DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Jedan peti razred pisao je provjeru iz matematike. Broj učenika koji su dobili ocjenu vrlo dobar jednak je broju učenika s ocjenom dovoljan. Broj odličnih je za 2 manji od broja vrlo dobrih, a broj dobrih za 1 je veći od broja dovoljnih. Jedan učenik dobio je ocjenu nedovoljan. Koliko učenika ima taj razred ako je prosječna ocjena iz provjere bila 3.25?

Rješenje.
Neka je x broj učenika koji su dobili ocjenu odličan. Onda vrijedi

Ocjena	Broj učenika
odličan	x
vrlo dobar	$x+2$
dobar	$x+3$
dovoljan	$x+2$
nedovoljan	1

Ukupan broj učenika jednak je
$x+(x+2)+(x+3)+(x+2)+1=4x+8$

Ukupan zbroj ocjena jednak je
$5\cdot x+4\cdot(x+2)+3\cdot(x+3)+2\cdot(x+2)+1\cdot 1=$
$5x+4x+8+3x+9+2x+4+1=14\,x+22$

Prosječna ocjena je 3.25 pa vrijedi
$(14x+22):(4x+8)=3.25$
$14x+22=3.25\cdot(4x+8)$
$14x+22=13x+26$
$x=4$
$4x+8=4\cdot 4+8=24$

Taj razred ima 24 učenika.

2. Odredi sve mogućnosti prostih brojeva a, b, c, d i e za koje vrijedi

$$a + b = \frac{2562}{c \cdot d \cdot e}.$$

Rješenje.
Izraz možemo transformirati u $(a + b) \cdot c \cdot d \cdot e = 2562$.
Rastavljanjem na proste faktore dobivamo $2562 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 61$.
Dakle, $(a + b) \cdot c \cdot d \cdot e = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 61$.
Kako su a i b prosti brojevi vrijedi da je $a + b \neq 2$ i $a + b \neq 3$.

1. slučaj: $a + b = 7$.
Znači da su a i $b \in \{2, 5\}$, a c, d i $e \in \{2, 3, 61\}$
Sva rješenja su:

a	b	c	d	e
2	5	2	3	61
2	5	2	61	3
2	5	3	2	61
2	5	3	61	2
2	5	61	2	3
2	5	61	3	2
5	2	2	3	61
5	2	2	61	3
5	2	3	2	61
5	2	3	61	2
5	2	61	2	3
5	2	61	3	2

2. slučaj: $a + b = 61$
Znači da su a i $b \in \{2, 59\}$, a c, d i $e \in \{2, 3, 7\}$
Sva rješenja su:

a	b	c	d	e
2	59	2	3	7
2	59	2	7	3
2	59	3	2	7
2	59	3	7	2
2	59	7	2	3
2	59	7	3	2
59	2	2	3	7
59	2	2	7	3
59	2	3	2	7
59	2	3	7	2
59	2	7	2	3
59	2	7	3	2

3. Od (ne nužno jednakih) kvadrata čije su duljine stranica izražene u centimetrima prirodni brojevi treba složiti pravokutnik površine 2005 cm^2. Koliko je najmanje takvih kvadrata potrebno?

Rješenje.
Kako je $2005 = 5 \cdot 401$, a brojevi 5 i 401 prosti brojevi, dimenzije pravokutnika mogu biti:
1) 1 cm i 2005 cm ili
2) 5 cm i 401 cm.

U prvom je slučaju potrebno 2005 kvadrata sa stranicom duljine 1 cm.
U drugom slučaju, ako koristimo kvadrate s najduljom stranicom, očekujemo da će broj potrebnih kvadrata biti manji. Kako je $401 = 80 \cdot 5 + 1$, potrebno je 80 kvadrata sa stranicom duljine 5 cm i 5 kvadrata sa stranicom duljine 1 cm što je ukupno 85 kvadrata.

Ako koristimo 79 kvadrata sa stranicom duljine 5 cm, preostao je pravokutnik dimenzija 5 cm i 6 cm za koji je potrebno 3 kvadrata sa stranicom duljine 2 cm i 2 kvadrata sa stranicom duljine 3 cm, što je ukupno 84 kvadrata.
Ako koristimo 78 kvadrata sa stranicom duljine 5 cm, preostao je pravokutnik dimenzija 5 cm i 11 cm za koji moramo koristiti kvadrat sa stranicom duljine 5 cm jer je inače broj potrebnih kvadrata veći od 6, a ukupno više od 84.

Daljnjim smanjivanjem broja kvadrata sa stranicom duljine 5 cm povećava se broj potrebnih kvadrata pa zaključujemo da je potrebno najmanje 84 kvadrata.

4. Odredi sve šesteroznamenkaste brojeve $\overline{abcdef}$ koji su djeljivi s 9 tako da je troznamenkasti broj $\overline{abc}$ za 860 veći od troznamenkastoga broja $\overline{def}$.

Rješenje.
Iz $\overline{abc} = 860 + \overline{def}$ slijedi da je $d = 1$ jer za $d = 2$ ili veći, zbroj $860 + \overline{def}$ je četveroznamenkasti broj. Zbroj $860 + \overline{1ef}$ mora biti veći od 900, a manji od 1000, pa je $a = 9$.

Kada zbrajamo znamenke jedinica pribrojnika 860 i $\overline{1ef}$ dobije se $0 + f = c$ pa je $c = f$.
Kada zbrajamo znamenke desetica dobije se $e + 6 = b$ što mora biti manje od 10 jer bi „jedan dalje“ prenijeli na stotice i u zbroju dobili četveroznamenkasti broj. Znači, $e \in \{1, 2, 3\}$.
Traženi broj je oblika $\overline{9bf1ef}$ pri čemu je $b = e + 6$.
Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.
Zbroj znamenaka broja $\overline{9bf1ef}$ jednak je
$9 + b + f + 1 + e + f = 9 + e + 6 + f + 1 + e + f = 16 + 2(e + f)$.

$16 + 2(e + f)$ je djeljiv s 9 ako je $e + f = 1$ ili $e + f = 10$ jer $e + f$ ne može biti 19 i veći.

Slučaj $e + f = 1$.
Za $e = 1$, $f = 0$, $b = e + 6 = 1 + 6 = 7$, dobije se broj 970110.
Za $e = 0$, $f = 1$, $b = e + 6 = 0 + 6 = 6$, dobije se broj 961101.

Slučaj $e + f = 10$.
Za $e = 1$, $f = 9$, $b = e + 6 = 1 + 6 = 7$, dobije se broj 979119.
Za $e = 2$, $f = 8$, $b = e + 6 = 2 + 6 = 8$, dobije se broj 988128.
Za $e = 3$, $f = 7$, $b = e + 6 = 3 + 6 = 9$, dobije se broj 997137.

5. Na stolu se nalaze tri karte svaka s napisanim prirodnim brojem na jednoj strani. Položene su na stol redom slijeva nadesno tako da se brojevi napisani na kartama ne vide. Andrea, Biserka i Cvijeta pokušavaju pogoditi brojeve na kartama. Njima je poznato sljedeće:

- svi su brojevi na kartama međusobno različiti
- zbroj svih brojeva na kartama jednak je 13
- brojevi na kartama su u uzlaznom poretku, s lijeva na desno.

Andrea pogleda broj na lijevoj karti i kaže: „Nemam dovoljno informacija za odrediti preostala dva broja“. Nakon toga Biserka, znajući za Andreinu izjavu, pogleda broj na desnoj karti i kaže istu rečenicu kao Andrea. Konačno, Cvijeta, znajući za Andreinu i Biserkinu izjavu pogleda broj na karti u sredini i kaže istu rečenicu.

Možemo li nakon ove tri izjave zaključiti koji je broj na karti u sredini?

Rješenje.

Na početku imamo sljedeće mogućnosti za brojeve na kartama:
(1,2,10), (1,3,9), (1,4,8), (1,5,7), (2,3,8), (2,4,7), (2,5,6) i (3,4,6).

