DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

Zadatak A-1.1.

Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$x + \Big|2\,|x| - 1\Big|$$

za neki realni broj x.

Rješenje.

Dani izraz promatramo ovisno o predznaku brojeva x i $2|x| - 1$. Neka je prvo $x \geqslant 0$. Tada taj izraz postaje $x + |2x - 1|$. Kada je $2x - 1 \geqslant 0$, odnosno kada je $x \geqslant \frac{1}{2}$, traženi izraz

$$x + (2x - 1) = 3x - 1$$

poprima najmanju vrijednost kada je x najmanji, a to je za $x = \frac{1}{2}$. Dakle, u ovom je slučaju najmanja vrijednost izraza jednaka $3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Kada je $2x - 1 \leqslant 0$, što zajedno s pretpostavkom $x \geqslant 0$ povlači $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, traženi izraz

$$x - (2x - 1) = -x + 1$$

poprima najveću vrijednost kada je x najveći, a to je za $x = \frac{1}{2}$. Dakle, u ovom je slučaju najmanja vrijednost izraza jednaka $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Neka je sada $x \leqslant 0$. Traženi izraz postaje $x + |2x + 1|$. Kada je $2x + 1 \geqslant 0$, što zajedno s pretpostavkom $x \leqslant 0$ povlači $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, traženi izraz

$$x + (2x + 1) = 3x + 1$$

poprima najmanju vrijednost kada je x najmanji, a to je za $x = -\frac{1}{2}$. Dakle, u ovom je slučaju najmanja vrijednost izraza jednaka $-3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$.

Kada je $2x + 1 \leqslant 0$, odnosno kada je $x \leqslant -\frac{1}{2}$, traženi izraz

$$x - (2x + 1) = -x - 1$$

poprima najveću vrijednost kada je x najveći, a to je za $x = -\frac{1}{2}$. Dakle, u ovom je slučaju najmanja vrijednost izraza jednaka $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

Iz analize po svim slučajevima, zaključujemo da je najmanja vrijednost traženog izraza jednaka $-\frac{1}{2}$, te se ostvaruje za $x = -\frac{1}{2}$.

Zadatak A-1.2.

Za višeznamenkasti prirodni broj definirana je operacija *tumbanje* pri kojem se vodeća znamenka izbriše, a zatim ista znamenka dopiše na kraj broja, iza znamenke jedinica. Tako npr. od broja 123 nastaje broj 231, a od broja 107 broj 71. Prirodni broj je *mudar* ako mu je vodeća znamenka u dekadskom zapisu jednaka 1, a tumbanjem od njega nastaje triput veći broj. Odredi sve mudre brojeve.

Prvo rješenje.

Broj kojem je prva znamenka u dekadskom zapisu jednaka 1 možemo prikazati u obliku $n = 10^k + m$, gdje su m i k nenegativni cijeli brojevi i $m < 10^k$. U tom slučaju je broj dobiven tumbanjem jednak je $10m + 1$.

Pretpostavimo da je n mudar. Tada je $10m+1 = 3 \cdot (10^k + m)$, odnosno $m = \frac{3 \cdot 10^k - 1}{7}$ odakle je

$$n = 10^k + \frac{3 \cdot 10^k - 1}{7} = \frac{10^{k+1} - 1}{7}.$$

Da bi n bio mudar, nužno je $10^{k+1} - 1$ djeljiv sa 7. Vrijedi i obrat, ako je k nenegativan cijeli broj takav da je $10^{k+1} - 1$ djeljiv brojem 7, onda je $\frac{10^{k+1} - 1}{7}$ mudar broj. Zaista, u tom slučaju je

$$m = \frac{10^{k+1} - 1}{7} - 10^k = \frac{3 \cdot 10^k - 1}{7}$$

nenegativan cijeli broj koji je manji od 10^k, te je zadovoljena jednakost $10m + 1 = 3 \cdot (10^k + m)$. Potrebno je odrediti sve nenegativne cijele brojeve k za koje je broj $10^{k+1} - 1$ djeljiv sa 7. Kako broj 10^{k+1} za $k = 0, 1, 2, \dots$ redom daje ostatke $3, 2, 6, 4, 5, 1, \dots$ pri dijeljenju sa 7, zaključujemo da se ti ostatci ponavljaju s periodom 6, pa je nužno da je $k + 1$ djeljiv sa 6, odnosno da je $k = 6l - 1$, za bilo koji $l \in \mathbb{N}$.

Dakle, svi mudri brojevi su brojevi oblika

$$\frac{10^{6k-1} - 1}{7}$$

gdje je $l \in \mathbb{N}$ proizvoljan.

Drugo rješenje.

Neka je $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0}$, uz $a_k = 1$ dekadski zapis nekog mudrog broja. Broj dobiven njegovim tumbanjem je $\overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0 a_k}$. Iz uvjeta zadatka dobivamo

$$3 \cdot \overline{1 a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0 1}.$$

Promotrimo zadnju znamenku izraza na obje strane jednakosti. Zaključujemo da broj $3a_0$ završava znamenkom 1, što je moguće samo ako je a_0 znamenka 7. Posebno, kako $a_0 \neq 1$, mudar broj mora imati više od jedne znamenke ($k \geqslant 1$).

Sredimo sada zadnju jednakost:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_2 a_1 7} &= \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 71} \\
30 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_2 a_1} + 3 \cdot 7 &= 10 \cdot \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 7} + 1 \\
30 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_2 a_1} + 20 &= 10 \cdot \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 7} \\
3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_2 a_1} + 2 &= \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_1 7}
\end{aligned}$$

Ponovno promotrimo zadnju znamenku izraza na obje strane jednakosti. Zaključujemo da je broj $3a_1$ završava znamenkom 5, što je moguće samo ako je a_1 znamenka 5. Posebno, kako $a_1 \neq 1$, mora biti $k \geqslant 2$.

Na analogan način iz jednakosti

$$3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_3 a_2 5} + 2 = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 57}, \quad \text{tj.} \quad 3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_3 a_2} + 1 = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 5}$$

zaključit ćemo da je $a_2 = 8$. Ovaj postupak ponavljamo dalje, dobivamo $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, te onda i

$$3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_6 a_5 4} = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_5 42}, \quad \text{tj.} \quad 3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_6 a_5} + 1 = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_5 4}$$

odakle zaključujemo $a_5 = 1$.

Kako smo tek za znamenku a_5 dobili da je jednaka 1, dobili smo prvi mudar broj. Naime, ako je $k = 5$ i $a_k = a_5 = 1$, došli smo do mudrog broja 142857.

Za sve ostale mudre brojeve ($k \geqslant 6$) kao ranije dobivamo da vrijedi

$$3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_7 a_6 1} = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_5 14}, \quad \text{tj.} \quad 3 \cdot \overline{1a_{k-1} \ldots a_7 a_6} = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_6 1},$$

odnosno da je mudar broj $\overline{1a_{k-1} \ldots a_7 a_6}$, onaj koji je dobiven od početnog mudrog broja brisanjem zadnjih 6 znamenaka. Možemo zaključiti da je taj broj sastavljen šest znamenaka koje čine broj 142857, ili ponovno da je i broj kojem obrišemo zadnjih 12 znamenaka mudar, itd.

Ponavljajući taj argument, zaključujemo da su svi mudri brojevi

$$142857, \quad 142857142857, \quad 142857142857142857, \quad \ldots$$

odnosno brojevi nastali proizvoljnim brojem ponavljanja bloka niza znamenaka $\overline{142857}$.

