DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

Zadatak B-1.1.

Neka su a i b realni brojevi takvi da je $(a+b)^4+(a-b)^4=4112$ i $a^2-b^2=16$. Izračunaj a^2+b^2.

Rješenje.

Izraz $(a+b)^4+(a-b)^4$ možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}(a+b)^4+(a-b)^4&=\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]^2-2(a+b)^2\cdot(a-b)^2\\&=\left[2a^2+2b^2\right]^2-2\left((a+b)\cdot(a-b)\right)^2\\&=4\left(a^2+b^2\right)^2-2(a^2-b^2)^2.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $4\left(a^2+b^2\right)^2-2(a^2-b^2)^2=4112$.
Budući da je $a^2-b^2=16$, slijedi da je $4(a^2+b^2)^2-2\cdot16^2=4112$,
odnosno $4(a^2+b^2)^2=4112+512=4624$.
Tada je $(a^2+b^2)^2=1156$ pa je tražena vrijednost jednaka $a^2+b^2=34$.

Zadatak B-1.2.

Odredi najveći cijeli broj a za koji su rješenja jednadžbe $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{2x+1}=0$

(a) realni brojevi

(b) racionalni brojevi.

Rješenje.

Iz zadane jednadžbe zaključujemo da je $x\neq-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$ i $a\neq0$.

Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{ax}$, odnosno $\dfrac{4x}{4x^2-1}=\dfrac{1}{ax}$.

Tada je $4x^2-1=4ax^2$. Slijedi da je $x^2=\dfrac{1}{4(1-a)}$.

Odavde zaključujemo da će rješenja zadane jednadžbe biti realni brojevi ako je $1-a>0$, tj. $a<1$.
U tom slučaju, budući da je $a\neq0$, ispunjeni su uvjeti da je $x\neq-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$. Stoga zaključujemo da je najveći cijeli broj a za koji su rješenja dane jednadžbe realni brojevi jednak $a=-1$.
Da bi rješenja polazne jednadžbe bili racionalni brojevi pored uvjeta da je $a<1$ i $a\neq0$ mora vrijediti i da je broj $1-a$ potpuni kvadrat.
Iz $1-a=1$ slijedi da je $a=0$ što ne može biti.
Dakle, najveći cijeli broj a za koji su rješenja jednadžbe racionalni brojevi dobit ćemo ako je $1-a=4$. Konačno dobivamo $a=-3$.

Zadatak B-1.3.

Ako se pozitivnom cijelom broju prva znamenka pomakne s prvog mjesta na zadnje, dobiveni će broj biti tri puta veći od polaznog. Odredi najmanji takav broj.

Rješenje.

Neka najmanji broj x s navedenim svojstvom ima n znamenki. Tada ga možemo zapisati u obliku $x = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$, pri čemu su $a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ i $a_1 \neq 0$.
Nakon što pomaknemo prvu znamenku na zadnje mjesto dobivamo broj
$x' = a_2 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + ... + a_n \cdot 10 + a_1$.
Broj x' možemo zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}
x' &= a_2 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + ... + a_n \cdot 10 + a_1 \\
&= 10 \cdot (a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + ... + a_n) + a_1 \\
&= 10 \cdot (x - a_1 \cdot 10^{n-1}) + a_1 \\
&= 10x + a_1 - a_1 \cdot 10^n
\end{aligned}$$

Iz $x' = 3x$ dobivamo da je $10x + a_1 - a_1 \cdot 10^n = 3x$, odnosno $7x = a_1 \cdot (10^n - 1)$, odakle zaključujemo da je $x = \dfrac{a_1 \cdot (10^n - 1)}{7}$.
Ako je $a_1 = 7$ dobivamo da je $x = 10^n - 1 = \underbrace{99...9}_{n \text{ devetki}}$, te premjestimo li prvu znamenku na zadnje mjesto dobit ćemo isti broj, a ne tri puta veći što je uvjet zadatka. Dakle, zaključujemo da broj $10^n - 1$ mora biti djeljiv sa 7.
Direktnom provjerom nalazimo da je najmanji broj n za koji je broj $10^n - 1$ djeljiv sa 7 broj $n = 6$.
Dakle, najmanji pozitivan cijeli broj koji ima svojstvo da se premještanjem njegove prve znamenke na zadnje mjesto dobije tri puta veći broj je broj $x = \dfrac{1 \cdot (10^6 - 1)}{7} = 142857$.

Zadatak B-1.4.

Ante voli geometrijske mozgalice. Od devet kvadrata kojima su duljine stranica 1 cm, 4 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 14 cm, 15 cm i 18 cm, Ante treba složiti pravokutnik bez preklapanja i praznina. Ante je pronašao samo jedan takav pravokutnik. Na koji je način Ante složio dobiveni pravokutnik? Obrazloži zašto je njegovo rješenje jedinstveno. (Sva rješenja dobivena osnom simetrijom pravokutnika oko njegovih osi simetrije ili rotacijom oko središta smatramo jednakim).

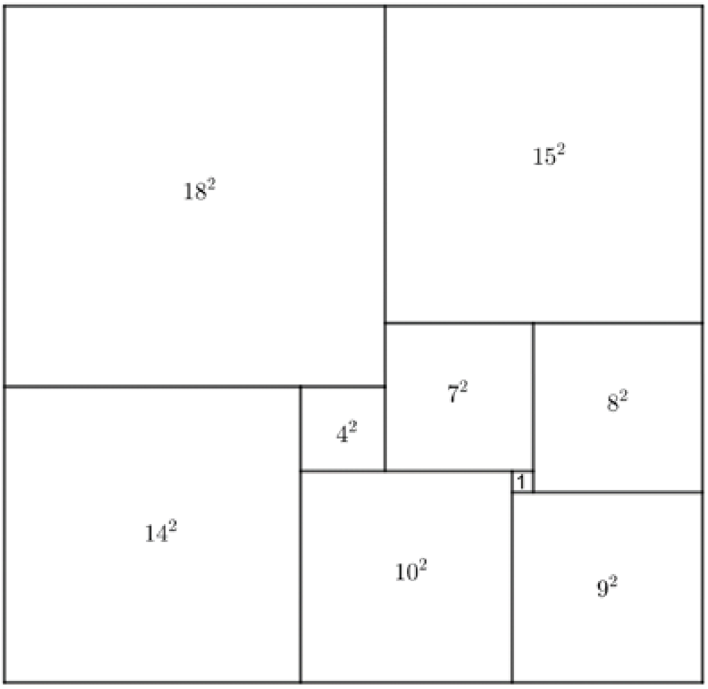
Rješenje.