Da je Andrea na prvoj karti slijeva vidjela broj 3, znala bi preostala dva broja.
Kako nije, možemo eliminirati mogućnost (3,4,6).

Nakon toga, ako je zadnja karta 10, 9 ili 6, Biserka bi znala preostala dva broja.
Zato eliminiramo još tri mogućnosti i preostaju nam još četiri: (2,4,7), (1,4,8), (1,5,7) i (2,3,8).

Konačno, kako ni Cvijeta nakon otkrivanja srednje karte ne zna preostale brojeve, broj na karti u sredini mora biti 4.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Marin je redom napisao brojeve od 1 do 2024 i onda je zapisivao predznake ispred tih brojeva. Ispred broja 1 napisao je minus, onda je ispred sljedećih deset brojeva zapisao plus, potom je ispred broja 12 zapisao minus, a potom ispred sljedećih deset brojeva zapisao plus te je tako nastavio, pri čemu je u svakom koraku, nakon što bi ispred odgovarajućeg broja zapisao minus, ispred sljedećih deset napisao plus sve dok nije došao do broja 2024.
Kolika je vrijednost tako dobivenog brojevnog izraza nakon svih zbrajanja i oduzimanja?

Prvo rješenje.
Kako je Marin predznake stavljao periodički na svakih 11 brojeva principom minus ispred prvog broja, a plus ispred sljedećih deset, onda je od 1 do 2024 to napravio $2024 : 11 = 184$ puta, a posljednji plus je stavio ispred broja 2014.
Odredimo vrijednost dobivenog brojevnog izraza.
$-1+2+\cdots+11-12+13+\cdots+22-23+24+\cdots+2013-2014+2015+\cdots+2024$
$=1+2+3+\cdots+2024-2\cdot(1+12+23+34+\cdots+2014)$

$1+2+\cdots+2024=\dfrac{2024\cdot 2025}{2}=1012\cdot 2025$
$1+12+23+\cdots+2014=1+1+11+1+22+1+33+\cdots+1+2013$
$=1+(1+1\cdot 11)+(1+2\cdot 11)+(1+3\cdot 11)+\cdots+(1+183\cdot 11)$
$=184\cdot 1+11\cdot(1+2+\cdots+183)$
$=184+11\cdot\dfrac{183\cdot 184}{2}=184+11\cdot 183\cdot 92=2\cdot 92+11\cdot 183\cdot 92$
$=(2+11\cdot 183)\cdot 92=2015\cdot 92.$
Sada je
$-1+2+\cdots+11-12+13+\cdots+22-23+24+\cdots+2013-2014+2015+\cdots+2024$
$=1012\cdot 2025-2\cdot 2015\cdot 92=2\,049\,300-370\,760=1\,678\,540.$

Drugo rješenje.
S obzirom da je 2024 djeljivo s 11, brojevi ispred kojih se nalazi minus su: $1, 12, 23, \dots, 2014$.
Svi su ti brojevi oblika $11k+1$ za neke cijele brojeve k, a ukupno ih ima $\frac{2014-1}{11}+1=184$.
Zbroj tih brojeva je jednak:
$$\frac{184}{2}(1+2014)=92\cdot 2015.$$

Zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do 2024 jednak je $1012\cdot 2025$.
Vrijednost Marinovog brojevnog izraza je:
$$1012\cdot 2025-2\cdot 92\cdot 2015=2015\cdot(1012-184)+1012\cdot 10=2015\cdot 828+10120$$
$$=1\,668\,420+10\,120=1\,678\,540.$$

2. Koordinate su vrhova pravokutnika $ABCD$ $A(-100,-50)$, $B(100,-50)$, $C(100,50)$, $D(-100,50)$. Koliko ima različitih točaka $T(m,n)$ koje pripadaju pravokutniku $ABCD$, a za čije koordinate m i n vrijedi $20m+24n=2024$ ako su m i n cijeli brojevi?

Rješenje.

Uočimo da jednadžbu $20m+24n=2024$ možemo podijeliti s 4, te dobivamo $5m+6n=506$.
Iz ovog zapisa možemo zaključiti da 5 dijeli $506-6n=505-5n+1-n$.

Budući da 5 dijeli $506-6n$ i očito dijeli $505-5n$, slijedi da dijeli i

$$505-5n-(506-6n)=n-1.$$

Stoga mora postojati cijeli broj k takav da je vrijedi $n=5k+1$.

Iz jednadžbe $5m+6n=506$ uvrštavanjem $n=5k+1$ i sređivanjem dobivamo $m=100-6k$.

Kako točka $T(m,n)$ mora pripadati pravokutniku $ABCD$, onda za njene koordinate vrijedi:

$-100 \leq m \leq 100$ i $-50 \leq n \leq 50$.

Sada je:

$-100 \leq 100-6k \leq 100$ i $-50 \leq 5k+1 \leq 50$.

Iz prve nejednakosti dobijemo $-200 \leq -6k \leq 0$.

Tada za suprotan broj, 6k vrijedi $0 \leq 6k \leq 200$, odnosno $0 \leq k \leq 33\frac{1}{3}$.

To znači da je $k \in \{0,1,2,3,\ldots 30,31,32,33\}$.

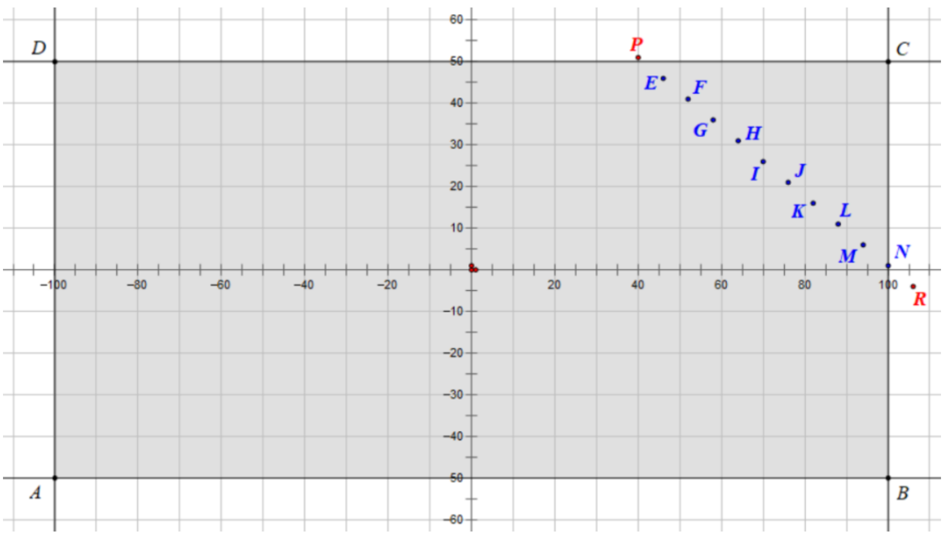
Iz druge nejednakosti dobijemo $-51 \leq 5k \leq 49$, odnosno $-10\frac{1}{5} \leq k \leq 9\frac{4}{5}$.

To znači da je $k \in \{-10,-9,-8,\ldots 7,8,9\}$.

Ukupno ima 10 cijelih brojeva koji zadovoljavaju oba uvjeta i to su $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ pa ima i 10 različitih točaka koje zadovoljavaju uvjete zadatka.

Napomena: Tražene točke možemo prikazati u koordinatnom sustavu.

$R(106,-4) \notin ABCD$
$N(100,1)$
$M(94,6)$
$L(88,11)$
$K(82,16)$
$J(76,21)$
$I(70,26)$
$H(64,31)$
$G(58,36)$
$F(52,41)$
$E(46,46)$
$P(40,51) \notin ABCD$



3. Ako za prirodne brojeve a i b vrijedi da je broj $2a + 5b$ djeljiv s 11, dokaži da je tada i broj $3a + 2b$ djeljiv s 11.