Napomena: Dekadski zapisi mudrih brojeva iz prvog rješenja brojevi su iz drugog rješenja:

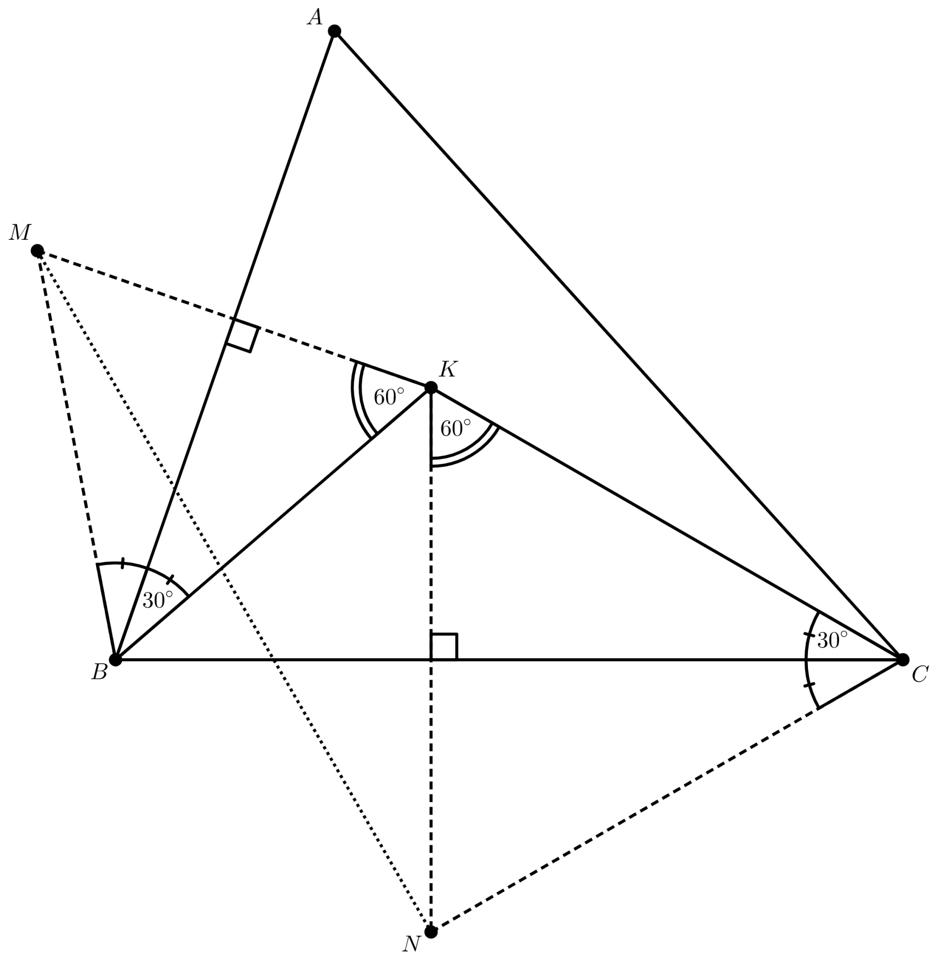
$$\frac{10^6 - 1}{7} = 142857, \quad \frac{10^{12} - 1}{7} = 142857142857, \quad \ldots,$$

dakle, radi se o istim rješenjima zapisanim na drugačiji način.

Zadatak A-1.3.

Unutar trokuta ABC stranica duljina $|AB| = 11$, $|BC| = 13$ i $|CA| = 14$ nalazi se točka K takva da je $\sphericalangle KBA = \sphericalangle KCB = 30°$. Točke M i N su redom osnosimetrične slike točke K s obzirom na pravce AB i BC. Odredi udaljenost točaka M i N.

Rješenje.



Promotrimo trokut CKN. Zbog osne simetrije vrijedi $\sphericalangle KCN = 2\sphericalangle KCB = 60°$ te $|CK| = |CN|$. Zato slijedi

$$\sphericalangle CKN = \sphericalangle CNK = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle KCN) = 60°,$$

pa je trokut CKN jednakostraničan.

Analogno, zbog osne simetrije je $\sphericalangle KBM = 2\sphericalangle KBA = 60°$ i $|BK| = |BM|$, pa onda i

$$\sphericalangle BKM = \sphericalangle BMK = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle KBM) = 60°,$$

pa je i trokut KBM jednakostraničan.

Promotrimo trokute MKN i BKC. Vrijedi $|KN| = |KC|$, $|MK| = |BK|$ (jer su trokuti CKN i KBM jednakostranični), te

$$\sphericalangle MKN = \sphericalangle MKB + \sphericalangle BKN = 60° + \sphericalangle BKN = \sphericalangle NKC + \sphericalangle BKN = \sphericalangle BKC.$$

Prema S–K–S poučku o sukladnosti su ti trokuti sukladni, pa je zato

$$|MN| = |BC| = 13.$$

Zadatak A-1.4.

Realni brojevi x, y i z zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^3 &= 2y^3 + y - 2 \\ y^3 &= 2z^3 + z - 2 \\ z^3 &= 2x^3 + x - 2. \end{aligned}$$

Dokaži da je $x = y = z = 1$.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoji neko drugo rješenje sustava različito od $x = y = z = 1$. Ako bi u takvom rješenju bilo $x = 1$, tada iz zadnje jednadžbe vidimo da je $z^3 = 1$, odnosno $z = 1$, te je onda iz druge jednadžbe $y^3 = 1$, odnosno $y = 1$. Dakle, za bilo koje drugo rješenje jednadžbe nužno je $x \neq 1$.

Pretpostavimo da je $x > 1$. Tada je $x^3 > 1$, pa je $x^3 + x > 2$. Zato iz zadnje jednadžbe imamo

$$z^3 = x^3 + (x^3 + x - 2) > x^3.$$

To je moguće samo ako je $z > x$. Posebno, zbog $x > 1$, zaključujemo da je $z > 1$.

Kako je $z > 1$, iz druge jednadžbe analogno dobivamo

$$y^3 = z^3 + (z^3 + z - 2) > z^3,$$

odakle zaključujemo da je $y > z$, te posebno $y > 1$.

Konačno, koristeći $y > 1$ iz prve jednadžbe slijedi

$$x^3 = y^3 + (y^3 + y - 2) > y^3,$$

odakle zaključujemo $x > y$. Dobili smo niz nejednakosti $x > y > z > x$ koje očito ne mogu biti zadovoljene, čime dobivamo kontradikciju.

Pretpostavimo sada da je $x < 1$. Tada je $x^3 < 1$, pa je $x^3 + x < 2$, pa iz zadnje jednadžbe imamo

$$z^3 = x^3 + (x^3 + x - 2) < x^3,$$

što je moguće samo ako je $z < x$. Posebno, zbog $x < 1$ zaključujemo $z < 1$.

Sada iz druge jednadžbe na analogan način zaključujemo

$$y^3 = z^3 + (z^3 + z - 2) < z^3,$$

odnosno $y < z < 1$, a iz prve jednadžbe

$$x^3 = y^3 + (y^3 + y - 2) < y^3,$$

dobivamo $x < y$. Ponovno dobivamo kontradikciju, jer nije moguće da vrijede nejednakosti $x < y < z < x$.

Zaista, $x = y = z = 1$ jedino je rješenje ovog sustava jednadžbi.

Zadatak A-1.5.

Antonija je zamislila 6 različitih realnih brojeva, a zatim je na ploču napisala sve moguće zbrojeve dvaju, ne nužno različitih, zamišljenih brojeva. Kada je Branku rekla da su najmanja dva od zamišljenih brojeva 2024 i 4048, Branko je zaključio da koji god preostali brojevi bili, broj različitih brojeva na ploči nije mogao biti manji.

a) Koliko je različitih brojeva na ploči?

b) Koliki sve može biti najveći broj koji je Antonija zamislila?

Rješenje.

Neka su $x_1 = 2024$, $x_2 = 4048$, x_3, x_4, x_5 i x_6 Antonijini zamišljeni brojevi poredani po veličini od manjih prema većim. Promotrimo 11 zbrojeva

$$x_1 + x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2 + x_2,\ x_2 + x_3,\ \ldots,\ x_5 + x_6,\ x_6 + x_6.$$

To je 11 različitih zbrojeva (i oni su poredani od manjih prema većim) pa Branko na ploči vidi barem 11 različitih zbrojeva. Dokazat ćemo da je to ujedno najmanji mogući broj različitih brojeva na ploči.

