Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA KADETE

prvo kolo – subota, 28. rujna 2024.

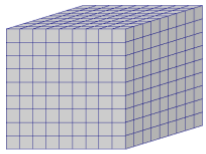
Rješenja zadataka za grupu A (4./5. razred)

1. Rezanje kocke

Duljina brida kocke je 9 cm. Kocku režemo tako da svakim rezom jedan dio dijelimo na dva dijela. Koliko je rezova potrebno da bi svi nastali dijelovi bili kocke duljine brida 1 cm?

Rezultat: 728

Rješenje.



Svakim se rezanjem broj dijelova povećava za 1. Nakon prvog rezanja kocka će biti razrezana na dva dijela, nakon dva rezanja na tri dijela i tako dalje.

Trebamo na kraju dobiti $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ malih kocki, a za to nam je potrebno 728 rezanja.

2. Zamišljeni broj

Tina je zamislila troznamenkasti broj. Odbacivanjem znamenke stotica tog broja dobila je dvoznamenkasti broj. Odbacivanjem znamenke desetica tog dvoznamenkastog broja dobila je jednoznamenkasti broj. Zbrajanjem tih triju brojeva (troznamenkastog, dvoznamenkastog i jednoznamenkastog) dobila je četveroznamenkasti broj čiji zapis završava s 21. Koji je broj zamislila Tina?

Rezultat: 957

Prvo rješenje. Neka je $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojemu je a znamenka stotica, b znamenka desetica i c znamenka jedinica. Odbacivanjem znamenke stotica dobije se dvoznamenkasti broj $\overline{bc}$, a daljnjim odbacivanjem znamenke desetica jednoznamenkasti broj c. Neka je d znamenka tisućica, a e znamenka stotica dobivenog četveroznamenkastog broja.

Znamenka jedinica zbroja (znamenka 1) nastala je zbrajanjem tri znamenke c što je moguće samo za $c = 7$.

$$\begin{array}{rcccc} & & a & b & c \\ & & & b & c \\ + & & & & c \\ \hline & d & e & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & a & b & 7 \\ & & & b & 7 \\ + & & & & 7 \\ \hline & d & e & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & a & 5 & 7 \\ & & & 5 & 7 \\ + & & & & 7 \\ \hline & d & e & 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 9 & 5 & 7 \\ & & & 5 & 7 \\ + & & & & 7 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Budući je $3 \cdot 7 = 21$, a znamenka desetica zbroja je 2, zbrajanjem dvije iste znamenke b treba dobiti 0 pa možemo zaključiti da je $b = 0$ ili $b = 5$. Lako se vidi da ne može biti $b = 0$.

Na kraju lako vidimo da za $a < 9$ zbroj ne bi bio četveroznamenkast, što znači da je $a = 9$, $e = 0$ i $d = 1$.

Tina je zamislila broj 957. Zaista, 957 + 57 + 7 = 1021.

Drugo rješenje.

Najveći mogući broj koji možemo dobiti na opisani način je 999 + 99 + 9 = 1107.

Kako znamo da rezultat mora biti četveroznamenkasti broj, jasno je da će znamenka tisućica biti 1, a zbog uvjeta da završava znamenkama 21, rezultat je broj oblika 1_21. Taj broj mora biti manji od 1107, pa je jedina mogućnost za rezultat 1021.

Kada bi zamišljeni troznamenkasti broj bio manji od 900, najveći mogući rezultat bi bio 899 + 99 + 9 = 1007 što je manje od 1021. Zaključujemo da je znamenka stotica zamišljenog broja 9.

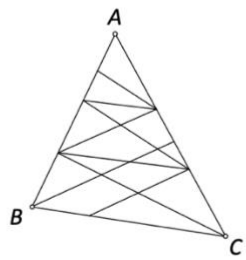
Uočimo da znamenka jedinica dobivenog zbroja ovisi samo o znamenki jedinica zamišljenog broja. Jedini način da znamenka jedinica zbroja bude 1 jest da znamenka jedinica zamišljenog broja bude 7 (7+7+7 = 21).