Rješenje.
Ako za prirodne brojeve a i b vrijedi da je broj $2a + 5b$ djeljiv s 11, onda je $2a + 5b = 11k$ za neki prirodan broj k. Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$2a + 5b = 11k \quad /\cdot 3$

$6a + 15b = 33k$

$6a + 4b + 11b = 33k$

$6a + 4b = 33k - 11b$

$2(3a + 2b) = 11(3k - b)$

Desna strana jednakosti je djeljiva s 11 jer je jedan faktor s te strane upravo broj 11.

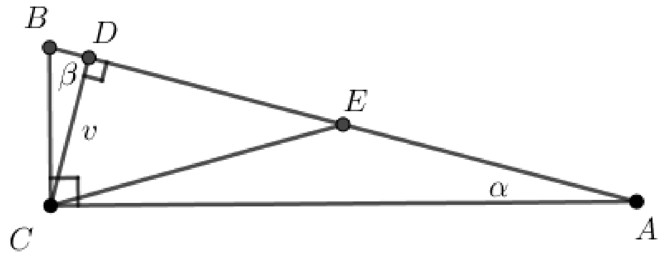
Tada i lijeva strana jednakosti mora biti djeljiva s 11.

Broj 2 nije djeljiv s 11, pa izraz u zagradi $3a + 2b$ mora biti djeljiv s 11, što je i trebalo dokazati.

4. U pravokutnom trokutu mjera je jednoga šiljastog kuta 75°. Dokaži da je hipotenuza toga trokuta četiri puta dulja od visine na hipotenuzu.

Prvo rješenje.

Neka je to trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i neka je $\beta = 75°$ mjera kuta pri vrhu B, kao na slici.



Neka je točka D nožište visine iz vrha C, a točka E polovište hipotenuze. Kako je polovište hipotenuze središte pravokutnom trokutu opisane kružnice, slijedi $|AE| = |CE| = |EB| = \frac{|AB|}{2}$.

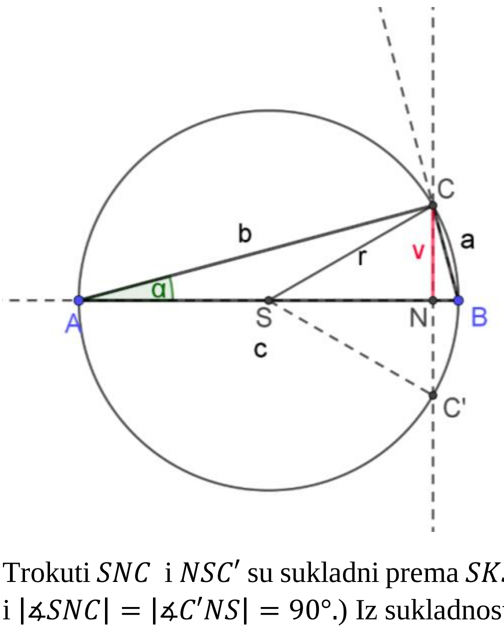
Zaključujemo da je trokut CAE jednakokračan trokut s krakovima $\overline{CE}$ i $\overline{AE}$, a tada vrijedi da su kutovi $\angle ACE$ i $\angle EAC$ sukladni i veličine α. Prema uvjetu zadatka, $\alpha = 90° - \beta = 15°$.

Kut $\angle BEC$ vanjski je kut trokuta CAE i njegova je veličina jednaka $2\alpha = 30°$.

Trokut EDC je pravokutni trokut s jednim šiljastim kutom veličine 30°, što znači da je taj trokut polovina jednakostraničnog trokuta pri čemu je dužina $\overline{DC}$ polovina osnovice: $|CE| = 2|CD|$.

Kako je $|AB| = |AE| + |EB|$, vrijedi $|AB| = |CE| + |CE| = 2|CE| = 4|CD|$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.



Označimo elemente trokuta kao na slici. Neka je S središte opisane kružnice pravokutnog trokuta. Tada je S polovište hipotenuze $\overline{AB}$.

Trokut ASC je jednakokračan trokut, te vrijedi $|\measuredangle SAC| = |\measuredangle ACS| = \alpha$.

Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, slijedi $\alpha = 15°$.

Budući da je vanjski kut trokuta jednak zbroju dvaju njemu nasuprotnih unutarnjih kutova tog trokuta vrijedi $|\measuredangle BSC| = 15° + 15° = 30°$.

Neka je N sjecište okomice iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$ i neka je C' točka na okomici CN odabrana tako da je $|NC'| = |CN|$.

Trokuti SNC i NSC' su sukladni prema SKS poučku. (Vrijedi $|NC'| = |CN|$, $\overline{SN}$ je zajednička stranica i $|\measuredangle SNC| = |\measuredangle C'NS| = 90°$.) Iz sukladnosti trokuta slijedi:

$|\measuredangle NSC| = |\measuredangle NSC'| = 30°$, $|SC'| = |SC|$ i $|\measuredangle SCN| = |\measuredangle NC'S| = 90° - 30° = 60°$,

pa zaključujemo da je trokut $SC'C$ je jednakostraničan.

Dakle, $|AB| = 2|SA| = 2|SC| = 2|CC'| = 2 \cdot 2|CN| = 4|CN|$.

5. Odredi najmanji prirodni broj n za koji vrijedi sljedeća tvrdnja:

Između bilo kojih n prirodnih brojeva uvijek možemo odabrati tri prirodna broja čija je aritmetička sredina prirodan broj.

(Dokaži da za taj prirodni broj n i za sve prirodne brojeve veće od njega tvrdnja vrijedi i pokaži primjerom da za broj $n-1$ tvrdnja ne vrijedi.)

Rješenje.
Odredimo najmanji prirodni broj n za koji tvrdnja iz zadatka vrijedi.

Za $n = 3$ tvrdnja očito ne vrijedi. Na primjer, možemo promatrati brojeve 1, 2, 4.

Pokažimo da tvrdnja ne vrijedi za $n = 4$, tj. da postoje četiri prirodna broja tako da među njima ne postoje tri čija bi aritmetička sredina bila prirodni broj.

Promotrimo npr. brojeve $4,\ 5,\ 7$ i 8.

$\frac{4+5+7}{3}=\frac{16}{3}\notin\mathbb{N}$, $\frac{4+5+8}{3}=\frac{17}{3}\notin\mathbb{N}$, $\frac{4+7+8}{3}=\frac{19}{3}\notin\mathbb{N}$, $\frac{5+7+8}{3}=\frac{20}{3}\notin\mathbb{N}$.

U nastavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n = 5$.

Uočimo da je aritmetička sredina tri prirodna broja a , b i c prirodan broj ako i samo ako je njihov zbroj djeljiv brojem 3. Ostaci pri dijeljenju prirodnog broja brojem 3 su $0, 1$ i 2, pa se svaki prirodan broj može zapisati na jedan od načina: $3k, 3k+1, 3k+2,$ za neki $k\in\mathbb{N}_0$.

Za proizvoljnih pet prirodnih brojeva imamo sljedeće dvije mogućnosti:

1) Među promatranih pet brojeva se nalaze tri broja koji imaju isti ostatak pri dijeljenju s 3. Tada je njihov zbroj djeljiv s tri (jer je zbroj ostataka $0, 3$ ili 6).

2) Među promatranih pet brojeva se ne nalaze tri broja koji imaju isti ostatak pri dijeljenju s 3. Tada se svaki ostatak pojavljuje najviše dva puta. Budući da imamo 5 brojeva, te vrijedi 5=2+2+1, vidimo da se svaki ostatak mora pojavljivati barem jednom. Dakle, postoje tri broja koja daju različite ostatke, a njihov zbroj je djeljiv s 3 jer je zbroj ostataka 3.

Time smo pokazali da je 5 najmanji prirodan broj za koji tvrdnja vrijedi.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 217 500 eura. Mjesta će snositi troškove proporcionalno broju stanovnika. U mjestu D stanovnika je koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25 % manje stanovnika nego u B, a 20 % više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti svako mjesto.

