Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

5. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Jedan peti razred pisao je provjeru iz matematike. Broj učenika koji su dobili ocjenu vrlo dobar jednak je broju učenika s ocjenom dovoljan. Broj odličnih je za 2 manji od broja vrlo dobrih, a broj dobrih za 1 je veći od broja dovoljnih. Jedan učenik dobio je ocjenu nedovoljan. Koliko učenika ima taj razred ako je prosječna ocjena iz provjere bila 3.25?

2. Odredi sve mogućnosti prostih brojeva a, b, c, d i e za koje vrijedi

$$a + b = \frac{2562}{c \cdot d \cdot e}.$$

3. Od (ne nužno jednakih) kvadrata čije su duljine stranica izražene u centimetrima prirodni brojevi treba složiti pravokutnik površine $2005\ \text{cm}^2$. Koliko je najmanje takvih kvadrata potrebno?

4. Odredi sve šesteroznamenkaste brojeve $\overline{abcdef}$ koji su djeljivi s 9 tako da je troznamenkasti broj $\overline{abc}$ za 860 veći od troznamenkastoga broja $\overline{def}$.

5. Na stolu se nalaze tri karte svaka s napisanim prirodnim brojem na jednoj strani. Položene su na stol redom slijeva nadesno tako da se brojevi napisani na kartama ne vide. Andrea, Biserka i Cvijeta pokušavaju pogoditi brojeve na kartama. Njima je poznato sljedeće:

- svi su brojevi na kartama međusobno različiti
- zbroj svih brojeva na kartama jednak je 13
- brojevi na kartama su u uzlaznom poretku, s lijeva na desno.

Andrea pogleda broj na lijevoj karti i kaže: „Nemam dovoljno informacija za odrediti preostala dva broja“. Nakon toga Biserka, znajući za Andreinu izjavu, pogleda broj na desnoj karti i kaže istu rečenicu kao Andrea. Konačno, Cvijeta, znajući za Andreinu i Biserkinu izjavu pogleda broj na karti u sredini i kaže istu rečenicu.

Možemo li nakon ove tri izjave zaključiti koji je broj na karti u sredini?

Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

6. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Marin je redom napisao brojeve od 1 do 2024 i onda je zapisivao predznake ispred tih brojeva. Ispred broja 1 napisao je minus, onda je ispred sljedećih deset brojeva zapisao plus, potom je ispred broja 12 zapisao minus, a potom ispred sljedećih deset brojeva zapisao plus te je tako nastavio, pri čemu je u svakom koraku, nakon što bi ispred odgovarajućeg broja zapisao minus, ispred sljedećih deset napisao plus sve dok nije došao do broja 2024.

Kolika je vrijednost tako dobivenog brojevnog izraza nakon svih zbrajanja i oduzimanja?

2. Koordinate su vrhova pravokutnika $ABCD$ $A(-100,-50)$, $B(100,-50)$, $C(100,50)$, $D(-100,50)$. Koliko ima različitih točaka $T(m,n)$ koje pripadaju pravokutniku $ABCD$, a za čije koordinate m i n vrijedi $20m+24n=2024$ ako su m i n cijeli brojevi?

3. Ako za prirodne brojeve a i b vrijedi da je broj $2a+5b$ djeljiv s 11, dokaži da je tada i broj $3a+2b$ djeljiv s 11.

4. U pravokutnom trokutu mjera je jednoga šiljastog kuta $75°$. Dokaži da je hipotenuza toga trokuta četiri puta dulja od visine na hipotenuzu.

5. Odredi najmanji prirodni broj n za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

> *Između bilo kojih n prirodnih brojeva uvijek možemo odabrati tri prirodna broja čija je aritmetička sredina prirodan broj.*

(Dokaži da za taj prirodnih broj n i za sve prirodne brojeve veće od njega tvrdnja vrijedi i pokaži primjerom da za broj $n-1$ tvrdnja ne vrijedi.)

Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

7. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 217 500 eura. Mjesta će snositi troškove proporcionalno broju stanovnika. U mjestu D stanovnika je koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25 % manje stanovnika nego u B, a 20 % više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti svako mjesto.

2. Marija u računalo upisuje deveteroznamenkasti prirodni broj koristeći se znamenkama 0, 1, 2, 5, 6, 8 i 9. Primijetila je da njezino računalo radi pogreške pri ispisu. Na ekranu računalo ispiše broj u obrnutom poretku znamenaka i istodobno zamijeni neke znamenke kako je prikazano u tablici.

UNOS	0	1	2	5	6	8	9
ISPIS	0	1	5	2	9	8	6

Na primjer, pri unosu broja 211586089 računalo ispiše 680982115.
Koliko ima deveteroznamenkastih prirodnih brojeva koji će se na ekranu ispisati točno onako kako su uneseni?

3. Niz od 2024 broja ima svojstvo da je zbroj svakog broja i recipročne vrijednosti sljedećeg broja u tom nizu jednak 1. Ako je umnožak svih brojeva toga niza jednak 2, koji je broj 123. u nizu?

4. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|\measuredangle BAC| = 2 \cdot |\measuredangle CBA|$, $|AB| = 6.5$ cm, a duljina je stranice $\overline{BC}$ za 2.6 cm veća od duljine stranice $\overline{AC}$. Kolike su duljine stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$?

5. Za vrijeme doručka svaki je član obitelji u svoju šalicu natočio i kavu i mlijeko te je napravio točno 1.8 decilitra bijele kave. Za izradu bijele kave svatko je od njih pomiješao kavu i mlijeko u drukčijem omjeru. Jedan je od članova u svoju šalicu natočio jednu osminu ukupne količine kave i jednu petinu ukupne količine mlijeka. Koliko je članova obitelji moglo biti na doručku ako je obitelj popila svu kavu i svo mlijeko?

Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

8. razred – osnovna škola

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Osim konačnoga rezultata boduje se i postupak. Da bi se dobili svi bodovi, potrebno je pronaći sva rješenja i utvrditi da nema drugih, zapisati postupak te obrazložiti svoje zaključke.

1. Trojica radnika trebaju s jedne zajedničke hrpe rasporediti plastične sanduke na tri hrpe. Najprije Karlo sa zajedničke hrpe uzima određeni broj sanduka, $\frac{3}{4}$ stavlja na hrpu K, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe L i M. Zatim Luka sa zajedničke hrpe uzima određeni broj sanduka, $\frac{1}{4}$ stavlja na hrpu L, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe K i M. Na kraju Marko sa zajedničke hrpe uzima preostale sanduke, $\frac{1}{12}$ stavlja na hrpu M, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe K i L. Nakon svega je broj sanduka na hrpama K, L i M u omjeru $3 : 2 : 1$. Odredi najmanji mogući broj plastičnih sanduka na zajedničkoj hrpi prije svih premještanja.

2. Točka M polovište je stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ sa stranicom duljine 4. Kružnica sa središtem u točki M polumjera 2 i kružnica sa središtem u točki A polumjera 4 sijeku se u točkama D i P. Odredi udaljenost točke P od dužine $\overline{AD}$.

3. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $3m^2 - 7n^2 = 9$.

4. Točke E i F odabrane su redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$, pri čemu vrijedi $|AE| = |DF|$. Točka G sjecište je dužina $\overline{CF}$ i $\overline{DE}$. Dokaži da je $|\measuredangle CEF| = |\measuredangle AGB|$.

5. Na koliko različitih načina možemo u polja tablice s tri retka i tri stupca upisati sve prirodne brojeve od 1 do 9, po jedan broj u svako polje, tako da je zbroj brojeva u svakom retku djeljiv s 3, a zbroj brojeva ni u jednom stupcu nije djeljiv s 3?

Nije dopuštena uporaba džepnoga računala ni bilo kakvih priručnika.