Promotrimo zbroj $x_1 + x_3$. Da bi na ploči bilo točno 11 različitih brojeva, mora biti jednak jednom od gore zapisanih zbrojeva. Kako je $x_1 < x_2 < x_3$, nužno je

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3$$

pa je jedino moguće da je jednak zbroju $x_2 + x_2$. Dobivamo da je

$$x_3 = x_2 + x_2 - x_1 = 3 \cdot 2024.$$

Promotrimo sada zbroj $x_2 + x_4$. Sličnim zaključivanjem, taj broj je veći od $x_2 + x_3$ i manji $x_3 + x_4$, pa je jedino moguće jednak zbroju $x_3 + x_3$. Dobivamo da je

$$x_4 = x_3 + x_3 - x_2 = 4 \cdot 2024.$$

Zaključujući slično dalje promatrajući zbrojeve $x_3 + x_5$ i $x_4 + x_6$ zaključujemo $x_5 = 5 \cdot 2024$ i $x_6 = 6 \cdot 2024$.

S druge strane, za brojeve $x_k = k \cdot 2024$ $(k = 1, \ldots, 6)$ zaista vrijedi da je broj različitih zbrojeva ne nužno različitih parova brojeva jednak 11: svi takvi zbrojevi višekratnici su broja 2024, od $2 \cdot 2024$ do $12 \cdot 2024$. To dokazuje da je moguće da se na ploči nalazi samo 11 različitih brojeva, pa je to najmanji takav broj. Najveći Antonijin zamišljeni broj je nužno $x_6 = 6 \cdot 2024 = 12144$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

Zadatak A-2.1.

Baka Jagoda prodaje trešnje te je uočila da postoji linearna ovisnost između cijene jednog kilograma trešanja i količine prodanih trešanja u danu: svakim povećanjem cijene za 1 € po kilogramu bi u danu prodala 3 kilograma trešanja manje. Najveći iznos od prodaje trešanja bi ostvarila kada bi ih prodavala po cijeni od 3.6 € po kilogramu. Jednog dana unuka Višnja zamijenila je baku na tržnici, sama odredila cijenu kilograma trešanja i prodala trešnje za 18.6 €. Po kojoj je cijeni Višnja mogla prodavati trešnje?

Rješenje.

Označimo s x cijenu kilograma trešanja u eurima. Tada količinu prodanih trešanja u kilogramima možemo opisati s $a - bx$, za neke realne brojeve a i b. Iznos od prodaje trešanja jednak je $f(x) = x(a - bx) = -bx^2 + ax$, što je kvadratna funkcija po x.

Iz uvjeta zadatka slijedi $b = 3$. Nadalje, najveći iznos od prodaje trešanja postiže se u tjemenu kvadratne funkcije f, pa slijedi

$$\frac{-a}{-2b} = 3.6,$$

odakle je $a = 21.6$.

Ako je Višnja je prodavala trešnje po cijeni od y eura po kilogramu, vrijedi $f(y) = 18.6$, odakle je

$$\begin{aligned} -3y^2 + 21.6y &= 18.6 \\ -5y^2 + 36y - 31 &= 0, \end{aligned}$$

odakle dobivamo rješenja $y = 1$ i $y = \frac{31}{5} = 6.2$.

Zaključujemo da su moguće cijene po kojima je Višnja prodavala cijene 1 € po kilogramu i 6.2€ po kilogramu.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje broj

$$2n^4 + 19n^2 + 9$$

ima točno 6 pozitivnih djelitelja.

Rješenje.

Zapišimo izraz u obliku

$$2n^4 + 19n^2 + 9 = (2n^2 + 1)(n^2 + 9).$$

Pretpostavimo da je broj n djeljiv s 3. Kako je u tom slučaju broj $n^2 + 9$ djeljiv s 9 i veći od 9, a broj $2n^2 + 1$ također veći od 9, zaključujemo da traženi izraz ima barem 7 različitih djelitelja:

$$1,\ 3,\ 9,\ 2n^2 + 1,\ 3(2n^2 + 1),\ 9(2n^2 + 1),\ (n^2 + 9)(2n^2 + 1)$$

(poredani su po veličini), odnosno ima više od 6 djelitelja.

Zato je nužno n relativno prost s 3. U slučaju $n = 1$ dobivamo broj $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ koji ima 8 djelitelja, a u slučaju $n = 2$ dobivamo broj $117 = 3^2 \cdot 13$ koji ima 6 djelitelja. Neka je nadalje $n \geqslant 4$ relativno prost s 3.

Kada je n relativno prost s 3, broj n^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, pa je broj $2n^2 + 1$ djeljiv s 3. Kako je $n^2 + 9$ relativno prost s 3, traženi izraz ima barem 6 različitih djelitelja:

$$1,\ 3,\ n^2 + 9,\ 2n^2 + 1,\ 3(2n^2 + 1), (2n^2 + 1)(n^2 + 9)$$

(poredani su po veličini). Broj $m = \dfrac{2n^2 + 1}{3}$ je prirodni broj i također je djelitelj danog izraza. Da bi izraz imao točno 6 djelitelja, m mora biti jednak jednom od gore napisanih djelitelja. Kako je m manji od $n^2 + 9$ i $2n^2 + 1$, jedino je moguće da je $m = 1$ ili $m = 3$. U prvom slučaju iz jednakosti $2n^2 + 1 = 3$ ne dobivamo prirodnih rješenja, a u drugom slučaju iz $2n^2 + 1 = 9$ dobivamo već pronađeno rješenje $n = 2$.

Zato je jedini takav n jednak 2.

Zadatak A-2.3.

Neka su *stepenice* dio kvadratne ploče dimenzija 111×111 koji se sastoji od prvih k polja u k-tom retku za $k = 1, 2, \ldots, 111$. Mogu li se stepenice podijeliti na 111 kvadrata?

(Kvadrati se trebaju sastojati od jediničnih polja i ne moraju biti sukladni.)

Rješenje.

Promotrimo polja stepenica koja se nalaze na dijagonali (najdesnija polja svakog retka). Nikoji od 111 kvadrata na koje bi te stepenice bile podijeljene ne mogu pokriti dva polja dijagonale. Zato svaki kvadrat pokriva točno jedno polje dijagonale.

Promotrimo polje u kutu stepenica (najlijevije polje zadnjeg retka). Kao i sva ostala polja, mora biti dio jednog od 111 kvadrata. Polje dijagonale i kutno polje mogu biti u istom kvadratu samo ako je se to dijagonalno polje nalazi na sredini dijagonale. Zato da bi kutno polje bilo pokriveno jednim kvadratom, to mora biti kvadrat dimenzija 56×56, koji dijeli originalnu ploču na dvije ploče koje su stepenice od 55 redaka. Svaku od tih novodobiveinh ploča potrebno je podijeliti na po 55 kvadrata.

