Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

1. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$x + \Big|2\,|x| - 1\Big|$$

za neki realni broj x.

2. Za višeznamenkasti prirodni broj definirana je operacija *tumbanje* pri kojem se vodeća znamenka izbriše, a zatim ista znamenka dopiše na kraj broja, iza znamenke jedinica. Tako npr. od broja 123 nastaje broj 231, a od broja 107 broj 71. Prirodni broj je *mudar* ako mu je vodeća znamenka u dekadskom zapisu jednaka 1, a tumbanjem od njega nastaje triput veći broj. Odredi sve mudre brojeve.

3. Unutar trokuta ABC stranica duljina $|AB| = 11$, $|BC| = 13$ i $|CA| = 14$ nalazi se točka K takva da je $\sphericalangle KBA = \sphericalangle KCB = 30°$. Točke M i N su redom osnosimetrične slike točke K s obzirom na pravce AB i BC. Odredi udaljenost točaka M i N.

4. Realni brojevi x, y i z zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
x^3 &= 2y^3 + y - 2 \\
y^3 &= 2z^3 + z - 2 \\
z^3 &= 2x^3 + x - 2.
\end{aligned}$$

Dokaži da je $x = y = z = 1$.

5. Antonija je zamislila 6 različitih realnih brojeva, a zatim je na ploču napisala sve moguće zbrojeve dvaju, ne nužno različitih, zamišljenih brojeva. Kada je Branku rekla da su najmanja dva od zamišljenih brojeva 2024 i 4048, Branko je zaključio da koji god preostali brojevi bili, broj različitih brojeva na ploči nije mogao biti manji.

a) Koliko je različitih brojeva na ploči?

b) Koliki sve može biti najveći broj koji je Antonija zamislila?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

1. Baka Jagoda prodaje trešnje te je uočila da postoji linearna ovisnost između cijene jednog kilograma trešanja i količine prodanih trešanja u danu: svakim povećanjem cijene za 1 € po kilogramu bi u danu prodala 3 kilograma trešanja manje. Najveći iznos od prodaje trešanja bi ostvarila kada bi ih prodavala po cijeni od 3.6 € po kilogramu. Jednog dana unuka Višnja zamijenila je baku na tržnici, sama odredila cijenu kilograma trešanja i prodala trešnje za 18.6 €. Po kojoj je cijeni Višnja mogla prodavati trešnje?

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje broj

$$2n^4 + 19n^2 + 9$$

ima točno 6 pozitivnih djelitelja.

3. Neka su *stepenice* dio kvadratne ploče dimenzija 111×111 koji se sastoji od prvih k polja u k-tom retku za $k = 1, 2, \ldots, 111$. Mogu li se stepenice podijeliti na 111 kvadrata?

(Kvadrati se trebaju sastojati od jediničnih polja i ne moraju biti sukladni.)

4. Zadan je trapez $ABCD$ kojemu su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti. Simetrala dužine $\overline{AD}$ siječe pravac BC u točki P, a simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe pravac AD u točki Q. Dokaži da je $\sphericalangle DPA = \sphericalangle BQC$.

5. Mihael je na ploči zapisao kvadratnu funkciju $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima. Nakon toga, u svakom je koraku promijenio (povećao ili smanjio) za 1 ili koeficijent uz x ili konstantni član. U zadnjem koraku je na ploči zapisana kvadratna funkcija $g(x)$.

Je li sigurno da je u nekom trenutku na ploči bila zapisana kvadratna funkcija s cjelobrojnim nultočkama ako je

a) $f(x) = x^2 + x + 2024$ i $g(x) = x^2 + 2024x + 1$?

b) $f(x) = x^2 + 2024x + 2024$ i $g(x) = x^2 - 2024x + 2024$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\log_2(4^x + 2^x) + \log_{(4^x+2^x)} 2 = 2.$$

2. Postoje li realni brojevi $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takvi da su

$$\frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{\sin y} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin(x+y)}$$

prirodni brojevi?

3. Dan je jednakostranični trokut ABC. Dužina $\overline{AD}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E, a pritom je $\sphericalangle BAD = 20^\circ$ i $|DE| = |AB|$. Odredi $\sphericalangle ADB$.

4. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $1 < a < b$ i da vrijedi

$$a + b \mid ab + 1 \quad \text{i} \quad b - a \mid ab - 1.$$

Dokaži da je $b < a\sqrt{3}$.

5. U igri za dva igrača koristi se 101 praznih kutija i dovoljna količina žetona. Igrači, Ema i Lovro, naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu, igrač stavlja po jedan žeton u sto različitih kutija. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza u jednoj od kutija bude 201 žeton. Ako Ema igra prva, koji od igrača može osigurati pobjedu?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

1. Koristeći niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definirana su dva nova niza, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$b_n = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad c_n = a_{n+2} - a_{n+1}.$$

Ako je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički, dokaži da je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz.

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x) - y^2) = yf(x^2).$$

3. Za prirodan broj n neka je $T(n)$ broj uređenih trojki prirodnih brojeva (a, b, c) za koje postoji trokut sa stranicama duljina a, b i c čiji je opseg jednak n.

a) Dokaži da je $T(2024) = T(2021)$.

b) Dokaži da je $T(2023) > T(2020)$.

4. Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojemu je $|AB| > |AC|$, točka I središte njemu upisane kružnice, a P polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je K polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC koji sadrži točku A. Dokaži da vrijedi $\sphericalangle BIP + \sphericalangle CIK = 180°$.

5. Neka $d(k)$ označava broj prirodnih djelitelja broja k. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = d(n!).$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.