Površina pravokutnika treba biti jednaka zbroju površina svih kvadrata,
$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2$, tj. 1056 cm^2.
Broj 1056 se može faktorizirati kao $1056 = 2^5 \cdot 3 \cdot 11$ pa iz danog rastava lako čitamo moguće duljine stranica traženog pravokutnika. Očito stranica pravokutnika ne može biti manja od 18 cm. Uzimanjem toga uvjeta u obzir ostaju tri mogućnosti:

1. $1056 = 22 \cdot 48$
2. $1056 = 24 \cdot 44$

3. $1056 = 32 \cdot 33$

Budući da postoji po jedan kvadrat odgovarajućih veličina zaključujemo da kvadrat stranice duljine 18 cm mora biti u kutu pravokutnika.
Mogućnosti $22 \cdot 48$ i $24 \cdot 44$ ne odgovaraju jer ako kvadrat sa stranicom duljine 18 cm smjestimo u jedan kut pravokutnika, ostaje iznad ili ispod njega pruga širine ne veće od 6 cm koja se ne može popuniti raspoloživim kvadratima.
Dakle, jedina mogućnost je $32 \cdot 33$ pa je rješenje zadatka jedinstveno (rotacija s obzirom na središte pravokutnika ili osna simetrija s obzirom na osi simetrije pravokutnika se ne računaju kao nova rješenja).
Sad se lako napravi skica.



Zadatak B-1.5.

Odredi sve realne brojeve a za koje će jednadžba $||2x-6|-a| = 7-x$ imati maksimalan broj rješenja.

Rješenje.

Uočimo da će zadana jednadžba općenito imati rješenje, odnosno maksimalan broj rješenja samo ako je $7-x>0$, odnosno za $x<7$. (*)
Promotrimo sljedeća dva slučaja.
Prvi slučaj, ako je $x \leqslant 3$.
Tada je $|2x-6| = -2x+6$ pa vrijedi $|-2x+6-a| = 7-x$. Ako je $7-x>0$, dvije su mogućnosti: $-2x+6-a = 7-x$ ili $-2x+6-a=-7+x$. Ove obje jednadžbe moraju imati rješenje x, $x \leqslant 3$.
Rješenje prve jednadžbe je $x=-1-a$. Tada je $-1-a \leqslant 3$. Dakle, ako je $a \geqslant -4$ jedno rješenje dane jednadžbe jest $x=-1-a$.
Rješenje druge jednadžbe, $-2x+6-a=-7+x$ je $x=\dfrac{13-a}{3}$. Tada je $\dfrac{13-a}{3} \leqslant 3$. Dakle,

ako je $a \geqslant 4$ dobivamo još jedno rješenje zadane jednadžbe.
Promotrimo sad drugi slučaj, za $x > 3$, odnosno zbog uvjeta (*) za $3 < x < 7$.
Tada je $|2x - 6| = 2x - 6$, odnosno rješavamo jednadžbu $|2x - 6 - a| = 7 - x$.
Kao i u prvom slučaju imamo dvije mogućnosti: $2x - 6 - a = 7 - x$ ili $2x - 6 - a = -7 + x$.
Rješenje prve jednadžbe je $x = \dfrac{13 + a}{3}$. Provjerimo za koje će realne brojeve a ovo rješenje zadovoljavati uvjet $3 < x < 7$. Slijedi redom:

$$\begin{aligned} 3 < &\frac{13 + a}{3} < 7 \\ -4 < &\, a < 8 \end{aligned}$$

Dakle, ako je $-4 < a < 8$ dobivamo jedno rješenje zadane jednadžbe, $x = \dfrac{13 + a}{3}$.
Rješenje druge jednadžbe, $2x - 6 - a = -7 + x$, jest $x = -1 + a$. Tada iz $3 < -1 + a < 7$, slijedi da će zadana jednadžba imati još jedno rješenje uz uvjet $4 < a < 8$.
Konačno, maksimalan broj rješenja koje zadana jednadžba može imati jest 4 uz uvjet da za realni broj a vrijedi:

$$\begin{aligned} a &\geqslant -4 \\ a &\geqslant 4 \\ -4 < a &< 8 \\ 4 < a &< 8 \end{aligned}$$

Očito je rješenje ovog sustava interval $\langle 4, 8\rangle$, odnosno zadana jednadžba ima maksimalan broj rješenja ako je realan broj $a \in \langle 4, 8\rangle$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

Zadatak B-2.1.

Odredi sve realne brojeve p za koje je razlika rješenja jednadžbe $x(x+4)+p^2(1-x)=13$ jednaka 6.

Rješenje.

Uočimo da je zadana jednadžba kvadratna te da se može zapisati u obliku

$$x^2 - x(p^2-4) + p^2 - 13 = 0.$$

Primijenimo li uvjet iz zadatka te Vièteove formule, dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = p^2 - 4 \\ x_1 \cdot x_2 = p^2 - 13. \end{cases}$$

Zbrojimo li prve dvije jednadžbe dobivamo $x_1 = \frac{p^2+2}{2}$, a uvrstimo li taj izraz u drugu jednadžbu slijedi da je $x_2 = \frac{p^2-10}{2}$.
Ako sada izraze za x_1, x_2 uvrstimo u treću jednadžbu sustava, dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$\frac{p^2+2}{2} \cdot \frac{p^2-10}{2} = p^2 - 13,$$

odnosno nakon sređivanja

$$p^4 - 12p^2 + 32 = 0.$$

Tada je $p^2 = 4$ i $p^2 = 8$. Konačno, traženi brojevi p su $-\sqrt{8}$, -2, 2 i $\sqrt{8}$.

Zadatak B-2.2.

Dokaži da je $\sqrt{\overline{11\ldots11} - \overline{22\ldots22}} = \overline{33\ldots33}$, pri čemu je znamenka 1 zapisana 2024 puta, a znamenke 2 i 3 zapisane su 1012 puta.

Prvo rješenje.

Broj $\overline{22\ldots22}$ zapišimo kao $2\cdot\overline{11\ldots11}$, s 1012 jedinica, a broj $\overline{11\ldots11}$ s 2024 jedinice zapišimo kao $\overline{11\ldots1100\ldots00}+\overline{11\ldots11}$ pri čemu je u prvom broju 1012 jedinica i 1012 nula, a u drugom je 1012 jedinica.

Tada redom slijedi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\overline{11\ldots11}-\overline{22\ldots22}} &= \sqrt{\overline{11\ldots1100\ldots00}+\overline{11\ldots11}-2\cdot\overline{11\ldots11}} = \\
&= \sqrt{\overline{11\ldots1100\ldots00}-\overline{11\ldots11}} \text{ (1012 jedinica i 1012 nula)} = \\
&= \sqrt{\overline{11\ldots11}\cdot 10^{1012}-\overline{11\ldots11}} = \\
&= \sqrt{\overline{11\ldots11}\cdot(10^{1012}-1)} = \\
&= \sqrt{\overline{11\ldots11}\cdot\overline{99\ldots99}} \text{ (1012 jedinica i 1012 devetki)} = \\
&= \sqrt{\overline{11\ldots11}\cdot 9\cdot\overline{11\ldots11}} = \\
&= 3\cdot\overline{11\ldots11} = \overline{33\ldots33} \text{ (1012 trojki)},
\end{aligned}$$

što je i trebalo dobiti.