Sada je dovoljno provjeriti nekoliko slučajeva:

zamišljeni troznamenkasti broj	dvoznamenkasti broj	jednoznamenkasti broj	zbroj
997	97	7	1101
987	87	7	1081
977	77	7	1061
967	67	7	1041
957	57	7	1021
947	47	7	1001
937	37	7	...

Dalje nije potrebno računati jer je jasno da će rezultat biti manji od 1000.

Tina je zamislila broj 957.

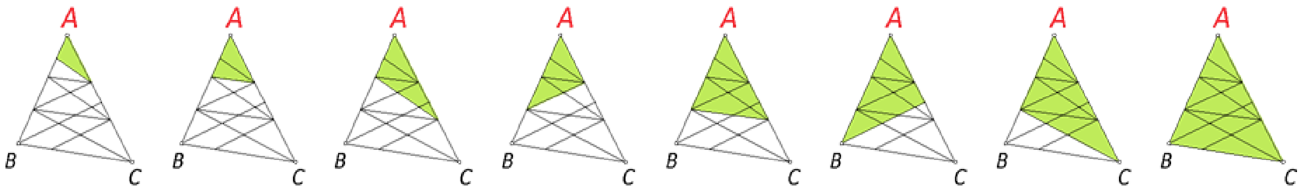


3. Trokuti

Ana je odredila broj trokuta na slici koji sadrže vrh A, Barbara broj trokuta koji sadrže vrh B, a Cvijeta broj trokuta koji sadrže vrh C. Koliko iznosi umnožak brojeva koje su trebale dobiti Ana, Barbara i Cvijeta?

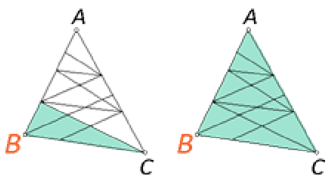
Rezultat: 704

Rješenje.
Svakom trokutu kojemu je jedan vrh točka A, jedna stranica pripada dužini $\overline{AB}$, a jedna dužini $\overline{AC}$.

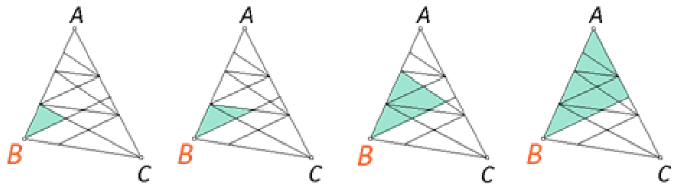


Ukupno ima osam trokuta kojima je jedan vrh točka A.

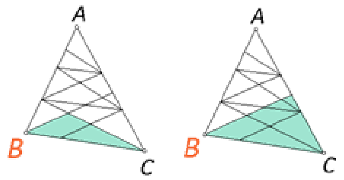
U vrhu B sastaju se tri dužine, pa postoje tri mogućnosti za trokute kojima je jedan vrh točka B:
a) jedna stranica pripada dužini $\overline{BC}$, a druga dužini $\overline{BA}$. Postoje dva takva trokuta.



b) jedna stranica pripada dužini $\overline{BA}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{BC}$. Postoje četiri takva trokuta.



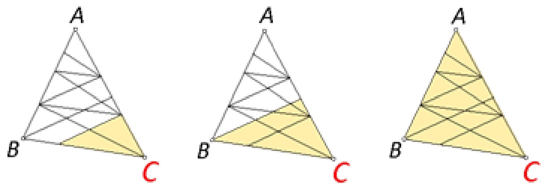
c) jedna stranica pripada dužini $\overline{BC}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{BA}$. Postoje dva takva trokuta.



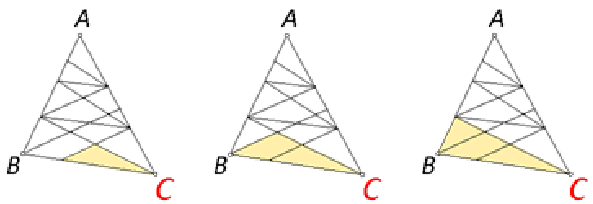
Ukupno ima osam trokuta kojima je jedan vrh točka B.

