HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – prvi dan

Zagreb, 7. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} xy &= x + y + 4, \\ yz &= y + z + 7, \\ zx &= z + x + 9. \end{aligned}$$

Rješenje.

Dodavanjem $1 - x - y$ s obje strane prve jednadžbe dobivamo

$$5 = xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1).$$

Analogno dobivamo i

$$8 = (y-1)(z-1) \quad \text{i} \quad 10 = (z-1)(x-1).$$

Slijedi

$$(y-1)^2 = \frac{(x-1)(y-1) \cdot (y-1)(z-1)}{(z-1)(x-1)} = \frac{5 \cdot 8}{10} = 4,$$

odnosno $y = 3$ ili $y = -1$.

Uvrstimo li $y = 3$ u prvu jednadžbu dobivamo $x = \frac{7}{2}$, a iz druge jednadžbe dobivamo $z = 5$. Direktnom provjerom vidimo da je zadovoljena i treća jednadžba.

Dakle, $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, 3, 5\right)$ je jedno rješenje.

Za $y = -1$ dobivamo rješenje $(x, y, z) = \left(\frac{-3}{2}, -1, -3\right)$.

Zadatak 2.

Na početku su sva polja ploče dimenzija 101×101 bijele boje. U svakom potezu biramo dio ploče dimenzija 2×2 (četiri polja koja imaju zajednički vrh) i na tom dijelu sva bijela polja pretvorimo u crna, a sva crna polja u bijela. Koliko najmanje bijelih polja može biti na ploči nakon nekog niza takvih poteza?

Rješenje.

Promotrimo prvo kako svaki potez utječe na broj bijelih polja u pojedinom retku, odnosno stupcu. Svaki potez ili ne mijenja boju polja nekog retka, ili promijeni boju točno dva polja u tom retku. Ako su dva izmijenjena polja prije poteza bila oba obojana bijelom bojom, nakon poteza su oba obojana crnom bojom, odnosno broj bijelih polja u tom retku se smanjio za 2. Ako su izmijenjena polja prije poteza bila različite boje, onda su nakon poteza također različite boje pa se broj bijelih polja u tom retku nije promijenio. Konačno, ako su oba polja prije poteza bila crna, nakon poteza su oba bijela pa se broj bijelih polja u tom retku povećao za 2.

Zaključujemo da je parnost broja bijelih polja u svakom retku uvijek ista. Budući da se na početku u svakom retku nalazi 101 bijelo polje, znamo da se u svakom trenutku u svakom retku nalazi barem jedno bijelo polje. Budući da u svakom retku uvijek postoji barem jedno bijelo polje, zaključujemo da je broj bijelih polja na ploči uvijek barem 101.

Pokažimo da zaista postoji niz poteza kojim možemo postići da se na ploči nalazi točno 101 bijelo polje. Promotrimo dijagonalu ploče od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja. Tu dijagonalu zovemo glavnom. Uvedimo koordinate na ploči tako da prva koordinata odgovara rednom broju retka, a druga stupca u kojoj se polje nalazi, tj. tako da su koordinate gornjeg lijevog polja ploče $(1,1)$. Svaki potez možemo opisati koordinatom gornjeg lijevog polja 2×2 kvadrata na kojem radimo promjenu boje. Napravimo prvo poteze tako da sva polja strogo iznad glavne dijagonale i svako drugo polje na glavnoj dijagonali (počevši od drugog) promijene boju. To možemo postići nizom poteza $(1,2),(1,4),...,(1,100),(3,4),(3,6),...,(3,100),...,(97,100),(99,100)$. Analogno možemo postići i da sva polja strogo ispod glavne dijagonale i svako drugo polje na glavnoj dijagonali promijeni boju. Ovim nizom poteza smo postigli da su sva polja izvan glavne dijagonale promijenila boju točno jednom, a svako polje na glavnoj dijagonali je boju promijenilo ili nula ili dva puta, odnosno sva polja na glavnoj dijagonali su bijela, dok su sva polja van glavne dijagonale crna.

Zadatak 3.

Na krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ jednakokračnog trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dokaži da opisana kružnica trokuta APQ prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC ako i samo ako je $|AP|=|CQ|$.

Rješenje.

Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC.

Pretpostavimo da se Q nalazi na kružnici opisanoj trokutu OPA. Tada vrijedi:

- $\sphericalangle PAO = \sphericalangle OPC = \sphericalangle QCO$ jer je trokut AOC jednakokračan.
- $\sphericalangle CQO = 180^\circ - \sphericalangle OQA = \sphericalangle APO$ jer je četverokut $APOQ$ tetivan.

Budući da je $|AO|=|CO|$, zaključujemo da su trokuti APO i $CQ'O$ sukladni, odnosno da je $|AP|=|CQ|$.