Drugo rješenje.

Za broj koji se sastoji od 2024 jedinice vrijedi

$$\overline{11\ldots11} = \frac{\overline{99\ldots99}}{9} = \frac{10^{2024}-1}{9}.$$

Analogno, za brojeve koji se sastoje od 1012 dvojki, odnosno trojki, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overline{22\ldots22} &= 2\cdot\frac{\overline{99\ldots99}}{9} = 2\cdot\frac{10^{1012}-1}{9}, \\
\overline{33\ldots33} &= 3\cdot\frac{\overline{99\ldots99}}{9} = 3\cdot\frac{10^{1012}-1}{9} = \frac{10^{1012}-1}{3}.
\end{aligned}$$

Tada redom slijedi:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\overline{11\ldots11}-\overline{22\ldots22}} &= \sqrt{\frac{10^{2024}-1}{9}-2\cdot\frac{10^{1012}-1}{9}} = \\
&= \sqrt{\frac{10^{2024}-1-2\cdot10^{1012}+2}{9}} = \sqrt{\frac{10^{2024}-2\cdot10^{1012}+1}{9}} = \\
&= \sqrt{\frac{(10^{2012}-1)^2}{9}} = \frac{10^{1012}-1}{3} = \overline{33\ldots33}\,.
\end{aligned}$$

Time je dana tvrdnja dokazana.

Zadatak B-2.3.

Koliko ima uređenih parova realnih brojeva (x,y) za koje vrijedi

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+3y=9 \\ (|x|+|y|-4)^2=1? \end{array}\right.$$

Prvo rješenje.

Iz druge jednadžbe zadanog sustava slijedi da je

$$|x|+|y|-4=-1 \text{ ili } |x|+|y|-4=1,$$

odnosno $|x|=3-|y|$ ili $|x|=5-|y|$. Uočimo da iz $|x|\geqslant 0$ u prvom slučaju slijedi $|y|\leqslant 3$, a u drugom slučaju $|y|\leqslant 5$.

Budući da je $x^2=|x|^2$, nakon što uvrstimo dobivene izraze za $|x|$ u prvu jednadžbu danog sustava slijedi da je

$$(3-|y|)^2+3y=9 \text{ ili } (5-|y|)^2+3y=9.$$

Riješimo prvo jednadžbu $(3-|y|)^2+3y=9$, pri čemu je $|y|\leqslant 3$.

Ako je $y\leqslant 0$, tada je $|y|=-y$, pa ova jednadžba nakon sređivanja prelazi u $y^2+9y=0$ čija rješenja su 0 i -9. No, kako je $|y|\leqslant 3$, jedino moguće rješenje je $y=0$. Tada je $|x|=3$, odnosno $x=-3$ ili $x=3$ pa dobivamo dva rješenja početnog sustava: $(-3,0)$ i $(3,0)$.

Ako je $y>0$ tada je $|y|=y$ pa jednadžba $(3-|y|)^2+3y=9$ nakon sređivanja prelazi u $y^2-3y=0$ čija su rješenja 0 i 3. Budući da je $y>0$, rješenje je $y=3$. Slijedi da je $|x|=0$, pa je $(0,3)$ jedno rješenje početnog sustava.

Riješimo drugi slučaj, odnosno jednadžbu $(5-|y|)^2+3y=9$, pri čemu je $|y|\leqslant 5$.

Ako je $y\leqslant 0$ tada prethodna jednadžba prelazi u $y^2+13y+16=0$ čija su rješenja $y_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{105}}{2}$, od kojih je jedino moguće rješenje $\frac{-13+\sqrt{105}}{2}$. Tada je $|x|=5-|y|=\frac{-3+\sqrt{105}}{2}$, odnosno $x=\frac{-3+\sqrt{105}}{2}$ ili $x=\frac{3-\sqrt{105}}{2}$ pa dobivamo dva rješenja (x,y) početnog sustava.

Ako je $y>0$, jednadžba $(5-|y|)^2+3y=9$ prelazi u jedndadžbu $y^2-7y+16=0$ koja nema realnih rješenja.

Konačno, postoji ukupno 5 uređenih parova (x,y) realnih brojeva koji su rješenja zadanog sustava jednadžbi.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju iz druge jednadžbe zadanog sustava slijedi da je

$$|x|+|y|-4=-1 \text{ ili } |x|+|y|-4=1.$$

Dakle, dani sustav svodimo na dva nova sustava jednadžbi:

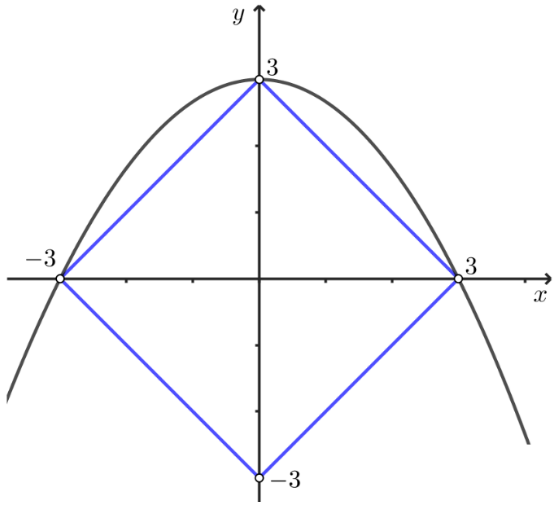
$$\left\{\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x^2+3 \\ |x|+|y|=3 \end{array}\right. \text{ i } \left\{\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x^2+3 \\ |x|+|y|=5 \end{array}\right. .$$

Budući da je $|x|\geqslant 0$ i $|y|\geqslant 0$, iz druge jednadžbe kod prvog sustava proizlazi da je $|x|\leqslant 3$, $|y|\leqslant 3$, a kod drugog sustava da je $|x|\leqslant 5$, $|y|\leqslant 5$.

Ove ćemo sustave riješiti grafički tako da ćemo prikazati grafički obje jednadžbe u koordinatnom sustavu i odrediti u koliko se točaka ti prikazi sijeku.

