

## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 7. svibnja 2024.

1. Odredi sve uređene trojke  $(x, y, z)$  realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$xy = x + y + 4,$$

$$yz = y + z + 7,$$

$$zx = z + x + 9.$$

2. Na početku su sva polja ploče dimenzija  $101 \times 101$  bijele boje. U svakom potezu biramo dio ploče dimenzija  $2 \times 2$  (četiri polja koja imaju zajednički vrh) i na tom dijelu sva bijela polja pretvorimo u crna, a sva crna polja u bijela. Koliko najmanje bijelih polja može biti na ploči nakon nekog niza takvih poteza?

3. Na krakovima  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  jednakokračnog trokuta  $ABC$  dane su redom točke  $P$  i  $Q$ . Dokaži da opisana kružnica trokuta  $APQ$  prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta  $ABC$  ako i samo ako je  $|AP| = |CQ|$ .

4. Odredi sve prirodne brojeve  $n$ ,  $n \geq 2$ , takve da je

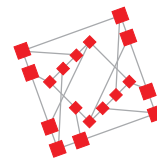
$$\frac{3^n + 5^n}{3^{n-2} + 5^{n-2}}$$

prirodni broj.

**Vrijeme rješavanja: 4 sata**

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.**



## HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 8. svibnja 2024.

1. Neka su  $x, y, z$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $xyz = 1$ . Dokaži da vrijedi

$$(x + y + z)^2 \geq \frac{3}{2} \left( \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{y^2 + 1}{y} + \frac{z^2 + 1}{z} \right).$$

2. Za prirodan broj  $n$ , neka je  $z(n)$  broj znamenaka broja  $n$ . Za podskup  $A$  skupa prirodnih brojeva kažemo da je *zgodan* ako za svaka dva različita elementa  $a$  i  $b$  skupa  $A$  vrijedi

$$z(a + b) + 2 > z(a) + z(b).$$

Dokaži da zgodan skup ne može biti beskonačan i odredi koliko najviše elemenata može imati.

3. Neka je  $ABC$  šiljastokutni trokut i neka su  $D, E$  i  $F$  redom nožišta visina iz vrhova  $A, B$  i  $C$ . Dokaži da vrijedi  $|DE| + |DF| \leq |BC|$ .

4. Koliko postoji uređenih parova  $(m, n)$  cijelih brojeva za koje vrijedi

$$m^2 + 5n^2 = 4mn + 2n + 19999 \quad ?$$

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.