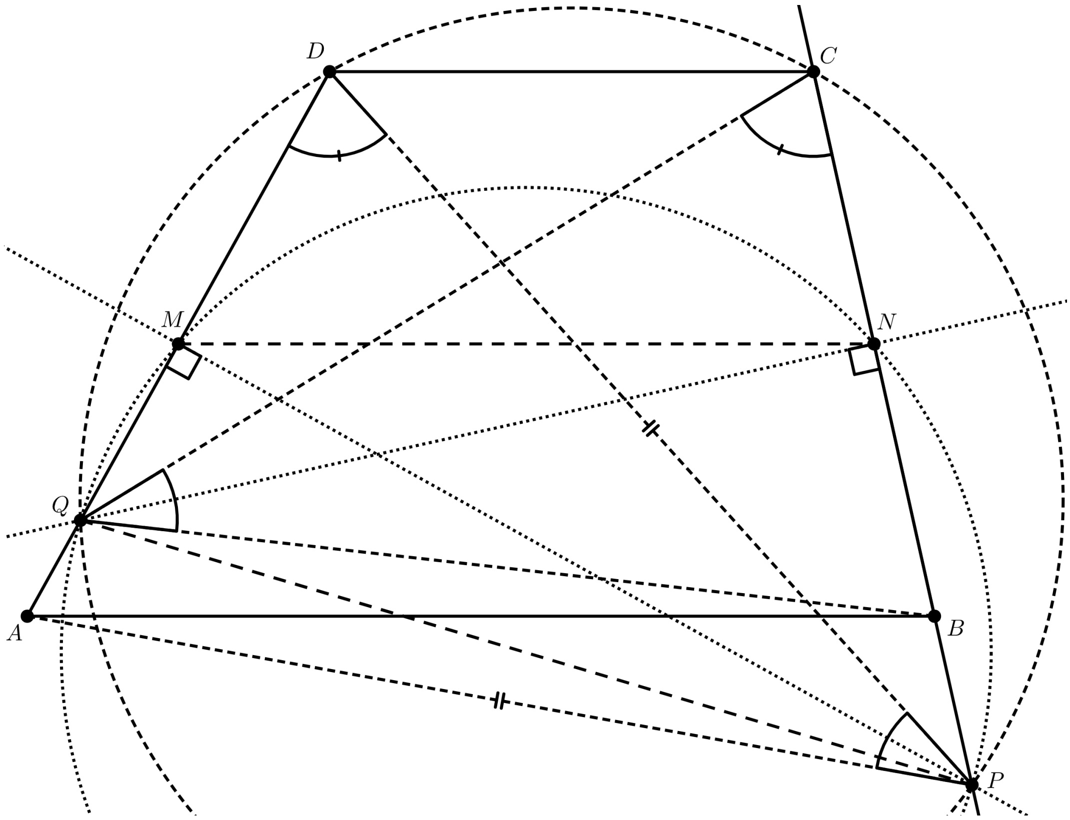
Kutna polja tih manjih ploča ponovno možemo pokriti samo kvadratom dimenzija 28×28 koji pokriva srednje dijagonalno polje tih ploča i dijeli svaku od ploča na po dvije nove ploče koje su stepenice od 27 redaka. I te ploče možemo pokriti kvadratima samo ako je kutno polje pokriveno kvadratom dimenzija 14×14 koje dijeli ploče na stepenice od 13 redaka, a te ploče samo ako je kutno polje pokriveno kvadratom dimenzija 7×7 koje dijeli ploče na stepenice od 6 redaka.

Međutim, stepenice od 6 redaka ne možemo podijeliti na 6 kvadrata budući da nijedan kvadrat ne pokriva istodobno neko polje dijagonale i kutno polje (jer je na dijagonali paran broj polja). Dolazimo do kontradikcije, stepenice se ne mogu podijeliti na 111 kvadrata.

Zadatak A-2.4.

Zadan je trapez $ABCD$ kojemu su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti. Simetrala dužine $\overline{AD}$ siječe pravac BC u točki P, a simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe pravac AD u točki Q. Dokaži da je $\sphericalangle DPA = \sphericalangle BQC$.

Rješenje.



Neka su M i N redom polovišta krakova $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Kako točka P leži na simetrali dužine $\overline{AD}$ koja prolazi kroz njezino polovište M, zaključujemo da je $\sphericalangle QMP = 90°$. Slično zaključujemo i da je $\sphericalangle QNP = 90°$. Kako su nad dužinom $\overline{PQ}$ kutovi pri vrhovima M i N pravi, po Talesovom poučku zaključujemo da je četverokut $QPNM$ tetivan. Zato je zbroj mjera nasuprotnih kutova tog četverokuta jednak $180°$, odnosno $\sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN = 180°$.

Kako je $\overline{MN}$ srednjica trapeza, ta je duzžina paralelna s osnovicom $\overline{AB}$. Prema jednakosti kutova s paralelnim kracima, slijedi

$$\sphericalangle QDC + \sphericalangle QPC = \sphericalangle QMN + \sphericalangle QPN = 180°.$$

Dakle, zbroj mjera dva nasuprotna kuta četverokuta $QPCD$ je jednak $180°$, pa je i taj četverokut tetivan. Zbog jednakosti obodnih kutova nad tetivom $\overline{QP}$ slijedi $\sphericalangle QDP = \sphericalangle QCP$.

Budući da točka P leži na simetrali dužine $\overline{AD}$, jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine, pa je trokut ADP jednakokračan. Kutovi uz osnovicu $\overline{AD}$ su jednaki, pa vrijedi $\sphericalangle DPA = 180° - 2\sphericalangle ADP$. Analognim zaključivanjem za trokut BCQ slijedi $\sphericalangle BQC = 180° - 2\sphericalangle QCB$.

Konačno, dobivamo

$$\sphericalangle DPA = 180^\circ - 2\sphericalangle ADP = 180^\circ - 2\sphericalangle QDP = 180^\circ - 2\sphericalangle QCP = 180^\circ - 2\sphericalangle QCB = \sphericalangle BQC,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-2.5.

Mihael je na ploči zapisao kvadratnu funkciju $f(x)$ s cjelobrojnim koeficijentima. Nakon toga, u svakom je koraku promijenio (povećao ili smanjio) za 1 ili koeficijent uz x ili konstantni član. U zadnjem koraku je na ploči zapisana kvadratna funkcija $g(x)$.

Je li sigurno da je u nekom trenutku na ploči bila zapisana kvadratna funkcija s cjelobrojnim nultočkama ako je

a) $f(x) = x^2 + x + 2024$ i $g(x) = x^2 + 2024x + 1$?

b) $f(x) = x^2 + 2024x + 2024$ i $g(x) = x^2 - 2024x + 2024$?

Rješenje.

Za a) dio zadatka za funkciju koja se u nekom trenutku nalazi na ploči promotrimo njezinu vrijednost u $x = -1$. U svakom je koraku ta vrijednost cjelobrojna te naraste za 1 ili padne za 1, budući da su koeficijenti kvadratne funkcije f cjelobrojni te se u svakom koraku jedan od koeficijenata poveća ili smanji za 1.

Kako je na početku na ploči ta vrijednost $f(-1) = 2024$ pozitivna, a na kraju $g(-1) = -2022$ negativna, te u svakom trenutnu naraste ili padne za 1, u nekom trenutku na ploči sigurno se nalazi kvadratna funkcija $h(x) = x^2 + ax + b$ za koju vrijedi $h(-1) = 0$. Ta funkcija h ima cjelobrojne nultočke: jedna nultočka je -1, a prema Vièteovim formulama druga nultočka joj je $1 - a$. Dakle, za a) dio zadatka, odgovor je da.

Za b) dio zadatka pronaći ćemo niz koraka koji vode od funkcije f do funkcije g takav da se ni u kojem trenutku na ploči ne nalazi funkcija s cjelobrojnim nultočkama.

Označimo s p bilo koji prosti broj veći od 2024. Napravit ćemo sljedeće tri grupe koraka. U prvoj grupi koraka naizmjenično povećavamo za 1 konstantni član pa koeficijent uz x sve dok od funkcije f ne dođemo do funkcije x^2+px+p. U drugoj grupi koraka smanjujemo koeficijent uz x dok ne dođemo do x^2-px+p. U trećoj grupi koraka naizmjenično povećavamo koeficijent uz x pa smanjujemo konstantni član dok ne dođemo do funkcije g.