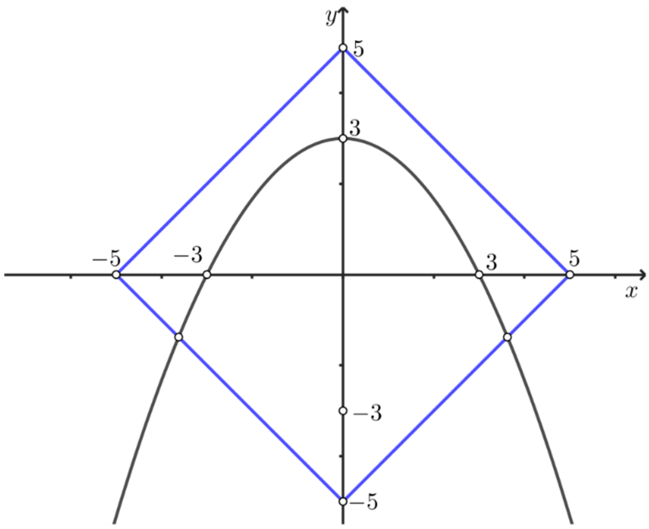
Iz druge jednadžbe sustava $\left\{\begin{array}{l} y=-\frac{1}{3}x^2+3 \\ |x|+|y|=3 \end{array}\right.$ slijedi $|y|=3-|x|$, odnosno imamo dvije mogućnosti za y: $y=3-|x|$ ili $y=-3+|x|$. Dakle, crtamo parabolu $y=-\frac{1}{3}x^2+3$ i grafove funkcija apsolutne vrijednosti $y=3-|x|$ ili $y=-3+|x|$, pri čemu je $|x|\leqslant 3$, $|y|\leqslant 3$.

Navedeni su grafovi prikazani na slici:



Nacrtani se grafovi sijeku u 3 točke.

Nacrtajmo i grafove određene sustavom $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2 + 3 \\ |x| + |y| = 5 \end{cases}$, odnosno parabolu $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ i grafove funkcija apsolutne vrijednosti $y = 5 - |x|$ ili $y = -5 + |x|$, pri čemu je $|x| \leqslant 5$, $|y| \leqslant 5$.



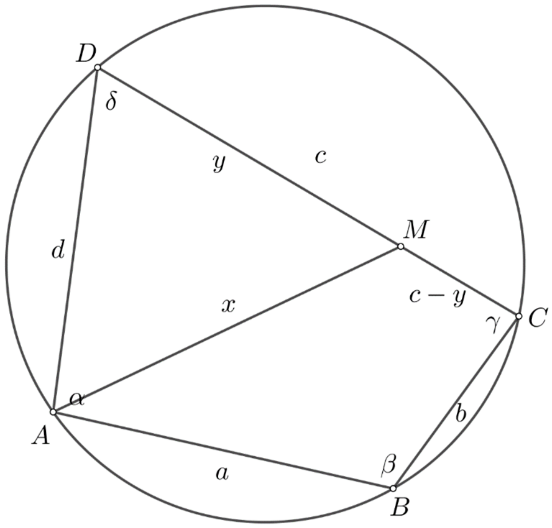
Nacrtani se grafovi sijeku u 2 točke, pa je ukupno 5 traženih uređenih parova (x, y) odnosno 5 rješenja zadanog sustava jednadžbi.

Zadatak B-2.4.

Četverokutu $ABCD$ opisana je kružnica. Neka je točka M na stranici $\overline{DC}$ takva da trokut ADM i četverokut $ABCM$ imaju jednake opsege i jednake površine. Pokaži da četverokut $ABCD$ ima najmanje dvije stranice jednake duljine.

Rješenje.

Neka su duljine stranica i veličine kutova označene kao na slici:



Budući da trokut ADM i četverokut $ABCM$ imaju jednake opsege vrijedi da je

$$\begin{aligned} d + y + x &= c - y + x + a + b \\ \implies 2y &= a + b + c - d. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Iz činjenice da trokut ADM i četverokut $ABCM$ imaju jednake površine slijedi da svaki ima pola površine četverokuta $ABCD$:

$$\begin{aligned} P_{AMD} &= \frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2}(P_{ABC} + PACD) \\ \frac{yd\sin\delta}{2} &= \frac{1}{2}(\frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{cd\sin\delta}{2}). \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Kako su β i δ obodni kutovi s različitih strana nad tetivom $\overline{AC}$ vrijedi da je $\beta + \delta = 180°$, odnosno $\sin\beta = \sin(180° - \delta) = \sin\delta$.

Jednakost ($\star\star$) prelazi redom u

$$\begin{aligned} \frac{yd\sin\delta}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{ab\sin\delta}{2} + \frac{cd\sin\delta}{2}\right) / : \sin\delta \\ \frac{yd}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}\right) \\ \frac{yd}{2} &= \frac{ab}{4} + \frac{cd}{4} / \cdot 4 \\ 2yd &= ab + cd. \end{aligned}$$

Primjenom jednakosti ($\star$) imamo:

$$\begin{aligned}
(a+b+c-d)d &= ab+cd \\
ad+bd+cd-d^2 &= ab+cd \\
d^2-ad-bd+ab &= 0 \\
d(d-a)-b(d-a) &= 0 \\
(d-a)(d-b) &= 0.
\end{aligned}$$

Znači, ili je $d=a$ ili je $d=b$ ili oboje, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak B-2.5.

Neka je $s(n)$ zbroj znamenaka prirodnog broja n zapisanog u dekadskom sustavu. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$n-3s(n)=2024.$$

Rješenje.

Ako broj n ima k znamenki, vrijedi da je $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$ i $s(n) \leqslant 9k$. Tada iz $n \geqslant 10^{k-1}$ slijedi

$$2024 = n-3s(n) \geqslant 10^{k-1}-3s(n) \geqslant 10^{k-1}-27k.$$

Za $k=5$ dobili bismo $2024 \geqslant 9865$, a očito i za $k>5$ je na desnoj strani broj veći od 2024. Zaključujemo da je $k<5$, odnosno broj znamenaka broja n mora biti manji od 5.

Broj $n=3s(n)+2024$ je očito veći od 2024, dakle ne može biti troznamenkast. Slijedi da je $k=4$.

Budući da je $2024 < n \leqslant 2024+3\cdot 9\cdot 4 = 2132$, zaključujemo da je prva znamenka broja n jednaka 2. Također vidimo da druga znamenka može biti jedino 0 ili 1.

Ako je druga znamenka 0, broj n možemo zapisati kao $n=\overline{20ab}$, gdje su a i b neke znamenke. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$2000+10a+b-3(2+a+b)=2024, \text{ odnosno}$$
$$7a-2b=30.$$

Očito a mora biti parna znamenka. Direktnom provjerom dobivamo da je jedina mogućnost $a=6$. Slijedi da je $b=6$. Stoga je jedno rješenje zadane jednadžbe broj $n=2066$.