Pretpostavimo, obratno, da je $|AP|=|CQ|$. Kao i prije, vrijedi $|AO|=|CO|$ i $\sphericalangle PAO = \sphericalangle QCO$, pa su trokuti PAO i QCO sukladni po S-K-S poučku. Dakle, vrijedi

$$\sphericalangle OQC = \sphericalangle OPA,$$

pa zaključujemo da je četverokut $OPAQ$ tetivan.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n, $n \geqslant 2$, takve da je

$$\frac{3^n + 5^n}{3^{n-2} + 5^{n-2}}$$

prirodni broj.

Rješenje.

Pretpostavimo da je $n \geqslant 2$ prirodan broj takav da je $\frac{3^n + 5^n}{3^{n-2} + 5^{n-2}}$ prirodan broj. Označimo taj prirodan broj s k. Sada imamo

$$3^n + 5^n = k\left(3^{n-2} + 5^{n-2}\right)$$

odnosno

$$5^n - k \cdot 5^{n-2} = k \cdot 3^{n-2} - 3^n$$

$$(25 - k) \cdot 5^{n-2} = (k - 9) \cdot 3^{n-2}.$$

Iz ove jednakosti možemo zaključiti da vrijedi $9 < k < 25$. Naime, ako je $k - 9 \leqslant 0$, onda bi moralo vrijediti $25 - k \leqslant 0$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi $k - 9 > 0$ i $25 - k > 0$.

Ako je $n = 2$, jednakost se svodi na $25 - k = k - 9$, odnosno $k = 17$. Zaista, $\frac{3^2 + 5^2}{3^0 + 5^0} = \frac{9 + 25}{1 + 1} = \frac{34}{2} = 17$.

Ako je pak $n > 2$, onda su i lijeva i desna strana jednakosti djeljive s 3 odnosno 5. Budući da su 3 i 5 relativno prosti, zaključujemo da je $25 - k$ djeljiv s 3 te $k - 9$ djeljiv s 5. Jedini k između 9 i 25 koji zadovoljava oba uvjeta je $k = 19$. Jednakost sada postaje

$$6 \cdot 5^{n-2} = 10 \cdot 3^{n-2},$$

odnosno

$$5^{n-3} = 3^{n-3},$$

pa zaključujemo da je nužno $n = 3$. Zaista,

$$\frac{3^3 + 5^3}{3^1 + 5^1} = \frac{27 + 125}{3 + 5} = \frac{152}{8} = 19.$$

Zaključujemo da su $n = 2$ i $n = 3$ svi traženi prirodni brojevi.

HRVATSKA JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Test za izbor JBMO ekipe – drugi dan

Zagreb, 8. svibnja 2024.

Zadatak 1.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$(x+y+z)^2 \geqslant \frac{3}{2}\left(\frac{x^2+1}{x} + \frac{y^2+1}{y} + \frac{z^2+1}{z}\right).$$

Rješenje.

Kvadriranjem dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \geqslant \frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}\right).$$

Korištenjem uvjeta $xy = \frac{1}{z}, yz = \frac{1}{x}$ i $zx = \frac{1}{y}$ zaključujemo da je dovoljno pokazati

$$2x^2+2y^2+2z^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3(x+y+z).$$

Korištenjem $A-G$ nejednakosti dobivamo

$$x^2+x^2+\frac{1}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{x^2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{x^3} = 3x.$$

Analogno slijedi

$$y^2+y^2+\frac{1}{y} \geqslant 3y,$$

$$z^2+z^2+\frac{1}{z} \geqslant 3z,$$

pa željenu nejednakost dobivamo zbrajanjem ove tri nejednakosti.

Zadatak 2.

Za prirodan broj n, neka je $z(n)$ broj znamenaka broja n. Za podskup A skupa prirodnih brojeva kažemo da je *zgodan* ako za svaka dva različita elementa a i b skupa A vrijedi

$$z(a+b)+2 > z(a)+z(b).$$

Dokaži da zgodan skup ne može biti beskonačan i odredi koliko najviše elemenata može imati.

Rješenje.

Neka su a i b dva pozivoljna različita elementa skupa A. Tada vrijedi

$$z(a) + z(b) < 2 + z(a+b) \leqslant 2 + (1 + \max\{z(a), z(b)\}) = 3 + \max\{z(a), z(b)\}$$

$$\implies \min\{z(a), z(b)\} < 3$$

Zaključujemo da skup A ima najviše jedan element s više od dvije znamenke.

Pretpostavimo li da skup A ima barem 61 element možemo zaključiti da ima barem 51 dvoznamenkasti element. Neka su a i b najmanji dvoznamenkasti elementi skupa A. Tada je nužno $a + b \leqslant 49 + 50 = 99$ pa imamo:

$$2 + z(a+b) \leqslant 2 + z(99) = 2 + 2 = z(a) + z(b),$$

odnosno dolazimo do kontradikcije. Skup A može imati najviše 60 elemenata.

Skup $\{1, 2, ..., 9\} \cup \{50, 51, 52, ..., 99\} \cup \{999\}$ zadovoljava uvjete zadatka i ima 60 elemenata.