U vrhu C također se sastaju tri dužine, pa postoje tri mogućnosti za trokute kojima je jedan vrh točka C:

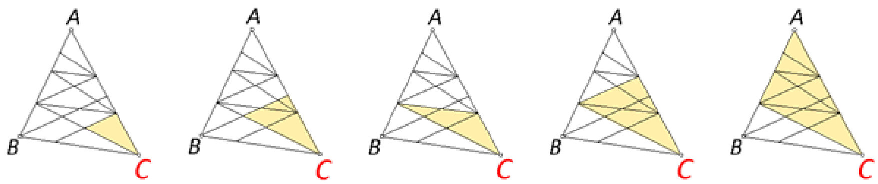
a) jedna stranica pripada dužini $\overline{CB}$, a druga dužini $\overline{CA}$. Postoje tri takva trokuta.



b) jedna stranica pripada dužini $\overline{CB}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{CA}$. Postoje tri takva trokuta.



c) jedna njegova stranica pripada dužini $\overline{CA}$, ali nijedna ne pripada dužini $\overline{CB}$. Postoji pet takvih trokuta.



Ukupno ima jedanaest trokuta kojima je jedan vrh točka C.

Traženi umnožak je $8 \cdot 8 \cdot 11 = 704$.

4. Natjecanje

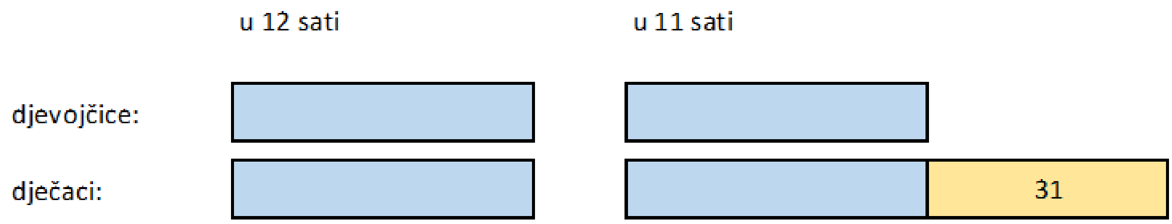
Svi učenici četvrtih razreda OŠ „Matko Hmok“ pristupili su natjecanju iz matematike koje je započelo u 10 sati. Do 11 sati natjecanje je završilo 15 djevojčica i nijedan dječak pa je u 11 sati broj preostalih dječaka bio dvostruko veći od broja preostalih djevojčica. Između 11 i 12 sati natjecanje je završio 31 dječak i nijedna djevojčica tako da je u 12 sati broj preostalih dječaka bio jednak broju preostalih djevojčica. Koliko je ukupno učenika četvrtih razreda u toj školi?

Rezultat: 108

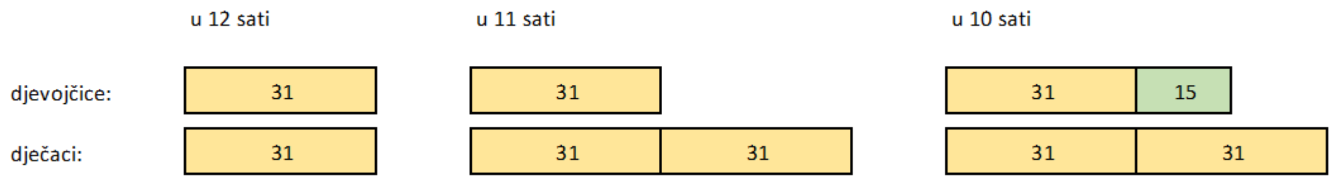
Rješenje.

Nakon 12 sati broj djevojčica i dječaka na natjecanju bio je jednak. Između 11 i 12 sati broj djevojčica na natjecanju nije se promijenio, a broj dječaka smanjio se za 31, to jest u 11 sati na natjecanju je bio 31 dječak više nego u 12 sati.

Grafički to možemo prikazati ovako:



Kako je poznato da je na natjecanju u 11 sati bilo dvostruko više dječaka nego djevojčica, možemo zaključiti da plavi pravokutnik predstavlja 31 dječaka odnosno 31 djevojčicu.



