Hrvatsko matematičko društvo

Hrvatska matematička olimpijada za kadete

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

Rješenja zadataka za grupu B (5./6. razred)

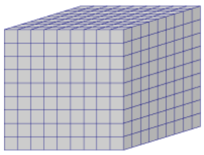
1. Rezanje kocke

Duljina brida kocke je 9 cm. Kocku režemo tako da svakim rezom jedan dio dijelimo na dva dijela. Koliko je rezova potrebno da bi svi nastali dijelovi bili kocke duljine brida 1 cm?

Rezultat: 728

Rješenje.

Svakim se rezanjem broj dijelova povećava za 1. Nakon prvog rezanja kocka će biti razrezana na dva dijela, nakon dva rezanja na tri dijela i tako dalje. Trebamo na kraju dobiti $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ malih kocki, a za to nam je potrebno 728 rezanja.



2. Džeparac

Karla, Lara, Maja i Nina su najbolje prijateljice. Nina je na ljetovanje zaboravila ponijeti džeparac pa su joj prijateljice posudile jednake iznose; Karla joj je posudila petinu, Lara četvrtinu, a Maja šestinu svog džeparca. Po povratku kući, Karla, Lara i Maja odlučile su desetinu ukupnog iznosa koji su ponijele na ljetovanje darovati u dobrotvorne svrhe. Ako su darovale ukupno 78 €, koliki je džeparac na ljetovanju imala Nina?

Rezultat: 156

Rješenje.

Neka je x iznos koji je svaka od tri prijateljice posudila Nini.

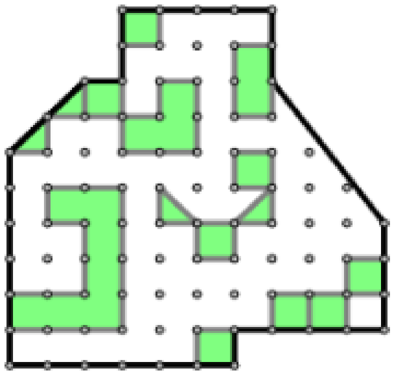
Tada je Karlin džeparac $5x$, Larin $4x$, a Majin $6x$. Ukupan iznos koji su ponijele na ljetovanje iznosi $5x + 4x + 6x = 15x$. Desetina tog iznosa je 78 €, pa vrijedi $15x = 780$.

Slijedi da je $x = 780 : 15 = 52$.

Ninin džeparac na ljetovanju iznosi $3x$, tj. $3 \cdot 52 = 156$ €.

3. Površina

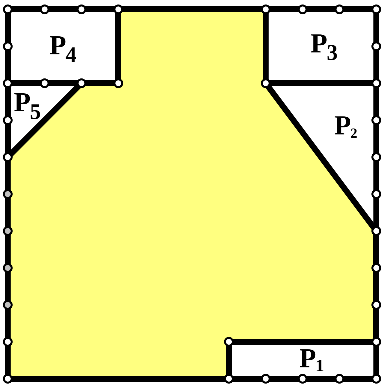
Lik na slici smješten je u kvadratnu mrežu. Površina obojenog dijela tog lika iznosi 198 cm². Koliko kvadratnih centimetara iznosi površina cijelog lika?



Rezultat: 684

Rješenje.

Obojeni dio lika se sastoji od 20 malih kvadrata i 4 pravokutna trokuta, što ukupno čini površinu kao 22 mala kvadrata.



Podijelimo li 198 : 22 = 9, dobivamo da je površina svakog malog kvadrata 9 cm², te slijedi da je duljina stranice malog kvadrata 3 cm. Kvadratna mreža se sastoji od 100 malih kvadrata tj. mreža je kvadrat površine 900 cm².

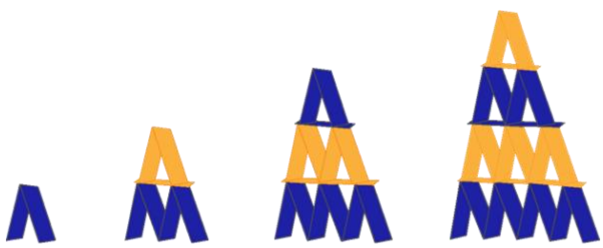
Od te površine trebamo oduzeti površine pet likova.
Lik 1 je pravokutnik sa stranicama duljina 4 · 3 = 12 cm i 3 cm.
Lik 2 je pravokutni trokut s katetama (ili polovina pravokutnika sa stranicama) duljina 4 · 3 = 12 cm i 3 · 3 = 9 cm. Lik 3 i Lik 4 su pravokutnici sa stranicama duljina 2 · 3 = 6 cm i 3 · 3 = 9 cm.
Lik 5 je pravokutni trokut s katetama (ili polovina kvadrata sa stranicama) duljina 2 · 3 = 6 cm.