Dokažimo da se opisanim koracima na ploči nikad neće naći kvadratna funkcija s cjelobrojnim nultočkama. U prvoj grupi koraka na ploči će se uvijek nalaziti funkcija oblika $x^2 + mx + m$ ili $x^2 + mx + (m + 1)$, za neki prirodan broj $m \geqslant 2024$, a u trećoj grupi koraka na ploči će se nalaziti funkcija oblika x^2-mx+m ili $x^2-mx+(m+1)$, za neki prirodan broj $m \geqslant 2024$. Kada bi neka od kvadratnih funkcija imala cjelobrojne nultočke, neka od diskriminanti tih funkcija trebala bi biti potpun kvadrat. Diskriminante tih funkcija su oblika

$$D_1 = m^2 - 4m, \quad D_2 = m^2 - 4(m + 1).$$

Kako je $m \geqslant 2024$, za njih vrijedi

$$(m - 3)^2 = m^2 - 6m + 9 < m^2 - (4m + 1) < m^2 - 4m < m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2.$$

Dakle, nalaze se između dva uzastopna kvadrata prirodna broja, pa ne mogu biti potpuni kvadrati. Time smo dokazali da se u prvoj i trećoj grupi koraka na ploči neće nalaziti kvadratna funkcija s cjelobrojnim koeficijentima.

U drugoj grupi koraka na ploči će se uvijek nalaziti funkcija oblika $x^2 + nx + p$, za neki $n \in \{-p, -p+1, \ldots, p-1, p\}$. Prema Vièteovim formulama umnožak njezinih nultočaka jednak je p. Da bi neka funkcija takvog oblika imala cjelobrojne nultočke x_1 i x_2, te nultočke bi nužno trebale biti 1 i p ili -1 i $-p$. Ponovno prema Vièteovim formulama, koeficijent uz x može biti jednak $\pm(p+1)$. Kako je $|n| \leqslant p$, kvadratna funkcija koja će se pojaviti na ploči u drugoj grupi koraka također neće imati cjelobrojne nultočke.

Time smo pronašli niz koraka koji vode od funkcije f do funkcije g takav da se ni u kojem trenutku na ploči ne nalazi funkcija s cjelobrojnim nultočkama, pa je za b) dio zadatka odgovor ne.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\log_2(4^x + 2^x) + \log_{(4^x+2^x)} 2 = 2.$$

Rješenje.

Iz svojstva logaritama slijedi $\log_{4^x+2^x} 2 = \frac{1}{\log_2(4^x+2^x)}$. Uvođenjem supstitucije $t = \log_2\left(4^x + 2^x\right)$ imamo

$$\begin{aligned} 2 &= t + \frac{1}{t} \\ 0 &= t^2 - 2t + 1, \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je $t = 1$, odnosno $4^x + 2^x = 2$.

Uvođenjem supstitucije $y = 2^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $y^2 + y - 2 = 0$, kojoj su rješenja $y = -2$ i $y = 1$. Kako je $y = 2^x$ nužno pozitivan, odbacujemo mogućnost $y = -2$. Iz $2^x = y = 1$ dobivamo jedino rješenje početne jednadžbe $x = 0$.

Zadatak A-3.2.

Postoje li realni brojevi $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ takvi da su

$$\frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{\sin y} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin(x+y)}$$

prirodni brojevi?

Rješenje.

Pretpostavimo da postoje takvi realni brojevi $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Neka su n i m prirodni brojevi takvi da je $n = \dfrac{1}{\sin x}$ i $m = \dfrac{1}{\sin y}$.

Budući da su $\sin x$, $\sin y$ veći od nule i manji od 1, zaključujemo da su n i m veći od 1.

Kako je broj $\dfrac{1}{\sin(x+y)}$ prirodan, njegova je recipročna vrijednost racionalan broj. Prema adicijskoj formuli vrijedi

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin x \cdot \sqrt{1-\sin^2 y} + \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sin y \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{m^2-1}}{m} + \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{m^2-1} + \sqrt{n^2-1}}{mn}. \end{aligned}$$

Brojnik tog izraza

$$q = \sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 1}$$

nužno je racionalan broj. Kvadriranjem jednadžbe

$$\sqrt{n^2 - 1} = q - \sqrt{m^2 - 1}$$

dobivamo

$$n^2 - 1 = q^2 - 2q\sqrt{m^2 - 1} + m^2 - 1,$$

odakle zaključujemo da je nužno $\sqrt{m^2 - 1}$ racionalan broj.

Dokažimo da taj broj ne može biti racionalan. Pretpostavimo suprotno, postoje prirodni brojevi a i b takvi da je

$$\sqrt{m^2 - 1} = \frac{a}{b}$$

Neka su bez smanjenja općenitosti a i b relativno prosti. Kvadriranjem dobivamo

$$m^2 - 1 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Kako je broj s lijeve strane prirodan, takav mora biti i s desne, što je moguće samo ako $b^2 \mid a^2$. Kako su a i b relativno prosti, to je moguće samo ako je $b = 1$. Dobivamo jednakost

$$m^2 - 1 = a^2.$$

Kako je $(m-1)^2 < m^2 - 1 < m^2$ (prva nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve m veće od 1), broj $m^2 - 1$ ne može biti potpun kvadrat čime dolazimo do kontradikcije.

Dakle, brojevi

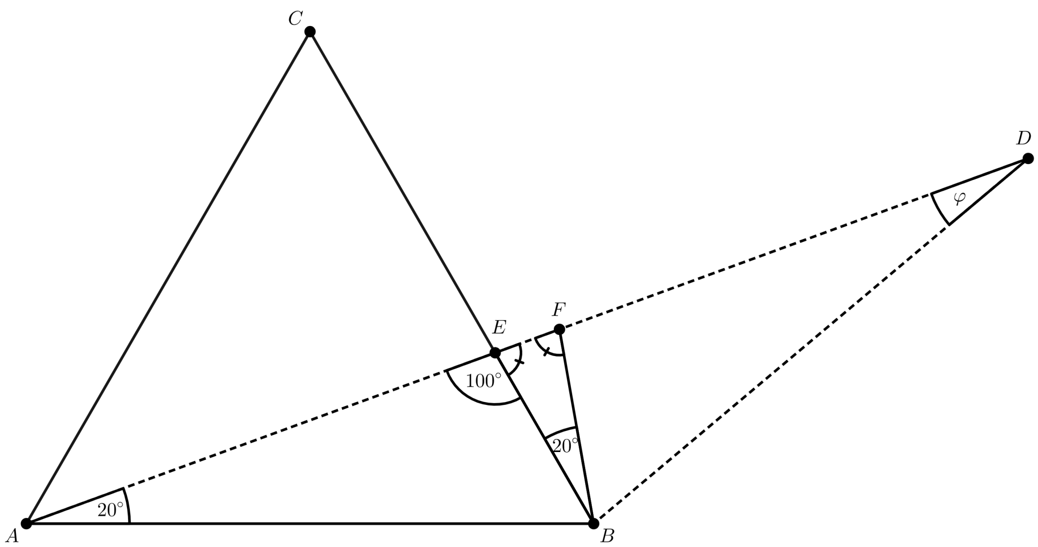
$$\frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{\sin y} \quad \text{i} \quad \frac{1}{\sin(x+y)}$$

ne mogu istodobno biti prirodni ni za koje $x, y \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Zadatak A-3.3.

Dan je jednakostranični trokut ABC. Dužina $\overline{AD}$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki E, a pritom je $\sphericalangle BAD = 20^\circ$ i $|DE| = |AB|$. Odredi $\sphericalangle ADB$.

Prvo rješenje.



Označimo $\sphericalangle ADB = \varphi$.

Promatranjem unutarnjih kutova trokuta ABE dobivamo

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - \sphericalangle BAE - \sphericalangle ABE = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ = 100^\circ.$$

Primjenom poučka o sinusima u trokutu ABE slijedi

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{\sin \sphericalangle BAE}{\sin \sphericalangle AEB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ},$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili $\sin x = \sin(180^\circ - x)$.