Prvo rješenje.
Neka je x broj stanovnika u mjestu C. Tada je broj stanovnika u mjestu A jednak $1.2x$.
Neka je y broj stanovnika u mjestu B. Tada je broj stanovnika u mjestu A jednak $0.75y$.
Stoga je $1.2x = 0.75y$ pa je $y = 1.6x$.
Broj stanovnika u mjestu D je, tada, $1.2x + x = 2.2x$.
Vrijedi

$$1.2x + 1.6x + x + 2.2x = 217\ 500$$
$$6x = 217\ 500$$
$$x = 36\ 250$$

Troškovi za pojedino mjesto iznose:

$$\text{A} = 1.2 \cdot 36\ 250 = 43\ 500 \text{ eura,}$$

$$\text{B} = 1.6 \cdot 36\ 250 = 58\ 000 \text{ eura,}$$

$$\text{C} = 1 \cdot 36\ 250 = 36\ 250 \text{ eura,}$$

$$\text{D} = 2.2 \cdot 36\ 250 = 79\ 750 \text{ eura.}$$

Drugo rješenje.
Označimo broj stanovnika u mjestima A, B, C, D redom s a, b, c, d.
Prema uvjetima zadatka vrijedi
$d = a + c, \qquad a = \frac{3}{4}b, \qquad a = \frac{6}{5}c.$
pa možemo sve brojeve izraziti pomoću a:
$b = \frac{4}{3}a, \qquad c = \frac{5}{6}a, \qquad d = a + \frac{5}{6}a = \frac{11}{6}a.$
Dakle, $a : b : c : d = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{6} : \frac{11}{6} = 6 : 8 : 5 : 11.$

U dobivenom omjeru treba podijeliti iznos od 217 500 eura.
Označimo li iznose u eurima za pojedino mjesto sa A, B, C, D
i uvrstimo li $A = 6k, B = 8k, C = 5k, D = 11k$ u izraz $A + B + C + D = 217\ 500$,
dobijemo:

$$6k + 8k + 5k + 11k = 217\ 500$$
$$30k = 217\ 500$$
$$k = 7250$$

Troškovi za pojedino mjesto iznose:

$$A = 43\,500 \text{ eura}, B = 58\,000 \text{ eura}, C = 36\,250 \text{ eura i } D = 79\,750 \text{ eura.}$$

2. Marija u računalo upisuje deveteroznamenkasti prirodni broj koristeći se znamenkama 0, 1, 2, 5, 6, 8 i 9. Primijetila je da njezino računalo radi pogreške pri ispisu. Na ekranu računalo ispiše broj u obrnutom poretku znamenaka i istodobno zamijeni neke znamenke kako je prikazano u tablici.

UNOS	0	1	2	5	6	8	9
ISPIS	0	1	5	2	9	8	6

Na primjer, pri unosu broja 211586089 računalo ispiše 680982115.
Koliko ima deveteroznamenkastih prirodnih brojeva koji će se na ekranu ispisati točno onako kako su uneseni?

Prvo rješenje.
Neka je $\overline{abcdefghi}$ deveteroznamenkasti broj.

Po uvjetu zadatka znamenka e će pri zapisivanju broja u obrnutom redoslijedu ostati na istome mjestu pa vrijedi da je $e \in \{0, 1, 8\}$.

Znamenka a je vodeća znamenka pa je $a \neq 0$. Znamenke a i i će zamijeniti mjesta pa je $a \in \{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$, a znamenka i je u potpunosti određena znamenkom a.

Na sličan način se zaključuje: $b \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$ i $d \in \{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$, a znamenke f, g i h su u potpunosti određene znamenkama d, c i b.
Traženih brojeva ima: $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6174$.

Drugo rješenje.
Neka je $\overline{abcdefghi}$ deveteroznamenkasti broj. Znamenke 2, 5, 6 i 9 koje se mijenjaju od unosa do ispisa nazovimo „simetrične znamenke“. One se u traženom broju ne moraju pojaviti uopće, mogu se pojaviti samo jednom, dvaput, triput ili četiri puta.

Po uvjetu zadatka znamenka e će pri zapisivanju broja u obrnutom redoslijedu ostati na istome mjestu pa vrijedi da je $e \in \{0, 1, 8\}$. Dakle, možemo je birati na 3 načina, u svakom slučaju.

<u>1.slučaj:</u> „Simetrične znamenke“ se ne pojavljuju u traženom broju.

$a \in \{1, 8\}$, budući je znamenka a vodeća znamenka. Znamenke a i i će zamijeniti mjesta pa je znamenka i u potpunosti određena znamenkom a. Dakle, znamenku a možemo odabrati na 2 načina.

Slično vrijedi i za znamenke b i h, $b \in \{0, 1, 8\}, h \in \{0, 1, 8\}$. Znamenku b možemo odabrati na 3 načina, a znamenka h je u potpunosti određena znamenkom b. Isto vrijedi za znamenke c i g te d i f.

Brojeva s traženim svojstvom ima $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$.

<u>2.slučaj:</u> „Simetrične znamenke“ se pojavljuju jedanput u traženom broju.

Ako se „simetrične znamenke“ nalaze na 2., 3. ili 4. mjestu, na 1. mjestu je onda $a \in \{1, 8\}$ i na 5. mjestu je $e \in \{0, 1, 8\}$.

Brojeva s traženim svojstvom ima $3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 648$.

Ako se „simetrične znamenke" nalaze na 1. mjestu onda je $b \in \{0,1,8\}, c \in \{0,1,8\}$, $d \in \{0,1,8\}$ te $e \in \{0,1,8\}$.

Brojeva s traženim svojstvom ima $4 \cdot\ 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$.

<u>3.slučaj:</u> „Simetrične znamenke" se pojavljuju dvaput u traženom broju.

Ako se „simetrične znamenke" nalaze na 2. i 3. mjestu, 2. i 4. mjestu ili na 3. i 4. mjestu onda brojeva s traženim svojstvom ima $3 \cdot (2 \cdot\ 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3) = 864$.

Ako se „simetrične znamenke" nalaze na 1. i 2. mjestu, 1. i 3. mjestu ili na 1. i 4. mjestu onda brojeva s traženim svojstvom ima $3 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 1296$.

<u>4.slučaj:</u> „Simetrične znamenke" se pojavljuju triput u traženom broju.

Ako se „simetrične znamenke" nalaze na 2., 3. i 4. mjestu onda brojeva s traženim svojstvom ima $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 384$.

Ako se „simetrične znamenke" nalaze na 1., 2. i 3. mjestu, 1., 2. i 4. mjestu ili na 1., 3. i 4. mjestu onda brojeva s traženim svojstvom ima $3 \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3) = 1728$.

<u>5.slučaj:</u> „Simetrične znamenke" se pojavljuju četiri puta u traženom broju pa brojeva s traženim svojstvom ima $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 768$.

Traženih brojeva ima: $162 + 648 + 324 + 864 + 1296 + 384 + 1728 + 768 = 6174$.

3. Niz od 2024 broja ima svojstvo da je zbroj svakog broja i recipročne vrijednosti sljedećeg broja u tom nizu jednak 1. Ako je umnožak svih brojeva toga niza jednak 2, koji je broj 123. u nizu?

Rješenje.

Označimo s x prvi član niza. Ako je y drugi član niza, tada je $x + \frac{1}{y} = 1$ pa je $y = \frac{1}{1-x}$.

Ako je z treći član niza, tada je $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{z} = 1$ pa je $\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$, odnosno, tada je $z = \frac{x-1}{x}$.

Ako je w četvrti član niza, tada je $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{w} = 1$ pa je $\frac{1}{w} = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}$, odnosno $w = x$.

Time smo dobili da je četvrti član niza jednak prvome pa je jasno da niz ima period 3 i da su njegovi elementi $x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x},\ x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x},\ x, \ldots$

Kako je $2024 = 674 \cdot 3 + 2$ i kako je $x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x} = -1$,

slijedi da je umnožak prvih 2022 člana jednak $(-1)^{674} = 1$.

Umnožak svih brojeva je 2, pa vrijedi $x \cdot \frac{1}{1-x} = 2$, tj.