Slijedi da je tražena površina

$$P = 900 - (12 \cdot 3 + 12 \cdot 9 : 2 + 2 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 6 : 2)$$
$$P = 900 - (36 + 54 + 108 + 18)$$
$$P = 900 - 216$$
$$P = 684 \text{ cm}^2$$

4. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjence do najvišeg reda. Svaki red, osim najnižeg, sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula sastoji od dvije plave karte, druga od četiri plave i tri narančaste karte, treća od devet plavih i šest narančastih karata.
Kad bismo na isti način nastavili graditi kule, koliko bi se plavih karata nalazilo u dvadesetčetvrtoj kuli?



Rezultat: 444

Rješenje.

Plave karte nalaze se u prvom (donjem), trećem, petom,... i svim ostalim neparnim recima. Na vrhu (u gornjem redu) druge, četvrte, šeste,... i dvadesetčetvrte kule su tri narančaste karte.

Odredimo broj plavih karata u kulama na parnim mjestima u nizu:

broj kule u nizu	broj plavih karata
2	$2 \cdot 2 + 0 \cdot 3$
4	$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3$
6	$6 \cdot 2 + (4 + 2) \cdot 3$
8	$8 \cdot 2 + (6 + 4 + 2) \cdot 3$
10	$10 \cdot 2 + (8 + 6 + 4 + 2) \cdot 3$
...	...
bilo koji paran n	$n \cdot 2 + ((n - 2) + (n - 4) + \cdots + 4 + 2) \cdot 3$

U dvadesetčetvrtoj kuli, za $n = 24$, nalazile bi se

$$24 \cdot 2 + (22 + 20 + \cdots + 2) \cdot 3 = 24 \cdot 2 + 132 \cdot 3 = 444$$

plave karte.

5. Jedanaesterostruko

Koji je broj 11 puta veći od broja troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju barem dvije jednake znamenke?

Rezultat: 385

Prvo rješenje.

Prebrojimo koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju sve tri znamenke jednake. Čim troznamenkasti broj ima jednake znamenke, djeljiv je brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3. Zadnja znamenka mora biti parna i različita od 0, pa imamo 4 mogućnosti: 222, 444, 666, 888.

Prebrojimo koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih brojem 6 koji imaju točno dvije znamenke jednake. Imamo tri mogućnosti koje dvije znamenke će biti jednake, te ćemo promotriti tri slučaja.

Ako su jednake znamenke desetica i jedinica, traženi brojevi su: 300, 600, 900, 522, 822, 144, 744, 366, 966, 288, 588. Ima ih ukupno 11.

Ako su jednake znamenke stotica i jedinica, traženi brojevi su 252, 282, 414, 474, 606, 636, 696, 828, 858. Takvih brojeva ima 89

Ako su jednake znamenke stotica i desetica, traženi brojevi su 330, 660, 990, 552, 882, 114, 774, 336, 966, 288, 588. Takvih brojeva ima također 11.

Ukupno ima 4 + 11 + 9 + 11 = 35 takvih troznamenkastih brojeva. Traženi rezultat je 35 · 11 = 385.

Drugo rješenje.

Prirodni broj je djeljiv brojem 6 ako je djeljiv brojevima 2 i 3. Zadnja znamenka (tj. znamenka jedinica) mora biti parna. Ako su barem dvije znamenke jednake, onda da bi broj bio djeljiv brojem 3 sve tri znamenke moraju davati isti ostatak pri dijeljenju brojem 3.

Ako je znamenka jedinica 0, jedine mogućnosti su 300, 600, 900, 330, 660, 990, te ih ima 6.

Ako je znamenka jedinica 2, jedine mogućnosti su 222, 252, 522, 552, 282, 822, 882 te ih ima 7.

Slično je u slučajevima kad je znamenka jedinica 4 (114, 144, 414, 444, 474, 744, 774) ili 8 (228, 288, 828, 888, 558, 588, 858), te u tim slučajevima ima također po 7 brojeva. Imamo i slučaj kad je znamenka jedinica 6 (336, 366, 606, 636, 666, 696, 966, 996), u kojem imamo 8 brojeva.

Ukupno ima $6 + 3 \cdot 7 + 8 = 35$ takvih troznamenkastih brojeva. Traženi rezultat je $35 \cdot 11 = 385$.