Poslije 12 sati na natjecanju su ostali još 31 dječak i 31 djevojčica, a u 11 sati na natjecanju su bila 62 dječaka i 31 djevojčica. Između 10 i 11 sati broj dječaka se nije mijenjao dok se broj djevojčica smanjio za 15. Na početku natjecanja bilo je 31+15 = 46 djevojčica i 62 dječaka.

U školi je ukupno 62 + 46 = 108 učenika četvrtih razreda.

Napomena. Rješenje možemo skraćeno zapisati koristeći jednadžbe. Neka je x broj dječaka odnosno broj djevojčica na natjecanju nakon 12 sati. Na natjecanju je do 11 sati bilo $x + 31$ dječaka. U 11 sati broj dječaka bio je dvaput veći od broja djevojčica, tj. vrijedi $x + 31 = 2 \cdot x$. Rješenje ove jednadžbe je $x = 31$. U 12 sati dječaka je bilo 31, a isto toliko i djevojčica. U 11 sati na natjecanju je bilo $31 + 31 = 62$ dječaka i 31 djevojčica. U 10 sati na natjecanju je bilo 31 + 15 = 46 djevojčica i 62 dječaka, a ukupno $62 + 46 = 108$ učenika.

5. Pravokutnici

Koliko ima različitih pravokutnika kojima je opseg 2024 cm, a duljine stranica u centimetrima su prirodni brojevi? Smatramo da su dva pravokutnika različita ako im se razlikuju duljine stranica.

Rezultat: 506

Rješenje.

Opseg je jednak zbroju duljina svih stranica pravokutnika. Označimo duljine dviju susjednih stranica pravokutnika a i b te neka je $a \leq b$. Zbroj duljina stranica a i b jednak je polovini opsega, 2024 : 2 = 1012 cm. Za bilo koju duljinu stranice a, duljina stranice b iznosi $1012 - a$. Moguće duljine stranica su:

a (cm)	b (cm)
1	1011
2	1010
3	1009
4	1008
...	...
504	508
505	507
506	506

Ukupno postoji 506 različitih pravokutnika koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

6. Kula od karata

Od plavih i narančastih karata gradi se niz kula. Svaka kula ima određen broj redova. U najnižem redu su plave karte, u sljedećem narančaste i tako naizmjence do najvišeg reda. Svaki red, osim najnižeg, sadrži i horizontalno položene karte. Na slici su prikazane prve četiri kule. Prva se kula sastoji od dvije plave karte; druga od četiri plave i tri narančaste karte; treća od devet plavih i šest narančastih karata. Ako bismo na isti način sagradili kulu koja ima 15 redova, koliko bi se plavih karata nalazilo u njoj?

Rezultat: 177

Rješenje.

Zapišimo pregledno broj plavih i narančastih karata u svakom redu pojedine kule:

	1. kula	2. kula	3. kula	4. kula	5. kula	...	15. kula	...	n-ta kula
1. red	2	4	6	8	10		$2 \cdot 15$		2n
2. red		3	6	9	12		$3 \cdot 14$		$3(n-1)$
3. red			3	6	9		$3 \cdot 13$		$3(n-2)$
4. red				3	6		$3 \cdot 12$		$3(n-3)$
5. red					3		$3 \cdot 11$		$3(n-4)$
...							...		
14. red							$3 \cdot 2$		$3(n-13)$
15. red							$3 \cdot 1$		$3(n-14)$
...									
n-ti red									3

U petnaestoj kuli, plave su karte u prvom, trećem,..., petnaestom redu.

U prvom redu ih ima $2 \cdot 15$, u trećem $3 \cdot 13$, u petom $3 \cdot 11$, ... , a u petnaestom redu su tri plave karte.

