(AMSR) - P(MST) - P(SRT) + P(SNCP) + P(MST) + P(SRT) = P(AMSR) + P(SNCP) \\ &= \frac{1}{2}P(ABCD). \end{aligned}$$

Kako je $P(AMTR) + P(CPTN) = 180 + 340 = \frac{1}{2}P(ABCD)$, znači da je $P(BNTM) + P(DRTP) = \frac{1}{2}P(ABCD)$, pa je $P(BNTM) + 273 = 180 + 340$, te slijedi $P(BNTM) = 247$.

10. Djeljivi i nedjeljivi

Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 200 000 koji su djeljivi s 12 i 35, a nisu djeljivi ni s 24 ni s 25?

Rezultat: 190

Prvo rješenje.

Neka je a prirodan broj, $a < 200\ 000$ (tj. $a \leq 199999$) koji zadovoljava navedene uvjete:

(a) $12 \mid a$ (čitamo: „12 dijeli broj a" ili „12 je djelitelj broja a")
(b) $35 \mid a$
(c) $24 \nmid a$
(d) $25 \nmid a$

Kako $12 \mid a$ i $35 \mid a$, a brojevi 12 i 35 su relativno prosti, i broj $12 \cdot 35 = 420$ dijeli broj a, tj. $420 \mid a$.

Uvjete (a) i (b) zadovoljavaju višekratnici broja 420. Takvih brojeva manjih od 200 000 ima onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 420, dakle 476.

Zbog uvjeta (c), od tih 476 brojeva treba ukloniti brojeve koji su djeljivi s 24. Kako je $V(420,24) = 840$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 840, dakle 238.

Zbog uvjeta (d), od onih 476 brojeva treba ukloniti brojeve koji su djeljivi s 25. Kako je $V(420,25) = 2100$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 2100, dakle 95.

Tako bismo dobili $476 - 238 - 95 = 143$.

Međutim, na ovaj način smo brojeve koji su djeljivi i s 24 i s 25 uklonili dvaput. Zato treba dodati njihov broj.

Radi se o višekratnicima broja $V(24,25) = 24 \cdot 25 = 600$ koji su ujedno višekratnici broja 420. Kako je $V(600, 420) = 4200$, takvih je brojeva onoliko koliki je nepotpuni količnik brojeva 199 999 i 4200, dakle 47.

Konačno, brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka je $476 - 238 - 95 + 47 = 143 + 47 = 190$.

Drugo rješenje.

Brojevi koji su djeljivi s 12 i 35 su višekratnici broja 420, tj. brojevi oblika $420 \cdot k$.

Da bi $420 \cdot k$ bilo manje od 200 000, mora biti $k \leq 476$. Neka je $S = \{1,2,3, \ldots ,476\}$.

Promotrimo sada uvjet $24 \nmid a$.
Broj $420 \cdot k$ je uvijek djeljiv s 12 jer $12 \mid 420$. Broj $420 \cdot k$ je djeljiv s $24 = 2 \cdot 12$ ako i samo ako je k paran.

Promotrimo i uvjet $25 \nmid a$.
Broj $420 \cdot k$ je uvijek djeljiv s 5 jer $5 \mid 420$. Broj $420 \cdot k$ je djeljiv s $25 = 5^2$ ako i samo ako je broj k djeljiv s 5.

Dakle, treba odrediti koliko je brojeva u skupu S koji nisu parni i nisu djeljivi s 5. I parnih i neparnih brojeva u tom je skupu $476 : 2 = 238$.

Broj brojeva tog skupa S koji su djeljivi s 5 dobit ćemo kao rezultat dijeljenja 476 s 5 – takvih je brojeva 95. Brojeva koji nisu djeljivi s 5 u skupu S je $476 - 95 = 381$.

Brojevi koji su parni i djeljivi s 5 višekratnici su broja 10, a takvih u skupu S ima 47. Zato neparnih višekratnika broja 5 ima $95 - 47 = 48$.

Oduzmimo li od broja neparnih elemenata skupa S broj neparnih višekratnika broja 5, dobit ćemo broj brojeva k iz skupa S koji nisu parni i nisu djeljivi s 5, a to je broj koji trebamo: $238 - 48 = 190$.

Brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka ima 190.