Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

1. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $(a+b)^4+(a-b)^4=4112$ i $a^2-b^2=16$. Izračunaj a^2+b^2.

2. Odredi najveći cijeli broj a za koji su rješenja jednadžbe $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{2x+1}=0$

(a) realni brojevi

(b) racionalni brojevi.

3. Ako se pozitivnom cijelom broju prva znamenka pomakne s prvog mjesta na zadnje, dobiveni će broj biti tri puta veći od polaznog. Odredi najmanji takav broj.

4. Ante voli geometrijske mozgalice. Od devet kvadrata kojima su duljine stranica 1 cm, 4 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 14 cm, 15 cm i 18 cm, Ante treba složiti pravokutnik bez preklapanja i praznina. Ante je pronašao samo jedan takav pravokutnik. Na koji je način Ante složio dobiveni pravokutnik? Obrazloži zašto je njegovo rješenje jedinstveno. (Sva rješenja dobivena osnom simetrijom pravokutnika oko njegovih osi simetrije ili rotacijom oko središta smatramo jednakim).

5. Odredi sve realne brojeve a za koje će jednadžba $||2x-6|-a|=7-x$ imati maksimalan broj rješenja.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

1. Odredi sve realne brojeve p za koje je razlika rješenja jednadžbe $x(x+4)+p^2(1-x)=13$ jednaka 6.

2. Dokaži da je $\sqrt{\overline{11\ldots11}-\overline{22\ldots22}}=\overline{33\ldots33}$, pri čemu je znamenka 1 zapisana 2024 puta, a znamenke 2 i 3 zapisane su 1012 puta.

3. Koliko ima uređenih parova realnih brojeva (x,y) za koje vrijedi

$$\begin{cases} x^2+3y=9 \\ (|x|+|y|-4)^2=1? \end{cases}$$

4. Četverokutu $ABCD$ opisana je kružnica. Neka je točka M na stranici $\overline{DC}$ takva da trokut ADM i četverokut $ABCM$ imaju jednake opsege i jednake površine. Pokaži da četverokut $ABCD$ ima najmanje dvije stranice jednake duljine.

5. Neka je $s(n)$ zbroj znamenaka prirodnog broja n zapisanog u dekadskom sustavu. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$n-3s(n)=2024.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

1. Biolozi su prvi dan svake godine počevši od 2004. bilježili populaciju zečeva i vjeverica na nekom području. Primijetili su da se njihov broj mijenja eksponencijalno i to tako da se broj zečeva svake četiri godine uveća za 50 %, a broj vjeverica svakih pet godina umanji za 25 %. Ukupan broj vjeverica i zečeva 2024. godine na tom području iznosio je 1458. Ako je 2004. godine bilo 608 vjeverica više nego zečeva, dokaži da je 2014. godine zabilježen veći broj zečeva nego vjeverica.

2. Riješi jednadžbu $\log_{2\sin 2x}(2\sin x) \cdot \log_{2\sin 2x}(2\cos x) = \dfrac{1}{4}$.

3. Mjera jednog kuta trokuta iznosi 60°. Odredi opseg tog trokuta ako mu je polumjer opisane kružnice duljine $2\sqrt{3}$ cm, a polumjer upisane kružnice duljine $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

4. Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AB}$ označena je točka P tako da vrijedi $\overrightarrow{AP} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, a na dužini $\overline{CP}$ označena je točka S tako da vrijedi $2\overrightarrow{CS} = 3\overrightarrow{SP}$. Ako je točka T presjek pravaca AC i BS, odredi omjer u kojemu ta točka dijeli dužinu $\overline{AC}$.

5. Četiri crvene, dvije plave i tri žute kuglice treba rasporediti u staklenu, drvenu, metalnu i plastičnu posudu. Na koliko je to načina moguće učiniti ako ni u jednoj posudi plave i žute kuglice ne smiju biti zajedno?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

1. Ako za realne brojeve a, b, c, d i za svaki prirodan broj $n \geqslant 4$ vrijedi jednakost

$$\frac{a}{3}\binom{n}{1}+b\binom{n}{2}+c\binom{n}{3}+d\binom{n}{4}=n^4+\frac{253}{3}n^3$$

odredi za koji prirodni broj m vrijedi $\dfrac{b+d-c}{\sqrt[m]{a}}=1$?

2. Zadane su funkcije $f(x)=x^{\log_{2024} x}$, $g(x)=\log_{2024}\left(2\sqrt{506}\cdot x\right)$ i $h(x)=2x-1$, pri čemu je $x>0, x\neq 1$. Odredi umnožak svih rješenja jednadžbe $(g\circ f)(x)=(h\circ g)(x)$.

3. Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvaput je dulja od stranice $\overline{BC}$. Točka F polovište je stranice $\overline{BC}$, a točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$ tako da je $\left|\overline{AE}\right| : \left|\overline{EB}\right| = 2:1$. Stranica $\overline{AD}$ podijeljena je na 7 jednakih dijelova, a stranica $\overline{CD}$ na n jednakih dijelova. Točka G jedna je od djelišnih točaka stranice $\overline{AD}$, a točka H jedna od djelišnih točaka stranice $\overline{CD}$. Odredi najmanji prirodan broj n za koji će pravci EG i FH biti paralelni.

4. U nekoj se igri na sreću iz bubnja sa zelenim i plavim kuglicama istovremeno izvlače dvije kuglice. Igrač će ostvariti dobitak ako izvuče kuglice različitih boja, a vjerojatnost dobitka iznosi 0.25.

a) Ako u bubnju ima 7 plavih kuglica, koliko ima zelenih?

b) Luka igru ponavlja sve dok ne ostvari dobitak, pri čemu nakon svakog ponavljanja izvučene kuglice vraća u bubanj. Vjerojatnost da Luka igru završi u najviše $2k$ ponavljanja $\frac{1267}{1024}$ je puta veća od vjerojatnosti da igru završi u najviše k ponavljanja. Odredi broj k.

5. U šiljastokutnom trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a trokutu opisanu kružnicu u točki E različitoj od točke A. Ortogonalne projekcije točke D na stranice AB i AC redom su točke F i G. Dokaži da je površina četverokuta $AFEG$ jednaka površini trokuta ABC.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.