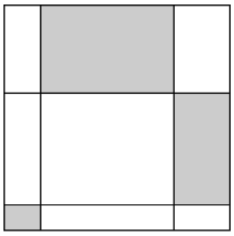
Njihov je ukupan broj

$$2 \cdot 15 + 3 \cdot 13 + 3 \cdot 11 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1$$

$$= 2 \cdot 15 + 3 \cdot (13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1)$$

$$= 2 \cdot 15 + 3 \cdot 49 \ = 30 + 147 = 177$$

7. Kvadrat

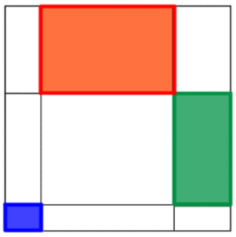


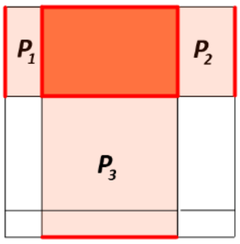
Kvadrat je podijeljen na devet pravokutnika kao što je prikazano na slici. Opsezi osjenčanih pravokutnika su 970 mm, 387 cm i 52 dm. Odredi duljinu stranice kvadrata u centimetrima.

Rezultat: 251

Rješenje.

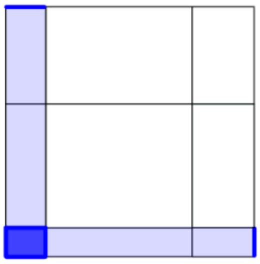
Svakom od istaknutih pravokutnika (na slici crveni, zeleni i plavi) barem jedna stranica pripada rubu zadanog kvadrata, a ostale pripadaju još nekom pravokutniku.

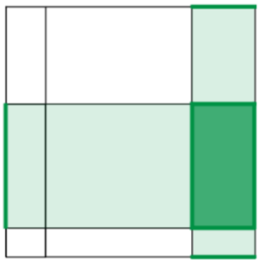


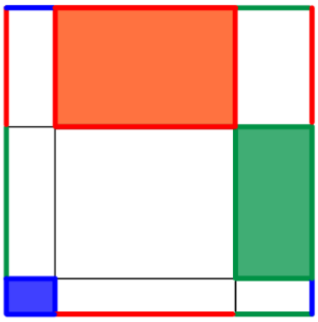


Promotrimo na primjer crveni pravokutnik. Jedna njegova stranica pripada rubu kvadrata, a po jedna pravokutnicima P_1, P_2 i P_3. Nasuprotne stranice pravokutnika jednake su duljine. Zato su stranice crvenog pravokutnika jednake duljine kao označene dužine na rubu kvadrata (po jedna na svakoj stranici kvadrata).

Ponovimo isto za plavi i zeleni pravokutnik.







Vidimo da se opseg kvadrata sastoji upravo od dužina koje su jednake duljine kao stranice istaknutih pravokutnika. Opseg zadanog kvadrata jednak je zbroju opsega triju istaknutih pravokutnika.

Opseg kvadrata stoga iznosi 970 mm + 387 cm + 52 dm = 97 cm + 387 cm + 520 cm = 1004 cm.

Duljina svake stranice kvadrata je 1004 cm : 4 = 251 cm.

8. Kućni brojevi

Marko, Toma i Zvonimir uspoređuju svoje kućne brojeve. Utvrdili su da za njih vrijedi:

- Sva su tri kućna broja troznamenkasta.
- Različiti kućni brojevi nemaju istih znamenaka.
- Zbroj znamenaka svakog kućnog broja je 10.
- Znamenka jedinica Markovog kućnog broja je 6.
- Zvonimirov kućni broj može se bez ostatka podijeliti s 10.
- Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

Koji je najveći mogući Tomin kućni broj?

Rezultat: 541

Prvo rješenje.

Markov kućni broj ima znamenku jedinica 6.

Zvonimirov kućni broj djeljiv je s 10 bez ostatka, što znači da mu je znamenka jedinica 0.

Markov broj ne može sadržavati znamenku 0, a Zvonimirov broj ne može sadržavati znamenku 6.

Preostale dvije znamenke Markovog kućnog broja zbrojene daju 4, pa to mogu biti 3 i 1 te 2 i 2. Markov je broj jedan od brojeva 316, 226, 136.

Preostale dvije znamenke Zvonimirovog kućnog broja zbrojene daju 10, pa su mogućnosti: 1 i 9, 2 i 8, 3 i 7 te 5 i 5. Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190.