Promotrimo sada trokut BED. Vrijedi $\sphericalangle BED = 180^\circ - \sphericalangle BEA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ pa je zato $\sphericalangle EBD = 180^\circ - \sphericalangle BED - \sphericalangle BDE = 180^\circ - 100^\circ - \varphi = 100^\circ - \varphi$. Ponovnom primjenom primjenom poučka o sinusima dobivamo

$$\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{\sin \sphericalangle BDE}{\sin \sphericalangle EBD} = \frac{\sin \varphi}{\sin(100^\circ - \varphi)}.$$

Budući da je prema uvjetu zadatka $|DE| = |AB|$, vrijedi

$$\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|DE|} = \frac{\sin \varphi}{\sin(100^\circ - \varphi)}.$$

Zato je

$$\sin 20^\circ \sin(100^\circ - \varphi) = \sin 80^\circ \sin \varphi.$$

Primjenom formule pretvorbe umnoška sinusa slijedi

$$\cos(\varphi - 80^\circ) - \cos(120^\circ - \varphi) = \cos(80^\circ - \varphi) - \cos(80^\circ + \varphi),$$

pa korištenjem parnosti funkcije kosinus slijedi

$$\cos(120^\circ - \varphi) = \cos(80^\circ + \varphi).$$

Budući da je φ unutarnji kut trokuta ABD, njegova je mjera manja je od mjere vanjskog kuta $\sphericalangle AEB = 100^\circ$. Zato su obje mjere $120^\circ - \varphi$ i $80^\circ + \varphi$ između 0° i 180°. Dakle, da bi im kosinusi imali jednaku vrijednost, jedino je moguće da su te mjere jednake. Dobivamo $120^\circ - \varphi = 80^\circ + \varphi$, odakle je $\varphi = 20^\circ$.

Drugo rješenje.

Neka je točka F na dužini $\overline{DE}$ takva da je $\sphericalangle EBF = 20^\circ$.

Imamo

$$\sphericalangle BFA = 180^\circ - \sphericalangle BAF - \sphericalangle ABF = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$$
$$\sphericalangle BEF = 180^\circ - \sphericalangle EBF - \sphericalangle BFE = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ,$$

pa je zato trokut BDF jednakokračan, te je $|BE| = |BF|$.

Jednako tako, zbog $\sphericalangle BFA = \sphericalangle FBA = 80^\circ$ slijedi i da je trokut ABF jednakokračan, $|AB| = |AF|$.

Promotrimo sada trokute ABF i DEB. Zbog $|AB| = |DE|$, $|BF| = |EB|$ i $\sphericalangle ABF = \sphericalangle DEB = 80^\circ$ slijedi da su ti trokuti sukladni prema S–K–S poučku o sukladnosti. Zato imamo

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDB = \sphericalangle BAF = 20^\circ.$$

Zadatak A-3.4.

Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $1 < a < b$ i da vrijedi

$$a + b \mid ab + 1 \quad \text{i} \quad b - a \mid ab - 1.$$

Dokaži da je $b < a\sqrt{3}$.

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka, izraz $a+b$ dijeli $ab+1$, te dijeli i broj $a(a+b)$, pa dijeli i njihovu razliku:

$$a + b \mid ab + 1 - a(a + b) = ab + 1 - a^2 - ab = 1 - a^2.$$

Analogno:

$$b - a \mid ab - 1 - a(b - a) = ab - 1 - ab + a^2 = a^2 - 1.$$

Zaključujemo da oba broja $m \coloneqq b + a$ i $n \coloneqq b - a$ dijele prirodan broj $a^2 - 1$, pa to vrijedi i za najmanji zajednički višekratnik tih brojeva $V(m, n)$. Posebno, vrijedi

$$V(m, n) \leqslant a^2 - 1.$$

Primijetimo da su brojevi a i b relativno prosti. U suprotnom, postoji $d > 1$ koji dijeli a i b, pa dijeli i njihovu sumu $a + b$, a prema uvjetu zadatka dijeli i $ab + 1$. Kako $d \mid ab$, dobivamo $d \mid 1$, što je u kontradikciji s $d > 1$.

Kako je $D(m, n) = D(a + b, a - b) = D(a + b, 2a)$, te kako su a i b relativno prosti, taj djelitelj može biti jednak 1 ili 2. Iz relacije $D(m, n) \cdot V(m, n) = mn$ zaključujemo da za najmanji zajednički višekratnik brojeva $V(m, n)$ vrijedi

$$V(m, n) = \frac{mn}{D(m, n)} \geqslant \frac{mn}{2}.$$

Korištenjem dviju dobivenih nejednakosti dobivamo

$$\frac{(a + b)(b - a)}{2} = \frac{mn}{2} \leqslant V(m, n) \leqslant a^2 - 1$$

odakle je $b^2 - a^2 \leqslant 2(a^2 - 1) < 2a^2$, odnosno $b^2 < 3a^2$. Kako su a i b prirodni, vrijedi $b < a\sqrt{3}$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-3.5.

U igri za dva igrača koristi se 101 praznih kutija i dovoljna količina žetona. Igrači, Ema i Lovro, naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu, igrač stavlja po jedan žeton u sto različitih kutija. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza u jednoj od kutija bude 201 žeton. Ako Ema igra prva, koji od igrača može osigurati pobjedu?

Rješenje.

Kako bi igrač koji želi pobijediti stavio u neku kutiju 201. žeton, prije njegovog zadnjeg poteza u nekoj kutiji mora se nalaziti 200 žetona. To se može dogoditi najranije u 200. potezu (tj. nakon 100 Eminih i Lovrinih poteza), budući da se u k-tom potezu u svakoj kutiji nalazi najviše k žetona. S druge strane, prvo pojavljivanje kutije od 200 žetona može se dogoditi najkasnije u 201. potezu: nakon bilo kojih 201 poteza na 101 kutiju raspoređeno je $20100 > 199 \cdot 101$ žetona, pa prema Dirichletovom principu mora postojati kutija koja sadrži barem 200 žetona.

Zato da bi Lovro pobijedio u ovoj igri mora spriječiti da se u 200. potezu pojavi neka kutija s 200 žetona, budući da će u 202. (svojem 101.) potezu moći odigrati pobjednički potez tako da postavi žeton u kutiju s 200 žetona i bilo kojih drugih 99 kutija.

Neka bez smanjenja općenitosti Ema u prvom potezu stavi žeton u svaku kutiju osim zadnje. Tada Lovro u svojem prvom potezu postavlja žeton u svaku kutiju osim prve, u svojem drugom potezu postavlja žeton u svaku kutiju osim druge, $\ldots$, u svojem 100. potezu postavlja žeton u svaku kutiju osim predzadnje. Tih 100 poteza radi neovisno o preostalih 99 poteza koje Ema u međuvremenu napravi.

Na ovaj način je u prvih 200 odigranih poteza za svaku kutiju postojao potez u kojem nije bilo postavljanja žetona u tu kutiju, pa se u svakoj kutiji nalazi najviše 199 žetona. Zato Ema ne može pobijediti u svojem 101. potezu, pa Lovro može osigurati pobjedu u ovoj igri u svojem 101. potezu.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Vodice, 23. travnja 2024.

Zadatak A-4.1.

Koristeći niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definirana su dva nova niza, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tako da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$b_n = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad c_n = a_{n+2} - a_{n+1}.$$

Ako je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički, dokaži da je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz.

Rješenje.

Kako je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aritmetički, svaki njegov član nakon prvog jednak je aritmetičkoj sredini njegovog prethodnika i sljedbenika. Za sve $n \in \mathbb{N}$ slijedi

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{b_n + b_{n+2}}{2} \\
a_{n+2} - \sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \frac{1}{2}\left(a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+3} - \sum_{i=1}^{n+2} a_i\right) \\
2a_{n+2} - a_{n+1} - a_{n+3} &= 2\sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n+2} a_i \\
(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+3} - a_{n+2}) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n+2} a_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i\right).
\end{aligned}$$

Korištenjem definicije niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te činjenice da se parovi suma u zagradama na desnoj strani razlikuju za po jedan pribrojnik, dalje dobivamo

$$\begin{aligned}
c_n - c_{n+1} &= a_{n+1} - a_{n+2} = -c_n \\
c_{n+1} &= 2c_n.
\end{aligned}$$

Kako gornja jednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da je niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski s kvocijentom 2.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(f(x) - y^2) = yf(x^2).$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $y = 1$ u početnu jednakost dobivamo

$$f(f(x) - 1) = f(x^2)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, a uvrštavanjem $y = -1$ dobivamo

$$f(f(x) - 1) = -f(x^2)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Izjednačavanjem te dvije jednakosti slijedi $f(x^2) = 0$, odakle zaključujemo da je $f(z) = 0$ za svaki $z \geqslant 0$.