6. Kućni brojevi

Marko, Toma i Zvonimir uspoređuju svoje kućne brojeve. Utvrdili su da za njih vrijedi:

- Sva su tri kućna broja troznamenkasta.
- Različiti kućni brojevi nemaju istih znamenaka.
- Zbroj znamenaka svakog kućnog broja je 10.
- Znamenka jedinica Markovog kućnog broja je 6.
- Zvonimirov kućni broj može se bez ostatka podijeliti s 10.
- Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

Koji je najveći mogući Tomin kućni broj?

Rezultat: 541

Prvo rješenje.

Markov kućni broj ima znamenku jedinica 6.
Zvonimirov kućni broj djeljiv je s 10 bez ostatka, što znači da mu je znamenka jedinica 0.
Markov broj ne može sadržavati znamenku 0, a Zvonimirov broj ne može sadržavati znamenku 6.

Preostale dvije znamenke Markovog kućnog broja zbrojene daju 4, pa to mogu biti 3 i 1 te 2 i 2. Markov je broj jedan od brojeva 316, 226, 136.
Preostale dvije znamenke Zvonimirovog kućnog broja zbrojene daju 10, pa su mogućnosti: 1 i 9, 2 i 8, 3 i 7 te 5 i 5. Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.
Tomin broj ne sadrži znamenke 0 niti 6.

Tomin broj je manji od Zvonimirovog, pa znamenka stotica Tominog broja ne može biti 9.

- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 8, to bi bio broj 811, ali tada Zvonimirov broj ne bi mogao biti 910.
- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 7, to bi bio jedan od brojeva 721 i 712, no ne postoji Markov mogući broj koji ne sadrži ni znamenku 1 ni znamenku 2.
- Tomin broj ne može imati znamenku stotica 6.

Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 5, preostale znamenke bi bile 1 i 4 ili 2 i 3 (nije moguće da budu 0 i 5). Najveći takav broj je 541. Kada bi to bio Tomin broj, Markov broj bi morao biti 226 (jer ne smije sadržavati znamenku 1). U tom bi slučaju Zvonimirov kućni broj imao znamenke 3, 7 i 0. Zvonimirov broj je najveći, a Tomin najmanji, pa mi Zvonimirov broj mogao biti 730. Zaista je moguće da je Tomin broj 541, Zvonimirov broj 730 i Markov broj 226 – u tom su slučaju ispunjeni svi uvjeti.

Dakle, najveći mogući Tomin broj je 541.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da Markov kućni broj može biti 136, 226 ili 316, a Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.

Ispitajmo sve mogućnosti.

	Markov kućni broj	Zvonimirov kućni broj	preostale znamenke	moguće znamenke Tominog kućnog broja
A)	136 ili 316	280 ili 820	4, 5, 7, 9	–
B)	136 ili 316	550	2, 4, 7, 8, 9	2, 4, 4
C)	226	190 ili 910	3, 4, 5, 7, 8	3, 3, 4
D)	226	370 ili 730	1, 4, 5, 8, 9	1, 4, 5 ili 1, 1, 8
E)	226	550	1, 3, 4, 7, 8, 9	3, 3, 4

Od preostalih znamenaka (tj. onih koje se ne pojavljuju ni u Markovom, ni u Zvonimirovom kućnom broju) treba odabrati tri znamenke čiji je zbroj 10. U slučaju A) to nije moguće, a u ostalim slučajevima sve mogućnosti su popisane u posljednjem stupcu gornje tablice.

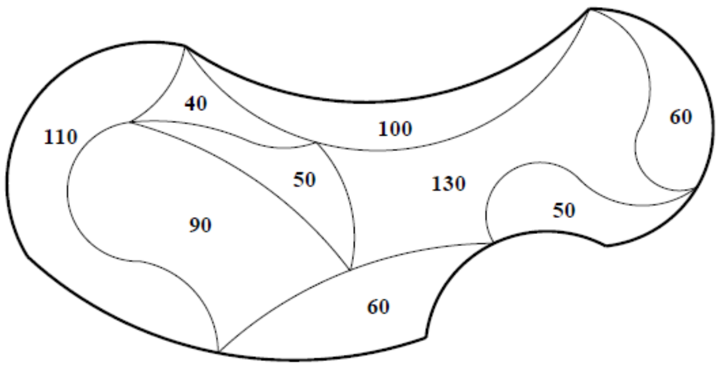
Ispišimo sve mogućnosti za njihove kućne brojeve, uzimajući u obzir i podatak da je Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

MARKO	TOMA	ZVONIMIR
136	244, 424, 442	550
316	424, 442	550
226	334, 343, 433	910
226	–	370
226	415, 451, 514, 541	730
226	334, 343, 433	550

Ovo su sve mogućnosti, pa je najveći mogući Tomin kućni broj 541.