Ispitajmo sve mogućnosti.

	Markov kućni broj	Zvonimirov kućni broj	preostale znamenke	moguće znamenke Tominog kućnog broja
A)	136 ili 316	280 ili 820	4, 5, 7, 9	–
B)	136 ili 316	550	2, 4, 7, 8, 9	2, 4, 4
C)	226	190 ili 910	3, 4, 5, 7, 8	3, 3, 4
D)	226	370 ili 730	1, 4, 5, 8, 9	1, 4, 5 ili 1, 1, 8
E)	226	550	1, 3, 4, 7, 8, 9	3, 3, 4

Od preostalih znamenaka (tj. onih koje se ne pojavljuju ni u Markovom, ni u Zvonimirovom kućnom broju) treba odabrati tri znamenke čiji je zbroj 10. U slučaju A) to nije moguće, a u ostalim slučajevima sve mogućnosti su popisane u posljednjem stupcu gornje tablice.

Ispišimo sve mogućnosti za njihove kućne brojeve, uzimajući u obzir i podatak da je Tomin kućni broj manji je od Zvonimirovog, ali veći od Markovog.

MARKO	TOMA	ZVONIMIR
136	244, 424, 442	550
316	424, 442	550
226	334, 343, 433	910
226	–	370
226	415, 451, 514, 541	730
226	334, 343, 433	550

Ovo su sve mogućnosti, pa je najveći mogući Tomin kućni broj 541.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da Markov kućni broj može biti 136, 226 ili 316, a Zvonimirov kućni broj može biti 910, 820, 730, 550, 370, 280 ili 190. Tomin broj ne sadrži znamenke 0 niti 6.

Tomin broj je manji od Zvonimirovog, pa znamenka stotica Tominog broja ne može biti 9.

- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 8, to bi bio broj 811 (jer ne smijemo koristiti znamenku 0), ali tada bi Markov broj trebao biti 226 (jer ne smijemo koristiti znamenku 2), a Zvonimirov broj bi morao biti veći od 811, što nije moguće jer 820 i 910 nisu dopušteni.
- Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 7, to bi bio jedan od brojeva 721 i 712 (opet jer ne smijemo koristiti 0), ali ne postoji Markov mogući broj koji ne sadrži ni znamenku 1 ni znamenku 2.
- Tomin broj ne može imati znamenku stotica 6.

Kada bi Tomin broj imao znamenku stotica 5, preostale znamenke bi bile 1 i 4 ili 2 i 3 (nije moguće da budu 0 i 5). Najveći takav broj je 541. Kada bi to bio Tomin broj, Markov broj bi morao biti 226 (jer ne smije sadržavati znamenku 1). U tom bi slučaju Zvonimirov kućni broj imao znamenke 3, 7 i 0. Zvonimirov broj je najveći, a Tomin najmanji, pa bi Zvonimirov broj mogao biti 730. Zaista je moguće da je Tomin broj 541, Zvonimirov broj 730 i Markov broj 226 – u tom su slučaju ispunjeni svi uvjeti.

Dakle, najveći mogući Tomin broj je 541.

9. Matematika

Koja je najveća moguća vrijednost izraza

$$(M \cdot A + T) \cdot E + M \cdot A + T - I \cdot K : A$$

ako istim slovima odgovaraju iste, a različitim slovima različite znamenke?

Rezultat: 624

Rješenje.

Uočimo da se u danom izrazu $M \cdot A + T$ pojavljuje na dva mjesta, pa primjenom distributivnosti možemo napisati

$$(M \cdot A + T) \cdot E + M \cdot A + T - I \cdot K : A = (M \cdot A + T) \cdot (E + 1) - I \cdot K : A$$

Od umnoška brojeva $(M \cdot A + T)$ i $(E + 1)$ oduzimamo vrijednost izraza $I \cdot K : A$. Da bismo dobili što veću vrijednost, trebamo oduzeti što manji broj. To možemo postići za $I = 0$ ili $K = 0$ (time ne ograničavamo vrijednost spomenutog umnoška jer se slova I i K pojavljuju na ovom mjestu).