$x = 2 - 2x,$

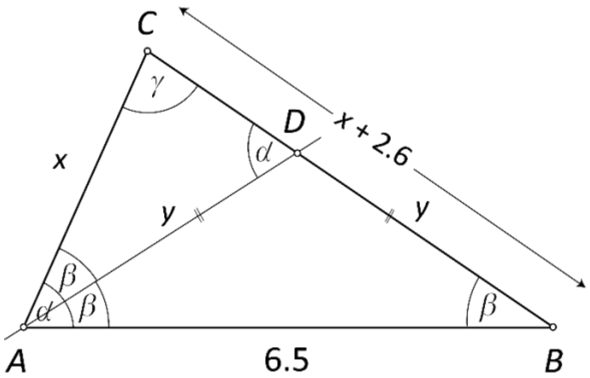
iz čega dobivamo

$x = \frac{2}{3}$.

$123 = 41 \cdot 3$ pa je 123. član niza jednak trećem članu niza tj. $\frac{x-1}{x} = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$.

4. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|\measuredangle BAC| = 2 \cdot |\measuredangle CBA|$, $|AB| = 6.5$ cm, a duljina je stranice $\overline{BC}$ za 2.6 cm veća od duljine stranice $\overline{AC}$. Kolike su duljine stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$?

Rješenje.



Neka je D sjecište simetrale kuta $\measuredangle BAC$ i stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC.

Iz uvjeta zadatka slijedi da je $|\measuredangle CBA| = \frac{1}{2}|\measuredangle BAC|$ ili $\beta = \frac{1}{2}\alpha$.

Zbog $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle BAD|$ prema definiciji simetrale kuta vrijedi jednakost

$|\measuredangle DAC| = |\measuredangle BAD| = |\measuredangle CBA| = \beta$.

To znači da je trokut ABD jednakokračan, pa je $|AD| = |BD|$.

Neka je $|AC| = x$, a $|AD| = |BD| = y$.

Tada je $|BC| = x + 2.6$, a $|CD| = |BC| - |BD|$, ili $|CD| = x + 2.6 - y$.

Po K-K poučku trokuti ADC i ABC su slični, tj. $\Delta ADC \sim \Delta ABC$

($|\measuredangle DAC| = |\measuredangle CBA| = \beta$ i $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ACB| = \gamma$).

Zbog sličnosti je $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$ ili $\frac{x}{y} = \frac{x+2.6}{6.5}$ tj. $6.5x = xy + 2.6y$.

Zbog sličnosti je $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ ili $\frac{x+2.6-y}{y} = \frac{x}{6.5}$ tj. $6.5x + 16.9 - 6.5y = xy$.

Zapišemo jednadžbe tako da ih možemo izjednačiti.

$6.5x - xy = 2.6y$

$6.5x - xy = 6.5y - 16.9$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih jednadžbi dobivamo

$6.5y - 16.9 = 2.6y$, iz čega slijedi $y = \frac{169}{39} = \frac{13}{3}$.

Zamjenom dobivene vrijednosti za y u jednadžbi $\frac{x}{y} = \frac{x+2.6}{6.5}$, dobivamo

$$\frac{3x}{13} = \frac{x + 2.6}{6.5}.$$

Slijedi $19.5x = 13x + 33.8$, tj. $6.5x = 33.8$ i $x = 5.2$.
Zato je $|AC| = 5.2$ cm, a $|BC| = 7.8$ cm.

5. Za vrijeme doručka svaki je član obitelji u svoju šalicu natočio i kavu i mlijeko te je napravio točno 1.8 decilitra bijele kave. Za izradu bijele kave svatko je od njih pomiješao kavu i mlijeko u drukčijem omjeru. Jedan je od članova u svoju šalicu natočio jednu osminu ukupne količine kave i jednu petinu ukupne količine mlijeka. Koliko je članova obitelji moglo biti na doručku ako je obitelj popila svu kavu i svo mlijeko?

Prvo rješenje.
Označimo s $n \in \mathbb{N}$ broj članova obitelji.

Neka je k količina kave, a m količina mlijeka koju je u svoju šalicu natočio jedan od članova obitelji pa vrijedi $k + m = 1.8$.

Svaki član obitelji u svoju je šalicu natočio 1.8 dL bijele kave pa su svi članovi obitelji zajedno u svoje šalice natočili $1.8n$ dL bijele kave. Jedan od članova obitelji je u svoju šalicu natočio jednu osminu ukupne količine kave i jednu petinu ukupne količine mlijeka pa imamo $8k + 5m = 1.8n$.

Izrazimo količinu kave k ovisno o broju članova obitelji n.

Iz jednakosti $k + m = 1.8$ dobivamo $m = 1.8 - k$.

Uvrštavanjem dobivenog izraza jednakost $8k + 5m = 1.8n$ imamo:

$8k + 5(1.8 - k) = 1.8n$

$8k + 9 - 5k = 1.8n$

$3k = 1.8n - 9 \ /:3$

$k = 0.6n - 3$

Na sličan način izražavamo količinu mlijeka m ovisno o broju članova obitelji n te dobivamo

$m = 4.8 - 0.6n$

Svaki član obitelji je u svoju šalicu ulio i kavu i mlijeko pa je $k > 0$ i $m > 0$.

Stoga je $0.6n - 3 > 0$ i $4.8 - 0.6n > 0$.

Iz $0.6n - 3 > 0$ slijedi $0.6(n - 5) > 0$ pa je $n - 5 > 0, n > 5$.

Iz $4.8 - 0.6n > 0$ slijedi $0.6(8 - n) > 0$ pa je $8 - n > 0, n < 8$.

Dakle, broj osoba na doručku bi jedino mogao biti 6 ili 7.

Ako je na doručku bilo 6 osoba onda je:

$k = 0.6 \cdot 6 - 3 = 0.6$ dL i $m = 4.8 - 0.6 \cdot 6 = 1.2$ dL.

Dakle, jedan od članova obitelji natočio je 0.6 dL kave i 1.2 dL mlijeka.

Svi su članovi obitelji zajedno natočili 0.6 dL $\cdot$ 8 = 4.8 dL kave i 1.2 dL $\cdot$ 5 = 6 dL mlijeka.

Primjer moguće raspodijele kave i mlijeka za 6 osoba:

osoba	1.	2.	3.	4.	5.	6.	zbroj
količina kave (dL)	0.6	0.8	0.9	0.3	1.2	1	4.8
količina mlijeka (dL)	1.2	1	0.9	1.5	0.6	0.8	6

Ako je na doručku bilo 7 osoba onda je:

$k = 0.6 \cdot 7 - 3 = 1.2$ dL i $m = 4.8 - 0.6 \cdot 7 = 0.6$ dL.

Dakle, jedan od članova obitelji natočio je 1.2 dL kave i 0.6 dL mlijeka.

Svi su članovi obitelji zajedno natočili 1.2 dL $\cdot\, 8 = 9.6$ dL kave i 0.6 dL $\cdot\, 5 = 3$ dL mlijeka.

Primjer moguće raspodijele kave i mlijeka za 7 osoba:

osoba	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	zbroj
količina kave (dL)	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	0.9	9.6
količina mlijeka (dL)	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.9	3

Na doručku je zaista moglo biti ili 6 ili 7 osoba.

Drugo rješenje.
Neka je x ukupna količina kave, i neka je y ukupna količina mlijeka.

Jedan od članova je natočio $\frac{1}{8}$ ukupne količine kave i $\frac{1}{5}$ ukupne količine mlijeka i napravio 1.8 dL bijele kave. Iz toga slijedi:

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{5}y = 1.8.$$

Nakon množenja jednadžbe s 40 dobivamo:

$$5x + 8y = 72 \text{ odnosno } 5x = 72 - 8y.$$

Znamo da su svi članovi (označimo broj članova obitelji s n) napravili istu količinu bijele kave i popili svu kavu i svo mlijeko pa imamo:

$$x + y = 1.8 \cdot n \quad /\cdot 5$$

$$5x + 5y = 9n$$

Ako izrazimo n iz dane jednadžbe i uvrstimo gornji izraz za $5x$ dobivamo:

$$72 - 8y + 5y = 9n$$

$$9n = 72 - 3y \quad /:9$$

$$n = 8 - \frac{y}{3}$$

S obzirom da je n broj članova obitelji radi se o prirodnom broju, a x i y su količine kave i mlijeka za koje vrijedi $x > 0$, $y > 0$, vidimo da n mora biti manji od 8.