Zadatak 3.

Neka je ABC šiljastokutni trokut i neka su D, E i F redom nožišta visina iz vrhova A, B i C. Dokaži da vrijedi $|DE| + |DF| \leqslant |BC|$.

Rješenje.

Neka je E' točka osnosimetrična točki E s obzirom na pravac BC. Zbog simetrije je $|DE| = |DE'|$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle E'DC$ i $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BE'C = 90°$.

Uočimo da je četverokut $BDEA$ tetivan jer su oba kuta nad tetivom $\overline{AB}$ prava. Zato je $\sphericalangle EDC = 180° - \sphericalangle EDB = \sphericalangle EAB = \alpha$.

Analogno je četverokut $CDFA$ tetivan jer su oba kuta nad tetivom $\overline{AC}$ prava. Zato je $\sphericalangle BDF = 180° - \sphericalangle FDC = \sphericalangle FAC = \alpha$.

Uočimo da je $\sphericalangle FDE' = \sphericalangle FDE + \sphericalangle EDC + \sphericalangle E'DC = \sphericalangle FDE + 2\alpha$.

Imamo da je $180° = \sphericalangle BDC = \sphericalangle FDE + \sphericalangle BDF + \sphericalangle EDC = \sphericalangle FDE + 2\alpha$. Zato su točke F, D, E' kolinearne pa slijedi $|E'F| = |DE| + |DF|$.

Zbog $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BE'C = 90°$ po Talesovom poučku slijedi da je četverokut $BE'CE$ tetivan, a promjer opisane kružnice mu je dužina $\overline{BC}$. No, kako je i $\sphericalangle BFC = 90°$, slijedi da je i točka F na toj kružnici.

Dakle, $|E'F|$ je tetiva kružnice promjera $|BC|$, pa je $|BC| \geqslant |E'F| = |DE| + |DF|$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Koliko postoji uređenih parova (m, n) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$m^2 + 5n^2 = 4mn + 2n + 19999 \quad ?$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & m^2+5n^2=4mn+2n+19999 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & m^2-4mn+4n^2+n^2-2n+1=20000=2\cdot 100^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & (m-2n)^2+(n-1)^2=2\cdot 100^2. \end{aligned}$$

Dakle, imamo jednadžbu $a^2+b^2=2\cdot 100^2$, gdje je $a=m-2n$ i $b=n-1$.

Desna strana jednakosti je djeljiva s 4, a kvadrat cijelog broja može davati ostatak 0 (ako je paran) ili 1 (ako je neparan) pri dijeljenju s 4. Zato lako vidimo da čim jedan od a i b nije djeljiv s 2, imamo kontradikciju. Dakle, a i b su parni pa je $a=2a_1$, $b=2b_1$.

Jednakost postaje $a_1^2+b_1^2=2\cdot 50^2$. Analognim argumentom dobijamo da su a_1 i b_1 parni pa je $a_1=2a_2$, $b_1=2b_2$.

Jednakost postaje $a_2^2+b_2^2=2\cdot 25^2=1250$. Desna strana daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4, što znači da i a_2^2 i b_2^2 moraju davati ostatak 1 pri dijeljenju s 4 pa su oba neparni.

Desna strana daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, a kvadrat cijelog broja može davati ostatak 0 ili 1 pri dijeljenju s 3. Zato nijedan od a_2 i b_2 nije djeljiv s 3.

Sada želimo prikazati broj $2\cdot 25^2=1250$ kao zbroj dva neparna kvadrata koji nisu djeljivi s 3. Manji od tih kvadrata je najviše 25^2 pa mora biti član skupa:

$$S=\{1^2,5^2,7^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2,25^2\}=\{1,25,49,121,169,289,361,529,625\}.$$

Zato broj $1250-x$ za $x\in S$ može biti $1249,1225,1201,1129,1081,961,889,721$ ili 625. Od njih, samo $1225,961$ i 625 su kvadrati.

Dakle, imamo opcije: $(a_2^2,b_2^2)\in\{(25,1225),(289,961),(625,625),(1225,25),(961,289)\}$.

Izborom predznaka, svaka opcija za (a_2^2,b_2^2) daje 4 opcije za (a_2,b_2), pa ima 20 mogućih uređenih parova (a_2,b_2).

Uočimo da je $n=4b_2+1$ i $m=a+2n=4a_2+8b_2+2$ pa nam svaki par (a_2,b_2) daje jedan par (m,n). Jasno je i da ne mogu dva različita para (a_2,b_2) dati isti par (m,n) jer ako su pripadni b_2 različiti, različiti su i pripadni n-ovi. Ako su pripadni b_2 isti, onda su pripadni a_2 različiti pa su pripadni m-ovi različiti.

Dakle, postoji 20 različitih uređenih parova cijelih brojeva (m,n) koji zadovoljavaju danu jednadžbu.