Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 7. svibnja 2024.

1. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} xy &= x + y + 4, \\ yz &= y + z + 7, \\ zx &= z + x + 9. \end{aligned}$$

2. Na početku su sva polja ploče dimenzija 101×101 bijele boje. U svakom potezu biramo dio ploče dimenzija 2×2 (četiri polja koja imaju zajednički vrh) i na tom dijelu sva bijela polja pretvorimo u crna, a sva crna polja u bijela. Koliko najmanje bijelih polja može biti na ploči nakon nekog niza takvih poteza?

3. Na krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ jednakokračnog trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dokaži da opisana kružnica trokuta APQ prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC ako i samo ako je $|AP| = |CQ|$.

4. Odredi sve prirodne brojeve n, $n \geqslant 2$, takve da je

$$\frac{3^n + 5^n}{3^{n-2} + 5^{n-2}}$$

prirodni broj.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 8. svibnja 2024.

1. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$(x+y+z)^2 \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{x^2+1}{x} + \frac{y^2+1}{y} + \frac{z^2+1}{z}\right).$$

2. Za prirodan broj n, neka je $z(n)$ broj znamenaka broja n. Za podskup A skupa prirodnih brojeva kažemo da je *zgodan* ako za svaka dva različita elementa a i b skupa A vrijedi

$$z(a+b) + 2 > z(a) + z(b).$$

Dokaži da zgodan skup ne može biti beskonačan i odredi koliko najviše elemenata može imati.

3. Neka je ABC šiljastokutni trokut i neka su D, E i F redom nožišta visina iz vrhova A, B i C. Dokaži da vrijedi $|DE| + |DF| \leqslant |BC|$.

4. Koliko postoji uređenih parova (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$m^2 + 5n^2 = 4mn + 2n + 19999 \ \ ?$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.