Posebno, $f(0) = 0$, pa ako uvrstimo $x = 0$ u početnu jednakost, dobivamo $f(-y^2) = 0$, odnosno $f(z) = 0$ za svaki $z \leqslant 0$.

Kako je $f(z) = 0$ za sve $z \geqslant 0$ i $z \leqslant 0$, zaključujemo da je jedino moguće rješenje funkcija $f(x) = 0$. Direktnom provjerom utvrđujemo da to zaista jest rješenje.

Zadatak A-4.3.

Za prirodan broj n neka je $T(n)$ broj uređenih trojki prirodnih brojeva (a, b, c) za koje postoji trokut sa stranicama duljina a, b i c čiji je opseg jednak n.

a) Dokaži da je $T(2024) = T(2021)$.

b) Dokaži da je $T(2023) > T(2020)$.

Rješenje.

Nazovimo uređenu trojku prirodnih brojeva *dozvoljenom* ako postoji trokut sa stranicama duljina a, b i c. Svaka uređena trojka (a, b, c) je dozvoljena ako i samo vrijede nejednakosti trokuta:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

Nad dozvoljenim trojkama definiramo *operaciju uvećavanja* tako da svakom članu trojke (a, b, c) pridodamo broj 1, odnosno dobijemo trojku $(a + 1, b + 1, c + 1)$.

Dokažimo da ako je trojka (a, b, c) dozvoljena, da je tada i trojka brojeva dobivena operacijom uvećavanja ponovno dozvoljena. U to se možemo uvjeriti jer i za tu uvećanu trojku vrijede nejednakosti trokuta:

$$(a + 1) + (b + 1) > a + b + 1 > c + 1$$

(analogno i preostale dvije nejednakosti).

Zato za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost $T(n + 3) \geqslant T(n)$: za svaku od dozvoljenih trojki kojoj je suma članova jednaka n postoji jedna dozvoljena trojka kojoj je suma članova $n + 3$ dobivena operacijom uvećavanja od te trojke, a te sve trojke su međusobno različite.

Da dokažemo $T(2023) > T(2020)$, dovoljno je pokazati da postoji jedna dozvoljena trojka kojoj je suma članova 2023, a nije dobivena operacijom uvećavanja. Takva trojka $(1011, 1011, 1)$: za nju vrijede sve nejednakosti trokuta pa je dozvoljena, a nije dobivena operacijom uvećavanja od neke trojke prirodnih brojeva jer joj je treći član jednak 1.

Da dokažemo $T(2024) = T(2021)$, potrebno je dokazati da operacijom uvećavanja od trojki kojima je suma 2021 možemo dobiti sve dozvoljene trojke kojima je suma 2021. Pretpostavimo da postoji neka trojka (a, b, c) takva da je $a + b + c = 2024$, a nije dobivena operacijom uvećavanja. Prvo dokažimo da nijedan od članova a, b i c ne može biti jednak 1. U suprotnom, ako bez smanjenja općenitosti vrijedi $c = 1$, iz nejednakosti trokuta slijedi

$$a + 1 = a + c > b, \quad \text{i} \quad b + 1 = b + c > a,$$

odakle je nužno $b = a$. No, tada je $a + b + c = 2a + 1$ neparan broj, pa nije jednak broju 2024.

Kako je broj $a + b - c = 2024 - 2c$ paran broj veći od nule, on je veći ili jednak 2, pa vrijedi $a + b - c \geqslant 2$, odnosno

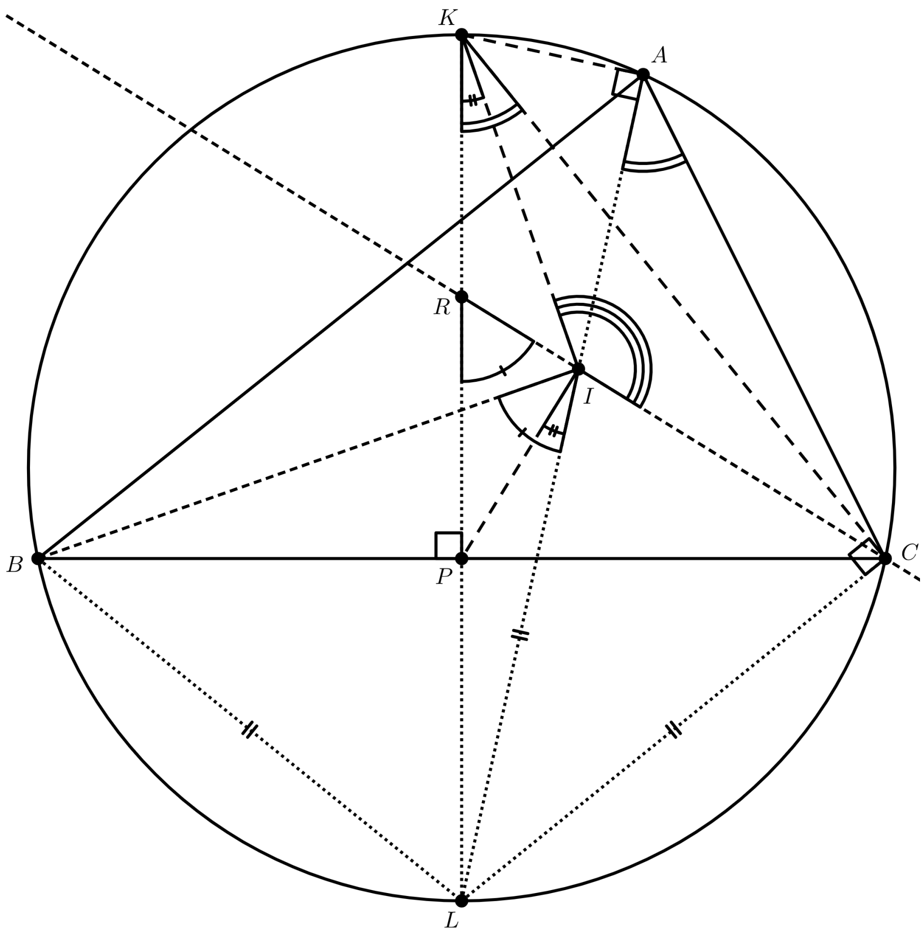
$$(a - 1) + (b - 1) \geqslant c > c - 1.$$

Analogno možemo dokazati i druge dvije nejednakosti, pokazujući da je zaista svaka dozvoljena trojka (a, b, c) kojoj je suma članova jednaka 2024 nastala operacijom uvećavanja dozvoljene trojke $(a - 1, b - 1, c - 1)$ sume članova 2021, što dokazuje $T(2024) = T(2021)$.

Zadatak A-4.4.

Neka je ABC šiljastokutan trokut u kojemu je $|AB| > |AC|$, točka I središte njemu upisane kružnice, a P polovište dužine $\overline{BC}$. Neka je K polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC koji sadrži točku A. Dokaži da vrijedi $\sphericalangle BIP + \sphericalangle CIK = 180°$.

Rješenje.



Označimo s α, β i γ mjere kutova trokuta ABC pri vrhovima A, B i C, te s k kružnicu opisanu trokutu ABC. Neka je točka L polovište luka $\widehat{BC}$ koji ne sadrži točku A.