Ako je druga znamenka 1, vrijedi $n=\overline{21ab}$. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$2100+10a+b-3(2+1+a+b)=2024, \text{ odnosno}$$
$$2b-7a=67.$$

Očito a mora biti neparna znamenka. Direktnom provjerom dobivamo da ova jednadžba nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje zadane jednadžbe je broj 2066.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

Zadatak B-3.1.

Biolozi su prvi dan svake godine počevši od 2004. bilježili populaciju zečeva i vjeverica na nekom području. Primijetili su da se njihov broj mijenja eksponencijalno i to tako da se broj zečeva svake četiri godine uveća za 50 %, a broj vjeverica svakih pet godina umanji za 25 %. Ukupan broj vjeverica i zečeva 2024. godine na tom području iznosio je 1458. Ako je 2004. godine bilo 608 vjeverica više nego zečeva, dokaži da je 2014. godine zabilježen veći broj zečeva nego vjeverica.

Rješenje.

Označimo sa z broj zečeva, a s v broj vjeverica na promatranome području 2004. godine.

Vrijedi da je $v = z + 608$.

Uočimo da će 2024. godine na tom području biti $z \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$ zečeva i $v \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$ vjeverica.

Dakle, vrijedi da je $z \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 + v \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1458$.

Rastavimo broj 1458 na proste faktore i pojednostavnimo dobivenu jednakost:

$z \cdot \frac{3^5}{2^5} + v \cdot \frac{3^4}{2^8} = 2 \cdot 3^6 / \cdot \frac{2^8}{3^4}$

$z \cdot 2^3 \cdot 3 + v = 2^9 \cdot 3^2$

$24z + v = 4608$

Riješimo sustav jednadžbi kako bismo odredili početni broj zečeva i vjeverica.

$$\begin{cases} v = z + 608 \\ 24z + v = 4608 \end{cases}$$

2004. godine na tom je području bilo $z = 160$ zečeva i $v = 768$ vjeverica.

Ovisnost broja zečeva f_z na tom području o proteklom vremenu t u godinama može se prikazati funkcijom $f_z(t) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$, a ovisnost broja vjeverica f_v o proteklom vremenu funkcijom $f_v(t) = 768 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{5}}$.

Kako bismo dokazali da je 2014. godine zabilježeno više zečeva nego vjeverica, trebamo pokazati da vrijedi $f_z(10) > f_v(10)$.

Uočimo da vrijedi:

$$f_z(10) = 160 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{10}{4}} = 160 \cdot \sqrt{\frac{243}{32}} = 180\sqrt{6} = \sqrt{194\,400}$$

$$f_v(10) = 768 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10}{5}} = 768 \cdot \frac{9}{16} = 432 = \sqrt{186\,624}$$

Budući vrijedi $194\,400 > 186\,624$, slijedi da je $\sqrt{194\,400} > \sqrt{186\,624}$, odnosno $f_z(10) > f_v(10)$.

Prema tome, 2014. godine zabilježen je veći broj zečeva nego vjeverica.

Zadatak B-3.2.

Riješi jednadžbu $\log_{2\sin 2x}(2\sin x) \cdot \log_{2\sin 2x}(2\cos x) = \frac{1}{4}$.

Rješenje.

Prije rješavanja jednadžbe navedimo uvjete koji moraju biti zadovoljeni kako bi logaritmi bili dobro definirani.

1. uvjet - argument logaritma mora biti pozitivan: $\sin x > 0$ i $\cos x > 0$

2. uvjet - baza logaritma mora biti pozitivna i različita od 1: $\sin 2x > 0$ i $\sin 2x \neq \frac{1}{2}$

Prema tome, za rješenje jednadžbe x mora vrijediti $x \in \left\langle 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, pri čemu $x \neq \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ i $x \neq \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pojednostavnimo jednadžbu primjenom formule za sinus dvostrukoga kuta te promijenimo baze obaju logaritama.

$$\log_{4\sin x\cos x}(2\sin x) \cdot \log_{4\sin x\cos x}(2\cos x) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\log_{2\sin x}(4\sin x\cos x)} \cdot \frac{1}{\log_{2\cos x}(4\sin x\cos x)} = \frac{1}{4}$$

$$\log_{2\sin x}(4\sin x\cos x) \cdot \log_{2\cos x}(4\sin x\cos x) = 4$$

$$\log_{2\sin x}(2\sin x \cdot 2\cos x) \cdot \log_{2\cos x}(2\cos x \cdot 2\sin x) = 4$$

$$[1 + \log_{2\sin x}(2\cos x)] \cdot [1 + \log_{2\cos x}(2\sin x)] = 4$$

Uvedimo supstituciju $t = \log_{2\sin x}(2\cos x)$.

Dobivena kvadratna jednadžba glasi $(1+t) \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) = 4$, odnosno $t^2 - 2t + 1 = 0$.

Jedino rješenje te jednadžbe jest $t = 1$.

Iz $\log_{2\sin x}(2\cos x) = 1$ slijedi da je $2\sin x = 2\cos x$, odnosno $\operatorname{tg} x = 1$.

Zbog uvjeta zadatka zaključujemo da je rješenje početne jednadžbe $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak B-3.3.

Mjera jednog kuta trokuta iznosi $60°$. Odredi opseg tog trokuta ako mu je polumjer opisane kružnice duljine $2\sqrt{3}$ cm, a polumjer upisane kružnice duljine $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

Rješenje.

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, a α, β i γ redom mjere kutova trokuta nasuprot tih stranica. Označimo s R i r duljine polumjera trokutu opisane i upisane kružnice te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\alpha = 60°$.

Odredimo najprije duljinu stranice a. Vrijedi da je $a = 2R\sin\alpha = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ cm.

Prema poučku o kosinusu vrijedi da je $6^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60°$, odnosno $b^2 + c^2 = 36 + bc$.

Površina trokuta može se izraziti s pomoću nepoznatih duljina stranica b i c na dva načina:

$P = \frac{abc}{4R} = \frac{6bc}{8\sqrt{3}} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$

$P = r \cdot s = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{6+b+c}{2} = \frac{(6+b+c)\sqrt{3}}{3}$,

iz čega slijedi jednakost $\frac{(6+b+c)\sqrt{3}}{3} = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$, odnosno $b + c = \frac{3}{4}bc - 6$.

Kvadriranjem dobivene jednakosti dobiva se $b^2 + 2bc + c^2 = \frac{9}{16}b^2c^2 - 9bc + 36$.

Uvrštavanjem izraza $36 + bc$ dobivenoga primjenom poučka o kosinusu umjesto izraza $b^2 + c^2$, jednakost poprima oblik $36 + 3bc = \frac{9}{16}b^2c^2 - 9bc + 36$, to jest $\frac{9}{16}b^2c^2 = 12bc$.

Budući su b i c duljine stranica trokuta (pa stoga moraju biti pozitivni brojevi), slijedi da je $bc = \frac{64}{3}$.