Za $n = 7$ slijedi: $y = 3$, $x = 9.6$

Primjer moguće raspodijele kave i mlijeka za 7 osoba:

osoba	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	zbroj
x…količina kave (dL)	1.2	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	3
y…količina mlijeka (dL)	0.6	1.75	1.65	1.55	1.45	1.35	1.25	9.6

Za $n = 6$ slijedi $y = 6,\ x = 4.8$.

Primjer moguće raspodijele kave i mlijeka za 6 osoba:

osoba	1.	2.	3.	4.	5.	6.	zbroj
x…količina kave (dL)	0.6	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	6
y…količina mlijeka (dL)	1.2	0.74	0.73	0.72	0.71	0.70	4.8

Za $n = 5$ slijedi $y = 9, x = 0$, što nije u skladu s uvjetima zadatka.

Za $n < 5$ dobivamo da je $x < 0$, što također nije u skladu s uvjetima zadatka.

Na doručku je bilo 6 ili 7 članova obitelji.

Treće rješenje.
Neka je k količina kave, a m količina mlijeka koju su popili svi članovi obitelji. Neka je n broj članova obitelji.

Vrijedi $k + m = 1.8n$.

Jedan od članova je u svoju šalicu natočio jednu osminu ukupne količine kave i jednu petinu ukupne količine mlijeka pa imamo

$$\frac{1}{8}k + \frac{1}{5}m = 1.8 \ /\cdot 40$$

$$5k + 8m = 72$$

Svaki član obitelji je u svoju šalicu ulio i kavu i mlijeko pa je $k > 0$ i $m > 0$.

Budući se spominje jedan od članova obitelji, obitelj broji najmanje dva člana tj. $n \geq 2$.

Iz gornjih jednadžbi vrijedi:

$$5(1.8n - m) + 8m = 72$$

$$3m = 72 - 9n \ /:3$$

$$m = 24 - 3n$$

Promotrimo moguće razdiobe kave i mlijeka u ovisnosti o broju članova obitelji.

n	$1.8n$	$m = 24 - 3n$	$k = 1.8n - m$	
2	3.6	18	-14.4	Ne zadovoljava uvjet zadatka $k > 0$.
3	5.4	15	-9.6	Ne zadovoljava uvjet zadatka $k > 0$.
4	7.2	12	-4.8	Ne zadovoljava uvjet zadatka $k > 0$.
5	9	9	0	Ne zadovoljava uvjet zadatka $k > 0$.
6	10.8	6	4.8	$k > 0, m > 0$ Na doručku je moglo biti 6 osoba.
7	12.6	3	9.6	$k > 0, m > 0$ Na doručku je moglo biti 7 osoba.
8	14.4	0	14.4	Ne zadovoljava uvjet zadatka $m > 0$.
9	16.2	-3	19.2	Ne zadovoljava uvjet zadatka $m > 0$.
10	18	-6	24	Ne zadovoljava uvjet zadatka $m > 0$.

Iz tablice se primjećuje da se povećanjem broja članova obitelji za 1 količina mlijeka smanjuje za 3 dL, a količina kave povećava za 4.8 dL.

Za svaki $2 \leq n \leq 5$ slijedi da je $k \leq\ 0$ što ne zadovoljava uvjet zadatka, a za svaki $n > 8$ slijedi da je $m <\ 0$ što ne zadovoljava uvjet zadatka.

Može se zaključiti da je za doručkom moglo biti 6 ili 7 članova obitelji.

Primjeri su navedeni u prvom i drugom rješenju.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Vodice, 22. – 24. travnja 2024.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Trojica radnika trebaju s jedne zajedničke hrpe rasporediti plastične sanduke na tri hrpe. Najprije Karlo sa zajedničke hrpe uzima određeni broj sanduka, $\frac{3}{4}$ stavlja na hrpu K, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe L i M. Zatim Luka sa zajedničke hrpe uzima određeni broj sanduka, $\frac{1}{4}$ stavlja na hrpu L, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe K i M. Na kraju Marko sa zajedničke hrpe uzima preostale sanduke, $\frac{1}{12}$ stavlja na hrpu M, a ostatak, ravnopravno, stavlja na hrpe K i L. Nakon svega je broj sanduka na hrpama K, L i M u omjeru $3 : 2 : 1$. Odredi najmanji mogući broj plastičnih sanduka na zajedničkoj hrpi prije svih premještanja.

Rješenje.
Označimo broj sanduka koje Karlo, Luka i Marko uzimaju sa zajedničke hrpe sa k, l i m, pri čemu je $k, l, m \in \mathbb{N}$. Potrebno je odrediti najmanji mogući zbroj $k + l + m$.

Prema uvjetu zadatka broj sanduka na hrpama K, L, M nakon svih premještanja sa zajedničke hrpe je u omjeru $3 : 2 : 1$. Neka je x broj sanduka na hrpi M nakon svih premještanja. Tada je

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{4}k + \frac{3}{8}l + \frac{11}{24}m &= 3x \\ \frac{1}{8}k + \frac{1}{4}l + \frac{11}{24}m &= 2x \\ \frac{1}{8}k + \frac{3}{8}l + \frac{1}{12}m &= x \end{aligned}\right\} (*)$$

Izrazimo li x iz prethodne tri jednadžbe

$$x = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}k + \frac{3}{8}l + \frac{11}{24}m\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}k + \frac{1}{4}l + \frac{11}{24}m\right) = \frac{1}{8}k + \frac{3}{8}l + \frac{1}{12}m$$

dobivamo sustav

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}l + \frac{11}{72}m &= \frac{1}{16}k + \frac{1}{8}l + \frac{11}{48}m \\ \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}l + \frac{11}{72}m &= \frac{1}{8}k + \frac{3}{8}l + \frac{1}{12}m \end{aligned}\right\}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} 27k - 11m &= 0 \\ 18k - 36l + 10m &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Iz prve jednadžbe je $k = \frac{11}{27}m$, iz druge je $l = \frac{13}{27}m$ pa m mora biti djeljiv s 27. Kako iz sustava $(*)$ vidimo da m mora biti djeljiv s 24, tada m mora biti djeljiv i sa $V(24, 27) = 216$, tj. $m \in \{216, 432, \ldots\}$.

Konačno, vrijednost zbroja $k + l + m = \frac{11}{27}m + \frac{13}{27}m + m = \frac{51}{27}m$ je najmanja moguća za najmanju vrijednost broja $m = 216$ i jednaka je $\frac{51}{27} \cdot 216 = 408$.

Dakle, najmanji mogući broj plastičnih sanduka na zajedničkoj hrpi prije svih premještanja je 408.

Napomena 1: Analogno, možemo promatrati k koji mora biti djeljiv s 8 i 11 pa mora biti djeljiv i s $V(8,11) = 88$, odnosno l koji mora biti djeljiv s 8 i 13 pa mora biti djeljiv i sa $V(8,13) = 104$ te izraziti zbroj $k + l + m$ pomoću jedne od tih nepoznanica.

Napomena 2: Izrazimo li k, l, m iz sustava $(*)$ pomoću x, dobivamo

$$k = \frac{22}{17}x, \qquad l = \frac{26}{17}x, \qquad m = \frac{54}{17}x \qquad (**)$$

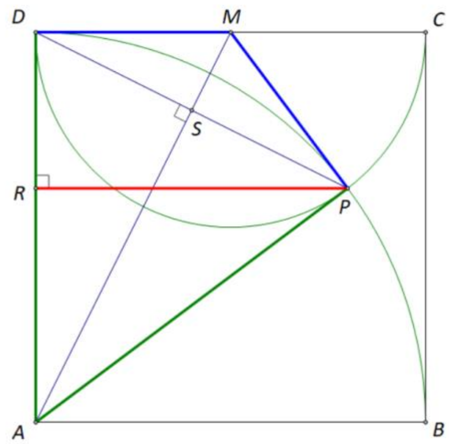
pa x mora biti djeljiv sa 17.