Kako je L polovište luka $\widehat{BC}$, vrijedi $\sphericalangle LAC = \sphericalangle BAL = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \frac{\alpha}{2}$. Iz jednakosti obodnih kutova nad tetivom $\overline{BL}$ kružnice k slijedi $\sphericalangle BCL = \sphericalangle BAL = \frac{\alpha}{2}$. Kako I leži na simetrali kuta $\sphericalangle BCA$, dobivamo $\sphericalangle ICL = \sphericalangle ICB + \sphericalangle BCL = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Iz jednakosti kutova nad tetivom $\overline{CA}$ kružnice k slijedi $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ABC = \beta$. Za preostali kut trokuta ILC vrijedi

$$\sphericalangle ILC = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \sphericalangle ICL,$$

odakle zaključujemo da je trokut ILC jednakokračan, pa je zato $|IL| = |CL|$. Analogno se dokaže da je i trokut ILB jednakokračan.

Točke K i L polovišta su lukova $\widehat{BC}$, pa leže na simetrali stranice $\overline{BC}$. Na njemu leži i središte kružnice k, pa je dužina $\overline{KL}$ promjer kružnice k. Po Talesovom poučku obodni kutovi nad tom dužinom su pravi, pa je zato $\sphericalangle KAL = 90^\circ$ i $\sphericalangle KCL = 90^\circ$. Iz jednakosti kutova nad tetivom $\overline{CL}$ u kružnici k slijedi $\sphericalangle CKL = \sphericalangle CAL = \frac{\alpha}{2}$. Zato su trokuti KLC i CLP pravokutni kojima je mjera jednog kuta uz hipotenuzu jednaka $\frac{\alpha}{2}$, pa su slični. Iz te sličnosti slijedi

$$\frac{|CL|}{|PL|} = \frac{|KL|}{|CL|}.$$

Koristeći $|CL| = |IL|$, dobivamo

$$\frac{|IL|}{|PL|} = \frac{|KL|}{|IL|}.$$

Zato su trokuti LIK i LPI koji imaju zajednički kut pri vrhu L slični, pa je $\sphericalangle IKL = \sphericalangle PIL$.

Označimo s R sjecište pravca LK i CI. Iz trokuta CRL imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle CRL &= 180^\circ - \sphericalangle RLC - \sphericalangle RCL = 180^\circ - \sphericalangle KLC - \sphericalangle ICL \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \sphericalangle LKC) - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

S druge strane, činjenica da je trokut ILB jednakokračan povlači

$$\sphericalangle BIL = \sphericalangle IBL = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBL = \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

odakle zaključujemo $\sphericalangle BIL = \sphericalangle CRL$.

Konačno, koristeći činjenicu da je $\sphericalangle CRL$ vanjski u trokutu RIK, dobivamo

$$\sphericalangle BIP = \sphericalangle BIL - \sphericalangle PIL = \sphericalangle CRL - \sphericalangle IKL = \sphericalangle RIK = 180^\circ - \sphericalangle CIK,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak A-4.5.

Neka $d(k)$ označava broj prirodnih djelitelja broja k. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = d(n!).$$

Prvo rješenje.

Direktnom provjerom vidimo da je za brojeve n redom 1, 2, 3, 4, 5 vrijednost $d(n)$ jednaka redom 1, 2, 2, 3, 2, pa je zbroj brojeva djelitelja prvih n prirodnih brojeva redom jednak 1, 3, 5, 8, 10. S druge strane $n!$ redom iznosi 1, 2, 6, 24, 120. a njihovi brojevi djelitelja su redom 1, 2, 4, 8, 16. Vidimo da su za $n \leqslant 5$ jedina dva rješenja $n = 1$ i $n = 4$, dok za $n = 5$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{5} d(k) = 10 < 16 = d(5!).$$

Matematičkom indukcijom dokazat ćemo tvrdnju: za sve prirodne brojeve $n \geqslant 5$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) < d(n!).$$

Time ćemo dokazati da su $n = 1$ i $n = 4$ jedini prirodni brojevi s traženim svojstvom.

Baza indukcije za $n = 5$ je gore dokazana. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n. U koraku indukcije treba dokazati tvrdnju za $n + 1$. Koristeći pretpostavku indukcije slijedi

$$\sum_{k=1}^{n+1} d(k) = \sum_{k=1}^{n} d(k) + d(n+1) < d(n!) + d(n+1).$$

Da bismo dokazali tvrdnju za broj $n + 1$ potrebno je dokazati nejednakost

$$d(n!) + d(n+1) \leqslant d\left((n+1)!\right).$$

Svaki djelitelj broja $n!$ ujedno je i djelitelj broja $(n + 1)!$; takvih djelitelja je $d(n!)$. Nadalje, za svaki djelitelj r broja $n + 1$ veći od 1, broj $r \cdot n!$ djelitelj je broja $(n + 1)!$, a nije djelitelj broja $n!$; takvih djelitelja je $d(n + 1) - 1$.

Konačno, neka je p neki prosti djelitelj od $n + 1$ i neka je p^k najveća potencija broja p koja dijeli $n!$. Tada p^{k+1} dijeli $(n + 1)!$, ali ne dijeli $n!$. Također, p^{k+1} nije oblika $r \cdot n!$ jer $n!$ ima barem 2 različita prosta faktora za $n \geqslant 5$.

Brojeći p^{k+1}, pronašli smo $d(n!)+(d(n+1)-1)+1$ različitih djelitelja broja $d\left((n+1)!\right)$, čime je nejednakost $d(n!)+d(n+1) \leqslant d\left((n+1)!\right)$ dokazana. To dovršava korak indukcije, pa i tvrdnju indukcije. Zato su zaista jedini brojevi koji zadovoljavaju uvjete zadatka $n = 1$ i $n = 4$.

Drugo rješenje.

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ trivijalno je zadovoljena nejednakost $d(k) \leqslant k$, pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Za $n \geqslant 7$, prebrojimo djelitelje broja $n!$ koji su oblika $2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}7^{a_4}$, za neke nenegativne cijele brojeve a_1, a_2, a_3 i a_4. Ukupan broj takvih djelitelja je jednak $(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)(r_4+1)$, gdje su r_1, r_2, r_3 i r_4 prirodni brojevi iz rastava broja $n!$ na proste faktore:

$$n! = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3} \cdot 7^{r_4} \cdots ,$$

budući da za svaki od takvih djelitelja treba vrijediti $0 \leqslant a_i \leqslant r_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Kako je svaki drugi prirodan broj paran, postoji barem $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{n-1}{2}$ parnih brojeva manjih ili jednakih n. Svaki od tih brojeva u umnošku $n!$ doprinosi za barem jedan u eksponentu r_1, pa zaključujemo $r_1 \geqslant \frac{n-1}{2}$. Slično, kako je svaki treći prirodan broj djeljiv s 3, zaključujemo $r_2 \geqslant \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \geqslant \frac{n-2}{3}$.

Kako je $n \geqslant 7$, znamo da je $r_3 \geqslant 1$ i $r_4 \geqslant 1$. Iz svega navedenog, slijedi

$$d(n!) \geqslant (r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)(r_4+1) \geqslant \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{2(n+1)^2}{3}.$$

Iz uvjeta zadatka i koristeći prvu nejednakost, dobivamo da nužno vrijedi

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} d(k) = d(n!) \geqslant \frac{2(n+1)^2}{3}.$$

Međutim, ta je nejednakost ekvivalentna s

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &\geqslant \frac{2(n+1)}{3} \\ 3n &\geqslant 4n+4, \end{aligned}$$

što očito ne vrijedi ni za koji prirodan broj n. Zato nam je početna pretpostavka bila kriva, pa je nužno $n \leqslant 6$.

Kao na početku prvog rješenja direktno provjerimo vrijednosti za $n \leqslant 5$, dok ni za $n = 6$ ne dobivamo rješenje jer je suma djelitelja prvih 6 prirodnih brojeva jednaka 14, dok je $d(6!) = d(720) = 30$.