7. Opseg

Koliki je opseg lika na slici ako su upisani brojevi opsezi odgovarajućih dijelova tog lika?

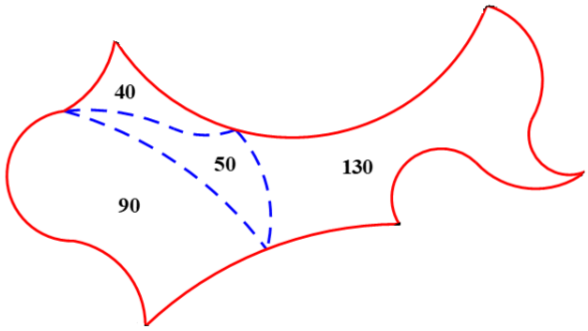


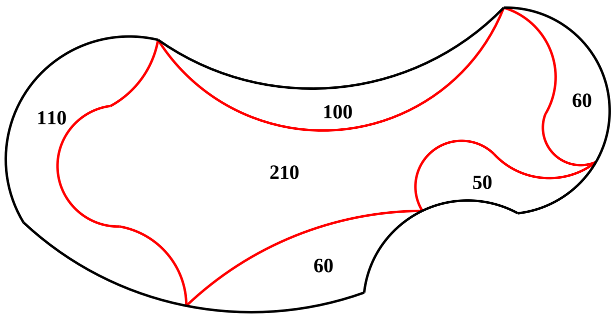
Rezultat: 170

Rješenje.

Uočimo dio početnog lika istaknut crvenim rubom. Njegov je opseg jednak zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (likovi opsega 90, 40 i 130) umanjenom za dijelove koji nisu na njegovom rubu. Dakle opseg lika s plavim rubom iznosi

$$90 + 40 + 130 - 50 = 210.$$





Analogno, opseg zadanog lika jednak je zbroju opsega likova s kojima ima zajednički dio ruba (to su likovi opsega 110, 100, 60, 50 i 60) umanjenom za duljinu dijelova tih likova koji ne pripadaju rubu zadanog lika. Drugim riječima, zbroj opsega spomenutih dijelova treba umanjiti za opseg lika s crvenim rubom. Zato je opseg zadanog lika jednak:

$$110 + 100 + 60 + 50 + 60 - 210 = 170.$$

8. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 15 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 10 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 6 sati.

Da bi napunio prazni bazen, Ivan je najprije otvorio prve dvije cijevi. Kad se napunila trećina bazena, zatvorio je prvu cijev i otvorio treću cijev te 90 minuta punio bazen koristeći drugu i treću cijev. Na kraju je otvorio sve tri cijevi i pričekao dok se bazen nije napunio. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

Rezultat: 258

Prvo rješenje.

Neka je obujam bazena 30 kubičnih jedinica (iako ne znamo koliko je velik bazen obujam dijelimo na 30 jednakih dijelova). Prva cijev u jednom satu napuni 30 : 15 = 2 jedinice, druga cijev u jednom satu napuni 30 : 10 = 3 jedinice, a treća cijev 30 : 6 = 5 jedinica.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno u jednom satu napune 5 jedinica. Trećina bazena je 30 : 3 = 10 jedinica, a to će se napuniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno napune 8 jedinica u sat vremena. U 90 minuta (=1 sat + pola sata) te dvije cijevi napunit će 8 + 4 = 12 jedinica.
- U tom trenutku nedostaje još 30 – (10 + 12) = 8 jedinica da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno napune 10 jedinica za sat vremena, odnosno jednu jedinicu za 6 minuta. Da bi se napunilo 8 jedinica, potrebno je $8 \cdot 6 =$ 48 minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.

Drugo rješenje.

Zamislimo još jednu cijev koja bi bazen napunila za 30 sati. Neka se ta cijev zove pomoćna cijev. Pomoćna cijev puni dvaput sporije od prve cijevi, triput sporije od druge cijevi i 5 puta sporije od treće cijevi.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno su pet puta brže od pomoćne cijevi. Pomoćna cijev bi trećinu bazena napunila za 10 sati, pa će prva i druga cijev zajedno to učiniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno su 8 puta brže od pomoćne cijevi. U 90 minuta one napune koliko pomoćna cijev u 8 · 90 minuta = 720 minuta = 12 sati.
- U tom trenutku, pomoćna cijev bi trebala puniti bazen još 30 – (10 + 12) = 8 sati da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno pune bazen $2 + 3 + 5 = 10$ puta brže od pomoćne cijevi, što znači da će ovaj dio punjenja umjesto 8 sati trajati $(8 \cdot 60 \text{ min}) : 10 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.