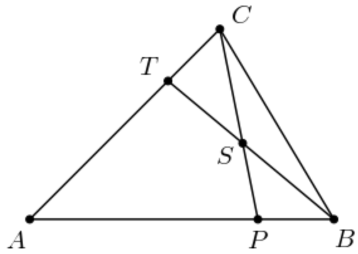
Tada je $b + c = \frac{3}{4}bc - 6 = \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{3} - 6 = 16 - 6 = 10$ cm.

Konačno, opseg trokuta iznosi $o = a + b + c = 6 + 10 = 16$ cm.

Zadatak B-3.4.

Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AB}$ označena je točka P tako da vrijedi $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, a na dužini $\overline{CP}$ označena je točka S tako da vrijedi $2\overrightarrow{CS} = 3\overrightarrow{SP}$. Ako je točka T presjek pravaca AC i BS, odredi omjer u kojemu ta točka dijeli dužinu $\overline{AC}$.

Rješenje.



Neka je x pozitivan realni broj takav da vrijedi $\overrightarrow{AT} = x \cdot \overrightarrow{AC}$.

Iz jednakosti $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ proizlazi da je $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Nadalje, iz jednakosti $2\overrightarrow{CS} = 3\overrightarrow{SP}$ slijedi da je $|CS| : |SP| = 3 : 2$, odnosno da je $\overrightarrow{CS} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CP}$, a $\overrightarrow{SP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CP}$.

Sve vektore u zadanoj ravnini možemo na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju neka dva nekolinearna vektora te ravnine, na primjer $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Vrijede sljedeće jednakosti:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{SP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CP} = \frac{2}{5}\left(-\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PB}\right) = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{SP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{11}{20}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

Neka je y pozitivan realni broj za koji vrijedi $\overrightarrow{BT} = y \cdot \overrightarrow{BS}$.
Tada vrijedi da je $\overrightarrow{BT} = -\frac{11}{20}y\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}y\overrightarrow{AC}$.

Budući istovremeno vrijedi da je $\overrightarrow{BT} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AT} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$, iz jedinstvenosti prikaza slijedi da je $-\frac{11}{20}y = -1$, odnosno $y = \frac{20}{11}$.

Konačno je $x = \frac{2}{5}y = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{11} = \frac{8}{11}$.

Iz jednakosti $\overrightarrow{AT} = \frac{8}{11}\overrightarrow{AC}$ zaključujemo da točka T dužinu $\overline{AC}$ dijeli u omjeru $8 : 3$ promatrano od vrha A.

Zadatak B-3.5.

Četiri crvene, dvije plave i tri žute kuglice treba rasporediti u staklenu, drvenu, metalnu i plastičnu posudu. Na koliko je to načina moguće učiniti ako ni u jednoj posudi plave i žute kuglice ne smiju biti zajedno?

Rješenje.

Prebrojimo najprije na koliko je načina moguće rasporediti crvene kuglice u četiri posude.

1. slučaj: Sve crvene kuglice možemo staviti u istu posudu (4+0+0+0) na 4 načina.

2. slučaj: Crvene kuglice možemo rasporediti tako da tri stavimo u jednu posudu, a četvrtu kuglicu u neku od preostalih posuda (3+1+0+0) na 12 načina.

3. slučaj: Crvene kuglice možemo rasporediti tako da dvije stavimo u jednu posudu, a preostale dvije u neku od preostalih posuda (2+2+0+0) na 6 načina.

4. slučaj: Crvene kuglice možemo rasporediti tako da dvije stavimo u jednu posudu, a preostale dvije svaku u zasebnu posudu (2+1+1+0) na 12 načina.

5. slučaj: Crvene kuglice možemo rasporediti tako da svaku stavimo u zasebnu posudu (1+1+1+1) na 1 način.

Prema tome, crvene kuglice možemo rasporediti na $4 + 12 + 6 + 12 + 1 = 35$ načina.

Preostaje još rasporediti dvije plave i tri žute kuglice.

1. slučaj: Obje plave kuglice možemo staviti u istu posudu (2+0+0+0) na 4 načina.

Budući žute kuglice ne smiju biti u istoj posudi s plavim kuglicama, na raspolaganju preostaju tri posude. Tri žute kuglice možemo rasporediti tako da ih sve stavimo u istu posudu (3+0+0) na 3 načina, tako da dvije stavimo u jednu posudu, a treću kuglicu u jednu od preostalih posuda (2+1+0) na 6 načina te tako da svaku kuglicu stavimo u zasebnu posudu (1+1+1) na 1 način.

Dakle, u ovom je slučaju mogućih $4 \cdot (3 + 6 + 1) = 4 \cdot 10 = 40$ različitih raspodjela.

2. slučaj: Plave kuglice možemo staviti u različite posude (1+1+0+0) na 6 načina.

Budući žute kuglice ne smiju biti u istoj posudi s plavim kuglicama, na raspolaganju preostaju dvije posude. Tri žute kuglice možemo rasporediti tako da ih sve stavimo u istu posudu (3+0) na 2 načina te tako da dvije stavimo u jednu posudu, a treću kuglicu u preostalu posudu (2+1) također na 2 načina.

Dakle, u ovom su slučaju moguće $6 \cdot (2 + 2) = 6 \cdot 4 = 24$ različite raspodjele.

Prema tome, plave i žute kuglice možemo rasporediti na $40 + 24 = 64$ načina.

Konačno, ukupni broj različitih raspodjela kuglica u posude iznosi $35 \cdot 64 = 2240$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

23. travnja 2024.

Zadatak B-4.1.

Ako za realne brojeve a, b, c, d i za svaki prirodan broj $n \geqslant 4$ vrijedi jednakost

$$\frac{a}{3}\binom{n}{1}+b\binom{n}{2}+c\binom{n}{3}+d\binom{n}{4}=n^4+\frac{253}{3}n^3$$

odredi za koji prirodni broj m vrijedi $\dfrac{b+d-c}{\sqrt[m]{a}}=1$?

Rješenje.

Nakon raspisivanja binomnih koeficijenata dobivamo sljedeću jednakost:

$$\frac{1}{3}a\cdot n+b\cdot\frac{n(n-1)}{2}+c\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+d\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=n^4+\frac{253}{3}n^3.$$

Slijedi niz ekvivalentnih jednakosti:

$$8an+12b\left(n^2-n\right)+4cn\left(n^2-3n+2\right)+d\left(n^2-n\right)\left(n^2-5n+6\right)=24n^4+2024n^3,$$

$$8an+12bn^2-12bn+4cn^3-12cn^2+8cn+dn^4-6dn^3+11dn^2-6dn=24n^4+2024n^3.$$

Nakon sređivanja lijeve strane, imamo na obje strane polinome četvrtog stupnja

$$dn^4+(4c-6d)n^3+(12b-12c+11d)\,n^2+(8a-12b+8c-6d)\,n=24n^4+2024n^3,$$

a njihova jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $n,\ n\geqslant 4$.