Uočimo iz $(*)$ da k i l moraju biti djeljivi s 8, a m mora biti djeljiv s 24. Tada, zbog $(**)$, x mora biti djeljiv i sa 4, tj. mora biti djeljiv s $V(17, 4) = 68$.
Konačno, vrijednost zbroja $k + l + m = \frac{22}{17}x + \frac{26}{17}x + \frac{54}{17}x = \frac{102}{17}x$ je najmanja moguća za najmanju vrijednost broja $x = 68$ i jednaka je $\frac{102}{17} \cdot 68 = 408$.

2. Točka M polovište je stranice $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ sa stranicom duljine 4. Kružnica sa središtem u točki M polumjera 2 i kružnica sa središtem u točki A polumjera 4 sijeku se u točkama D i P. Odredi udaljenost točke P od dužine $\overline{AD}$.

Prvo rješenje.
Neka je k_M kružnica sa središtem u točki M radijusa 2 i neka je k_A kružnica sa središtem u točki A radijusa 4. Točke D i P pripadaju kružnici k_M pa je $|MD| = |MP|$. Točke D i P pripadaju kružnici k_A pa je $|AD| = |AP|$. Stoga je četverokut $APMD$ deltoid pa su mu dijagonale međusobno okomite, tj. $\overline{AM} \perp \overline{DP}$ i dijagonala $\overline{AM}$ raspolavlja dijagonalu $\overline{DP}$. Označimo li sa S sjecište dijagonala $\overline{AM}$ i $\overline{PD}$, slijedi $|DS| = |SP|$.

Neka je R nožište visine iz vrha P u trokutu APD. Kako bismo odredili udaljenost točke P od dužine $\overline{AD}$, potrebno je odrediti duljinu dužine $\overline{PR}$.



Promotrimo pravokutan trokut AMD. Dužina $\overline{AM}$ je hipotenuza, duljine kateta su 4 i 2 pa je

$$|AM| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}.$$

Površina trokuta AMD je $P_{\Delta AMD} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Duljinu visine $\overline{SD}$ na stranicu $\overline{AM}$ trokuta AMD dobivamo iz

$$P_{\Delta AMD} = \frac{|AM| \cdot |SD|}{2}.$$

Uvrštavanjem $P_{\Delta AMD} = 4$ i $|AM| = \sqrt{20}$, te sređivanjem dobivamo $|SD| = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Slijedi $|PD| = 2 \cdot |SD| = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

Promotrimo pravokutan trokut ASD. Primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AS| = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Površina trokuta APD je

$$P_{\Delta APD} = \frac{|AS| \cdot |PD|}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{32}{5}.$$

Dužina $\overline{PR}$ je visina trokuta APD na stranicu $\overline{AD}$, pa je

$$\frac{32}{5} = P_{\Delta APD} = \frac{|AD| \cdot |PR|}{2} = \frac{4 \cdot |PR|}{2}$$

iz čega slijedi

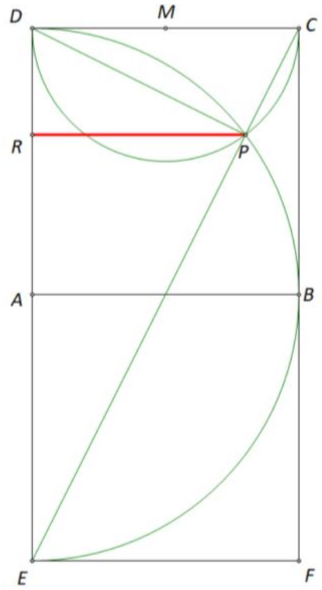
$$|PR| = \frac{16}{5}.$$

Napomena 1: Znajući da je četverokut $APMD$ deltoid (pa je $\overline{AM} \perp \overline{DP}$ i $|DS| = |SP|$) te da je $|AM| = \sqrt{20}$, možemo promatrati pravokutne trokute AMD, DCP i PDR. Kako je $\measuredangle MAD \cong \measuredangle CDP \cong \measuredangle DPR$ (kutovi s okomitim kracima), trokuti su slični (KK poučak).

Tada je $\frac{|PD|}{|CD|} = \frac{|DA|}{|MA|}$, tj. $|PD| = \frac{4 \cdot 4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

Također, vrijedi $\frac{|RP|}{|DP|} = \frac{|DA|}{|MA|}$, tj. $|PR| = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{16}{5}$.

Drugo rješenje.



Nadopunimo kvadrat $ABCD$ kvadratom $EFBA$. Dužina $\overline{CE}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta CDE s katetama duljine 4 i 8 pa je

$$|CE| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}.$$

Točka P pripada kružnici sa središtem u točki A i promjerom $\overline{DE}$ pa je $|\measuredangle DPE| = 90°$ (Talesov poučak), tj. dužina $\overline{DP}$ je visina trokuta CDE. Slijedi

$$\frac{|CD| \cdot |DE|}{2} = P_{\Delta CDE} = \frac{|CE| \cdot |DP|}{2}.$$

Uvrštavanjem poznatih duljina dobivamo

$$\frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot |DP|}{2},$$

iz čega slijedi

$$|DP| = \frac{32}{\sqrt{80}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Dužina $\overline{PE}$ je kateta pravokutnog trokuta DEP s katetom duljine $\frac{8}{\sqrt{5}}$ i hipotenuzom duljine 8 pa je

$$|PE| = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{64}{5}} = \sqrt{\frac{256}{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

Dužina $\overline{PR}$ je visina pravokutnog trokuta DEP. Slijedi

$$\frac{|DP| \cdot |PE|}{2} = P_{\Delta DEP} = \frac{|DE| \cdot |PR|}{2}.$$

Sada vrijedi

$$\frac{\frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{16}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{8 \cdot |PR|}{2},$$

odnosno

$$|PR| = \frac{16}{5}.$$

Napomena 2: Nakon što odredimo da je $|CE| = \sqrt{80}$ i $|PE| = \frac{16}{\sqrt{5}}$, možemo promatrati trokute DEC i REP. To su pravokutni trokuti sa zajedničkim kutom pri vrhu E, pa su slični (KK poučak). Tada je $\frac{|CD|}{|CE|} = \frac{|PR|}{|PE|}$, tj.

$$\frac{4}{\sqrt{80}} = \frac{|PR|}{\frac{16}{\sqrt{5}}}$$

i, konačno, $|PR| = \frac{16}{5}$.

3. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $3m^2 - 7n^2 = 9$.

Rješenje.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $3m^2 - 7n^2 = 9$. Kako je

$$7n^2 = 3m^2 - 9$$

$$7n^2 = 3(m^2 - 3)$$

mora biti $n = 3l,\ l \in N$. Tada, uvrštavanjem u početnu jednadžbu, dobivamo

$$3m^2 - 7 \cdot (3l)^2 = 9$$

$$m^2 - 21l^2 = 3$$

$$m^2 = 3(1 + 7l^2)$$

Zaključujemo da mora biti i $m = 3k,\ \ k \in N$ pa uvrštavanjem u $m^2 - 21l^2 = 3$ dobivamo

$$(3k)^2 - 21l^2 = 3$$

$$3k^2 - 7l^2 = 1.$$

Promatrat ćemo ostatke pri dijeljenju lijeve i desne strane jednadžbe brojem 3.

Najprije dokažimo da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1.

Neka je $x \in \mathbb{N}$. Pri dijeljenju broja x s 3, mogući su ostaci $0, 1, 2$.