9. Potpuni kvadrat

Odredi najmanji prirodan broj x za koji je umnožak 3192 · x kvadrat nekog prirodnog broja.

Rezultat: 798

Rješenje.

Kvadrat prirodnog broja a je broj $a^2 = a \cdot a$. U rastavu umnoška $a \cdot a$ na proste faktore, svi prosti faktori broja a moraju se pojaviti paran broj puta.

Kako bismo odredili najmanji prirodan broj x takav da je umnožak 3192 · x kvadrat prirodnog broja, rastavljamo broj 3192 na proste faktore: 3192 = 2 · 2 · 2 · 3 · 7 · 19.

Uočimo da se faktor 2 pojavljuje tri puta, a svaki od preostalih prostih faktora jednom.

Kako bi umnožak 3192 · x bio kvadrat prirodnog broja, u rastavu broja x na proste faktore trebaju se nalaziti (po jednom) faktori 2, 3, 7 i 19.

Prema tome, najmanji prirodan broj x s traženim svojstvom je 2 · 3 · 7 · 19 = 798.

10. Kuglice u kutijama

Fran sprema svojih 40 potpuno jednakih kuglica u 5 kutija različitih boja. Na koliko ih načina može rasporediti u kutije ako u jednu kutiju stane najviše 9 kuglica, a svaka kuglica mora biti spremljena u neku od kutija?

Rezultat: 126

Rješenje.

Fran ima 40 kuglica pa ne može u svaku od pet kutija spremiti po 9 kuglica.

- Ako u četiri kutije spremi po 9 kuglica, u jednu kutiju mora spremiti još 4 kuglice. Označimo takvu vrstu rasporeda sa **[9-9-9-9-4]**. Kutiju u koju mora spremiti 4 kuglice može odabrati na 5 načina.

- Ako u tri kutije spremi po 9 kuglica, u dvije kutije mora spremiti još 13 kuglica.
    - **[9-9-9-8-5]** Kutiju s 8 kuglica može odabrati na 5 načina, a za svaki takav izbor, kutiju s 5 kuglica može odabrati na 4 načina, dok u preostale tri kutije sprema po 9 kuglica. To je ukupno $5 \cdot 4 = 20$ načina.
    - **[9-9-9-7-6]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako u dvije kutije spremi po 9 kuglica, u tri kutije mora spremiti još 22 kuglice. To ne može učiniti tako da u svakoj od te tri kutije spremi najviše 7 kuglica pa barem u jednu od te tri kutije mora spremiti 8 kuglica. U preostale dvije kutije mora spremiti još 14 kuglica.
    - **[9-9-8-8-6]** Kutiju sa 6 kuglica može odabrati na 5 načina. Za svaki takav odabir postoji 6 rasporeda preostalih kuglica u četiri kutije: (9,9,8,8), (9,8,9,8), (9,8,8,9), (8,9,9,8), (8,9,8,9), (8,8,9,9). To je ukupno $5 \cdot 6 = 30$ načina.
    - **[9-9-8-7-7]** Analogno, to može učiniti na $5 \cdot 6 = 30$ načina.
- Ako u jednu kutiju spremi 9 kuglica, u četiri kutije mora spremiti još 31 kuglicu. To mora učiniti tako da u jednu od te četiri kutije spremi 7 kuglica, a u preostale po 8 kuglica **[9-8-8-8-7]**. To može učiniti na $5 \cdot 4 = 20$ načina.
- Ako niti u jednu od kutija ne spremi 9 kuglica, onda u svakoj od pet kutija mora biti točno 8 kuglica **[8-8-8-8-8]**. To je još 1 mogući raspored.

Kuglice se u kutije, prema uvjetima zadatka, mogu spremiti na $5 + 40 + 60 + 20 + 1 = 126$ načina.

Napomena. U svaku od pet kutija stane najviše 9 kuglica, ukupno 45 kuglica. Fran ima 40 kuglica pa umjesto broja kuglica u kutijama možemo promatrati broj slobodnih mjesta u svakoj od pet kutija. Slobodnih je mjesta ukupno 5, te možemo promatrati slučajeve kao u gornjem rješenju samo što u zapisu pišemo broj slobodnih mjesta umjesto broja kuglica u pojedinoj kutiji. Na primjer, umjesto [9-9-9-8-5] pišemo [0-0-0-1-4] itd.