Treba još utvrditi koja je najveća moguća vrijednost umnoška $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1)$.

Jasno je da ćemo za znamenke M, A, T i E odabrati četiri najveće moguće vrijednosti, tj. 9, 8, 7 i 6, u nekom poretku. Utvrdimo najprije koja je najveća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ za pojedine vrijednosti broja E.

Izraz $M \cdot A + T$ će imati najveću moguću vrijednost ako za M i A odaberemo što veće brojeve, a za T najmanji od brojeva na raspolaganju. Na primjer, za $E = 8$, biramo $T = 6$, a M i A su 9 i 7, te je $M \cdot A + T = 69$.

Za $E = 9$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 62, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 620$.

Za $E = 8$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 69, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 621$.

Za $E = 7$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 78, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 624$.

Za $E = 6$, najveća moguća vrijednost izraza $M \cdot A + T$ iznosi 79, a u tom je slučaju $(M \cdot A + T) \cdot (E + 1) = 553$.

Najveća moguća vrijednost danog izraza je 624.

10. Bazen

Bazen se može puniti trima različitim cijevima. Kad bi se bazen punio samo prvom cijevi, napunio bi se za 15 sati, kad bi se punio samo drugom cijevi, napunio bi se za 10 sati, a kad bi se punio samo trećom cijevi, napunio bi se za 6 sati. Da bi napunio prazni bazen, Ivan je najprije otvorio prve dvije cijevi. Kad se napunila trećina bazena, zatvorio je prvu cijev i otvorio treću cijev te 90 minuta punio bazen koristeći drugu i treću cijev. Na kraju je otvorio sve tri cijevi i pričekao dok se bazen nije napunio. Koliko je ukupno minuta trajalo punjenje bazena?

Rezultat: 258

Prvo rješenje.

Neka je obujam bazena 30 kubičnih jedinica (iako ne znamo koliko je velik bazen obujam dijelimo na 30 jednakih dijelova). Prva cijev u jednom satu napuni $30 : 15 = 2$ jedinice, druga cijev u jednom satu napuni $30 : 10 = 3$ jedinice, a treća cijev $30 : 6 = 5$ jedinica.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno u jednom satu napune 5 jedinica. Trećina bazena je $30 : 3 = 10$ jedinica, a to će se napuniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno napune 8 jedinica u sat vremena. U 90 minuta (=1 sat + pola sata) te dvije cijevi napunit će $8 + 4 = 12$ jedinica.
- U tom trenutku nedostaje još $30 - (10 + 12) = 8$ jedinica da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno napune 10 jedinica za sat vremena, odnosno jednu jedinicu za 6 minuta. Da bi se napunilo 8 jedinica, potrebno je $8 \cdot 6 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.

Drugo rješenje.

Zamislimo još jednu cijev koja bi bazen napunila za 30 sati. Neka se ta cijev zove pomoćna cijev. Pomoćna cijev puni dvaput sporije od prve cijevi, triput sporije od druge cijevi i 5 puta sporije od treće cijevi.

Opisani postupak punjenja bazena sastoji se od tri dijela.

- Prva i druga cijev zajedno su pet puta brže od pomoćne cijevi. Pomoćna cijev bi trećinu bazena napunila za 10 sati, pa će prva i druga cijev zajedno to učiniti za dva sata.
- Druga i treća cijev zajedno su 8 puta brže od pomoćne cijevi. U 90 minuta one napune koliko pomoćna cijev u $8 \cdot 90$ minuta = 720 minuta = 12 sati.
- U tom trenutku, pomoćna cijev bi trebala puniti bazen još $30 - (10 + 12) = 8$ sati da bi bazen bio pun. Sve tri cijevi zajedno pune bazen $2 + 3 + 5 = 10$ puta brže od pomoćne cijevi, što znači da će ovaj dio punjenja umjesto 8 sati trajati $(8 \cdot 60 \text{ min}) : 10 = 48$ minuta.

Ukupno je punjenje bazena trajalo 2 sata + 90 minuta + 48 minuta = 120 + 90 + 48 = 258 minuta.