Tako su odgovarajući koeficijenti polinoma s lijeve i s desne strane jednakosti jednaki, odnosno vrijedi sljedeći sustav jednakosti:

$$\begin{aligned} d&=24,\\ 4c-6d&=2024,\\ 12b-12c+11d&=0,\\ 8a-12b+8c-6d&=0.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $d=24$ redom u drugu, treću i četvrtu jednadžbu dobivamo vrijednost preostalih koeficijenata. Dakle, $c=542$, $b=520$ i $a=256$.

Uvrstimo li dobivene brojeve u jednakost

$$\frac{b+d-c}{\sqrt[m]{a}}=1$$

dobivamo

$$\frac{2}{\sqrt[m]{256}}=1,$$

pa je traženi broj $m=8$.

Napomena: Učenik može riješiti zadatak i uvrštavanjem 4 različita prirodna broja veća ili jednaka 4 u početnu jednadžbu na mjesto n i riješiti sustav 4 jednadžbe s 4 nepoznanice $(a, b, c$ i $d)$.

Zadatak B-4.2.

Zadane su funkcije $f(x) = x^{\log_{2024} x}, g(x) = \log_{2024}\left(2\sqrt{506} \cdot x\right)$ i $h(x) = 2x - 1$, pri čemu je $x > 0, x \neq 1$. Odredi umnožak svih rješenja jednadžbe $(g \circ f)(x) = (h \circ g)(x)$.

Rješenje.

Odredimo kompozicije funkcija navedene u danoj jednadžbi:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^{\log_{2024} x}\right) = \log_{2024}\left(2\sqrt{506} \cdot x^{\log_{2024} x}\right)$$

$$= \log_{2024}\left(2\sqrt{506}\right) + \log_{2024}\left(x^{\log_{2024} x}\right) = \log_{2024}\sqrt{2024} + \log_{2024} x \cdot \log_{2024} x$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\log_{2024} x\right)^2,$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\log_{2024}\left(2\sqrt{506} \cdot x\right)\right) = 2\log_{2024}\left(2\sqrt{506} \cdot x\right) - 1$$

$$= 2\log_{2024}\sqrt{2024} + 2\log_{2024} x - 1 = 1 + 2\log_{2024} x - 1$$

$$= 2\log_{2024} x.$$

Uvrstimo dobivene izraze u danu jednadžbu.

$$(g \circ f)(x) = (h \circ g)(x),$$

$$\frac{1}{2} + \left(\log_{2024} x\right)^2 = 2\log_{2024} x,$$

$$2\left(\log_{2024} x\right)^2 - 4\log_{2024} x + 1 = 0,$$

Uvedemo li zamjenu $\log_{2024} x = t$, dobivamo kvadratnu jednadžbu $2t^2 - 4t + 1 = 0$.

Prema Vieteovim je formulama zbroj njezinih rješenja $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = 2$. Budući da su t_1 i t_2 logaritmi rješenja polazne jednadžbe, navedeni je zbroj jednak logaritmu umnoška rješenja x_1 i x_2. Tada je redom:

$$\log_{2024} x_1 + \log_{2024} x_2 = 2,$$

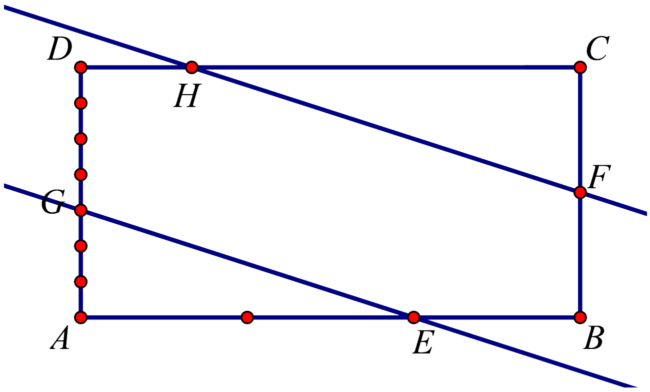
$$\log_{2024}(x_1 \cdot x_2) = 2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2024^2 = 4096576.$$

Zadatak B-4.3.

Stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ dvaput je dulja od stranice $\overline{BC}$. Točka F polovište je stranice $\overline{BC}$, a točka E dijeli stranicu $\overline{AB}$ tako da je $\left|\overline{AE}\right| : \left|\overline{EB}\right| = 2 : 1$. Stranica $\overline{AD}$ podijeljena je na 7 jednakih dijelova, a stranica $\overline{CD}$ na n jednakih dijelova. Točka G jedna je od djelišnih točaka stranice $\overline{AD}$, a točka H jedna od djelišnih točaka stranice $\overline{CD}$. Odredi najmanji prirodan broj n za koji će pravci EG i FH biti paralelni.

Prvo rješenje.



Neka je $|BC| = a$, onda je $|AB| = 2a$, $|AE| = \dfrac{4a}{3}$, $|FC| = \dfrac{a}{2}$.

Ako je točka G m-ta djelišna točka stranice $\overline{AD}$, a H p-ta djelišna točka stranice $\overline{CD}$, vrijedi: $|AG| = \dfrac{m}{7}a$, $|CH| = \dfrac{p}{n}2a$.

Ako su pravci EG i FH paralelni onda je $\triangle AEG \sim \triangle CHF$ (kutovi s paralelnim kracima $\sphericalangle AEG \cong \sphericalangle CHF, \sphericalangle EGA \cong \sphericalangle HFC$), pa vrijedi:

$$\frac{|AG|}{|FC|} = \frac{|AE|}{|CH|},$$

odnosno

$$\frac{\frac{m}{7}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{4}{3}a}{\frac{p}{n}2a}.$$

Stoga je $p = \dfrac{7n}{3m},\ p < n$.

Ako je $m = 1$ tada je $p = \frac{7n}{3}$, te $n \in \{3, 6, ...\}, p \in \{7, 14, ...\}$ što ne može biti zbog $p < n$.

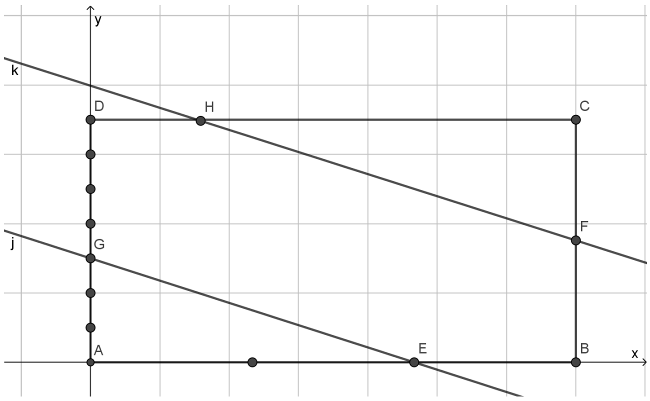
Ako je $m = 2$ tada je $p = \frac{7n}{6}$, te $n \in \{6, 12...\}, p \in \{7, 14, ...\}$ što ne može biti zbog $p < n$.