- Ako je $x = 3k$, tada je ostatak pri dijeljenju izraza $(3k)^2$ s 3 jednak 0.
- Ako je $x = 3k + 1$, tada je ostatak pri dijeljenju izraza $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ s 3 jednak 1.
- Ako je $x = 3k + 2$, tada je ostatak pri dijeljenju izraza $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ s 3 jednak 1.

Promotrimo sada ponovno jednadžbu $3k^2 - 7l^2 = 1$.

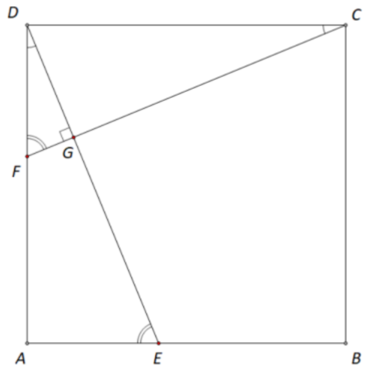
Broj $3k^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. Broj l^2 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1, $2l^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 2 pa onda i broj $-7l^2 = -9l^2 + 2l^2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 2.

Dakle, izraz $3k^2 - 7l^2$ s lijeve strane jednadžbe daje ostatak 0 ili 2 pri dijeljenju s 3, a, kako je desna strana jednadžbe 1, ostatak pri dijeljenju s 3 jednak je 1. To je u suprotnosti s početnom pretpostavkom.

Dakle, ne postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $3m^2 - 7n^2 = 9$, što je i trebalo dokazati.

4. Točke E i F odabrane su redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$, pri čemu vrijedi $|AE| = |DF|$. Točka G sjecište je dužina $\overline{CF}$ i $\overline{DE}$. Dokaži da je $|\measuredangle CEF| = |\measuredangle AGB|$.

Rješenje.
Kako je $|AD| = |CD|$, $|AE| = |DF|$ i $|\measuredangle EAD| = |\measuredangle FDC| = 90°$, trokut AED i trokut CDF su međusobno sukladni (SKS poučak) pravokutni trokuti. Stoga je i u trokutu FGD zbroj mjera šiljastih kutova $90°$ pa je $|\measuredangle DGF| = 90°$. Time smo pokazali da je $\overline{CF} \perp \overline{DE}$.

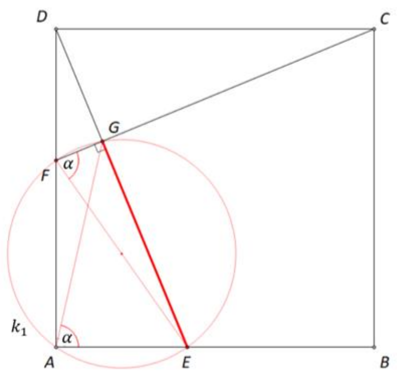


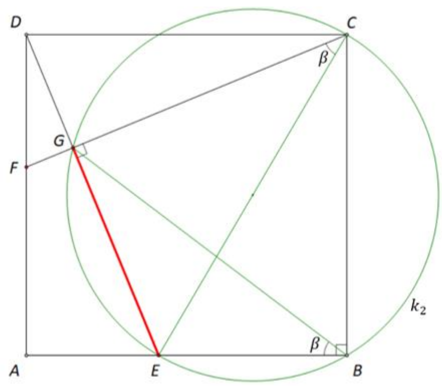
Kako je $|\measuredangle EAF| = |\measuredangle FGE| = 90°$, četverokutu $AEGF$ može se opisati kružnica k_1 sa središtem u polovištu dijagonale $\overline{EF}$ (Talesov poučak). Tada su obodni kutevi nad tetivom $\overline{EG}$ kružnice k_1 međusobno sukladni.

Neka je $|\measuredangle EAG| = |\measuredangle EFG| = \alpha$.

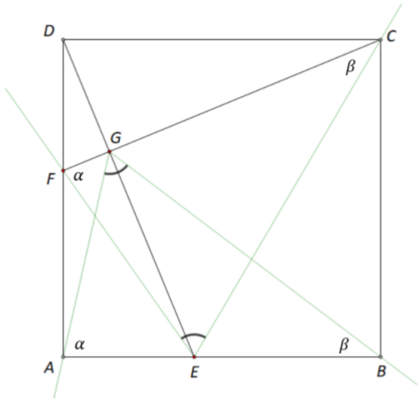
Kako je $|\measuredangle CBE| = |\measuredangle EGC| = 90°$, četverokutu $EBCG$ se može opisati kružnica k_2 sa središtem u polovištu dijagonale $\overline{CE}$ (Talesov poučak). Tada su obodni kutevi nad tetivom $\overline{EG}$ kružnice k_2 međusobno sukladni.

Neka je $|\measuredangle GBE| = |\measuredangle GCE| = \beta$.





Promotrimo sada ΔFEC i ΔABG.



Trokuti se podudaraju u dva unutarnja kuta pa je i $|\measuredangle CEF| = |\measuredangle AGB|$, što je i trebalo dokazati.

5. Na koliko različitih načina možemo u polja tablice s tri retka i tri stupca upisati sve prirodne brojeve od 1 do 9, po jedan broj u svako polje, tako da je zbroj brojeva u svakom retku djeljiv s 3, a zbroj brojeva ni u jednom stupcu nije djeljiv s 3?

Rješenje.
Trebamo odrediti broj tablica koje zadovoljavaju uvjete zadatka. Nazovimo te tablice „prave tablice".

U tablice, za koje je uvjet zadatka zadovoljen, ćemo umjesto brojeva $1, 2, \dots, 9$ upisivati ostatke tih brojeva pri dijeljenju s 3, tj, brojeve 0, 1 i 2. Nazovimo te tablice „tablice ostataka".

Kako među brojevima $1, 2, \dots, 9$ imamo po tri broja s određenim ostatkom pri dijeljenju s 3 ($3, 6, 9$ daju ostatak nula; $1, 4, 7$ daju ostatak jedan; $2, 5, 8$ daju ostatak dva), u svakoj ćemo „tablici ostataka" imati točno tri broja 0, tri broja 1 i tri broja 2.

Pri tome na mjestu tri broja 0 možemo upisati brojeve 3, 6 i 9 na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina, a na jednako toliko načina na mjestu tri broja 1 možemo upisati brojeve $1, 4$ i 7 te na mjestu tri broja 2 brojeve $2, 5$ i 8. Tako za svaku „tablicu ostataka" možemo dobiti $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ „pravih tablica" s brojevima $1, 2, \dots, 9$.

Zbroj brojeva u retku je djeljiv s 3 ako i samo ako:

- sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 (tri nule u retku, tri jedinice u retku ili tri dvojke u retku)
- sva tri broja daju različit ostatak pri dijeljenju s 3 (u retku je točno po jedna nula, jedinica i dvojka).

Stoga zbroj brojeva u stupcu nije djeljiv s 3 ako i samo ako točno dva broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 (točno po dvije nule, dvije jedinice ili dvije dvojke).

Ako u nekom retku sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3, onda to mora vrijediti i za preostala dva retka. Ali tada se u svakom stupcu nalaze različiti ostatci pri dijeljenju s 3 pa taj slučaj nije moguć.

Zato su jedini mogući slučajevi upisivanja brojeva u „tablice ostataka" koji udovoljavaju uvjetima zadatka oni u kojima:

- je u svakom retku točno po jedna nula, jedinica i dvojka
- su u svakom stupcu točno po dvije nule, dvije jedinice ili dvije dvojke.

Do na zamjene redaka i stupaca to su sljedeći slučajevi:

0	1	2
0	1	2
1	2	0

0	1	2
0	1	2
2	0	1

S obzirom da gore prikazani treći redak u oba slučaja može biti prvi ili drugi, za svaki od ova dva slučaja za „tablice ostataka“ imamo još po 3 nove tablice, a za sve takve tablice, stupce možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. Zato je ukupni broj različitih „tablica ostataka“ jednak $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$.

Ukupan broj „pravih tablica“, tj. tablica koje zadovoljavaju uvjete zadatka, jednak je

$$216 \cdot 36 = 7776.$$