Ako je $m = 3$ tada je $p = \frac{7n}{9}$, te $n \in \{9, 18, ...\}, p \in \{7, 14, ...\}$ što zadovoljava uvjete.

Ako je $m = 4$ tada je $p = \frac{7n}{12}$, te $n \in \{12, 24, ...\}, p \in \{7, 14, ...\}$ što zadovoljava uvjete, ali je u prethodnom slučaju n manji i za ostale mogućnosti $(m = 5, 6)$ dobili bi veći n, tako da je $n = 9$ najmanji prirodan broj takav da su pravci EG i FH paralelni.

Drugo rješenje.

Smjestimo pravokutnik u koordinatni sustav tako da je vrh $A(0,0)$:



$A\left(0,0\right), B\left(2a,0\right), C\left(2a,a\right), D\left(0,a\right), E\left(\frac{4a}{3},0\right), F\left(2a,\frac{a}{2}\right), G\left(0,\frac{m}{7}a\right), H\left(2a-\frac{p}{n}2a,a\right)$

Da bi pravci EG i FH bili paralelni koeficijenti smjera im moraju biti jednaki:

$$k_{EG}=\frac{0-\frac{m}{7}a}{\frac{4a}{3}-0}=-\frac{3m}{28}, k_{FH}=\frac{\frac{a}{2}-a}{2a-\left(2a-\frac{p}{n}2a\right)}=-\frac{n}{4p},$$

$$k_{EG}=k_{FH}\Longrightarrow -\frac{3m}{28}=-\frac{n}{4p}\Longrightarrow p=\frac{7n}{3m}.$$

Ostatak rješenja je kao u 1. rješenju.

Zadatak B-4.4.

U nekoj se igri na sreću iz bubnja sa zelenim i plavim kuglicama istovremeno izvlače dvije kuglice. Igrač će ostvariti dobitak ako izvuče kuglice različitih boja, a vjerojatnost dobitka iznosi 0.25.

a) Ako u bubnju ima 7 plavih kuglica, koliko ima zelenih?

b) Luka igru ponavlja sve dok ne ostvari dobitak, pri čemu nakon svakog ponavljanja izvučene kuglice vraća u bubanj. Vjerojatnost da Luka igru završi u najviše $2k$ ponavljanja $\frac{1267}{1024}$ je puta veća od vjerojatnosti da igru završi u najviše k ponavljanja. Odredi broj k.

Rješenje.

a) Neka je n nepoznati broj zelenih kuglica. Vjerojatnost dobitka računamo kao:

$$p=\frac{\binom{7}{1}\binom{n}{1}}{\binom{n+7}{2}}=\frac{14n}{(n+7)(n+6)}.$$

Kako bi odredili nepoznati broj n, rješavamo jednadžbu

$$\frac{14n}{(n+7)(n+6)}=\frac{1}{4}$$

koja je ekvivalentna jednadžbi $n^2-43n+42=0$. Rješenja ove jednadžbe su $n=1$ i $n=42$. Dakle u bubnju uz 7 plavih kuglica može biti jedna zelena kuglica ili 42 zelene kuglice.

b) Jednostavnosti radi označimo s p vjerojatnost dobitka, a s q vjerojatnost gubitka pri jednom pokušaju.

Prema načelu zbroja, vjerojatnost da Luka igru završi u najviše k ponavljanja jednaka je

$$p + qp + q^2p + \cdots + q^{k-1}p = p\frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

Analogno zaključujemo da je vjerojatnost da igru završi u $2k$ ponavljanja jednaka

$$p\frac{q^{2k} - 1}{q - 1}.$$

Omjer tih dviju vjerojatnosti iznosi $q^k + 1$.

Da bi našli broj k, rješavamo jednadžbu

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 = \frac{1267}{1024},$$

odnosno

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{243}{1024} = \left(\frac{3}{4}\right)^5,$$

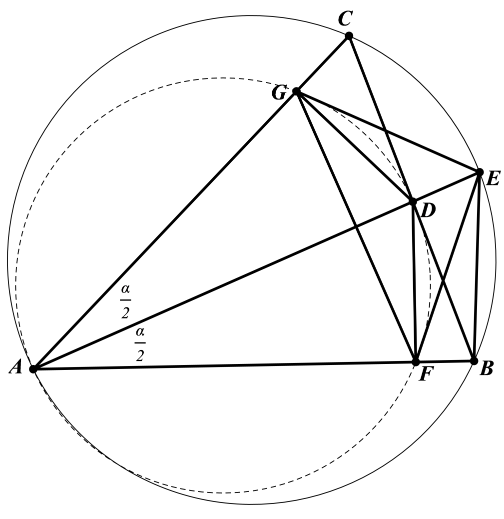
pa je $k = 5$.

Zadatak B-4.5.

U šiljastokutnom trokutu ABC simetrala kuta pri vrhu A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D, a trokutu opisanu kružnicu u točki E različitoj od točke A. Ortogonalne projekcije točke D na stranice AB i AC redom su točke F i G. Dokaži da je površina četverokuta $AFEG$ jednaka površini trokuta ABC.

Rješenje.

Neka je α kut pri vrhu A.



Površina trokuta ABC je $P_1 = \dfrac{1}{2}\,|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$.

Trokuti ADF i ADG su sukladni $(k-s-k)$ pa su dijagonale četverokuta $AFEG$ okomite.

Dakle, površina četverokuta je $P_2 = \dfrac{1}{2}\,|AE| \cdot |FG|$.

Trokuti ACD i AEB su slični $(k-k)$ pa je $\dfrac{|AC|}{|AE|} = \dfrac{|AD|}{|AB|}$, odnosno $|AB| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AE|$.

Tada je$|AE| = \frac{|AB|\cdot|AC|}{|AD|}$.

$\overline{FG}$ je tetiva kružnice promjera kojoj odgovara obodni kut α pa vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{|FG|}{2}}{\dfrac{|AD|}{2}}.$$

Slijedi $|FG| = |AD|\sin\alpha$.

Tada je $P_2 = \dfrac{1}{2}\,|AE| \cdot |FG| = \dfrac{1}{2}\dfrac{|AB| \cdot |AC|}{|AD|} \cdot |AD|\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\,|AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha = P_1$.

Dakle, tražene su površine jednake.