ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Odredi prirodni broj n takav da broj $(4^{n-1} : (2 \cdot 8^{-n-1})) \cdot (25^n : 5^{2n-1})^{5n} - 1$ ima 10120 znamenki.

Rješenje.

Sređivanjem zadanog izraza dobiva se:

$(4^{n-1} : (2 \cdot 8^{-n-1})) \cdot (25^n : 5^{2n-1})^{5n} - 1 =$

$(2^{2n-2} : (2^{-3n-2})) \cdot (5^{2n} : 5^{2n-1})^{5n} - 1 =$

$(2^{5n}) \cdot (5^{5n}) - 1 =$

$10^{5n} - 1$ 4 boda

Kako je $10^{5n} = 1\underbrace{000...0}_{5n \text{ nula}}$ slijedi da je $10^{5n} - 1 = \underbrace{999...9}_{5n \text{ devetki}}$.

Dakle, broj $(4^{n-1} : (2 \cdot 8^{-n-1})) \cdot (25^n : 5^{2n-1})^{5n} - 1$ ima $5n$ znamenki.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $5n = 10120$, te stoga zaključujemo da je $n = 2024$. 2 boda

Zadatak B-1.2.

Na maturalnom je plesu bilo ukupno 46 djevojaka i mladića. Prva je djevojka plesala s 9 mladića, a svaka sljedeća s jednim mladićem više. Ako je posljednja djevojka plesala sa svim prisutnim mladićima, koliko je bilo djevojaka, a koliko mladića na maturalnom plesu?

Rješenje.

Označimo s n broj djevojaka prisutnih na maturalnom plesu. Tada je broj mladića jednak $46 - n$.

Prva je djevojka plesala s 9 mladića, druga s 10 mladića ili $9 + 1$, treća s 11 ili $9 + 2$, ..., posljednja tj. n-ta djevojka s $9 + (n - 1) = n + 8$ mladića. 2 boda

Taj je broj jednak ukupnom broju mladića, odnosno vrijedi $46 - n = n + 8$ mladića. 2 boda

Iz ove jednakosti slijedi da je $n = 19$. 1 bod

Dakle, na plesu je bilo prisutno 19 djevojaka i 27 mladića. 1 bod

Zadatak B-1.3.

Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x^{-1} - y^{-1} = 4$ i $xy = \frac{1}{4}$, koliko je $x^{-4} + y^{-4}$?

Rješenje.

Kvadriranjem jednakosti $x^{-1} - y^{-1} = 4$ dobivamo $x^{-2} - 2x^{-1}y^{-1} + y^{-2} = 16$. 1 bod

Uvrstimo li u dobivenu jednakost da je $x^{-1}y^{-1} = 4$ zaključujemo da je $x^{-2} + y^{-2} = 24$.

2 boda

Kvadriramo li prethodnu jednakost slijedi da je $x^{-4} + 2x^{-2}y^{-2} + y^{-4} = 576$. 1 bod

Nadalje, kako iz $x^{-1}y^{-1} = 4$ slijedi da je $x^{-2}y^{-2} = 16$, uvrštavanjem u $x^{-4} + 2x^{-2}y^{-2} + y^{-4} = 576$, konačno dobivamo da je $x^{-4} + y^{-4} = 544$. 2 boda

Zadatak B-1.4.

Cijelom broju $a \neq 1$ dodamo njegov kvadrat i oduzmemo jedan, pa dobiveni broj podijelimo brojem $a - 1$. Za koji je cijeli broj a tako dobiveni količnik cijeli broj?

Rješenje.

Dakle, treba odrediti sve cijele brojeve a za koje je razlomak $\dfrac{a + a^2 - 1}{a - 1}$ cijeli broj. 1 bod

Taj razlomak možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\frac{a + a^2 - 1}{a - 1} = \frac{a^2 - 1 + a}{a - 1} = \frac{(a-1)(a+1) + (a-1) + 1}{a - 1} =$$

$$\frac{(a-1)(a+1)}{a-1} + \frac{a-1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = a + 1 + 1 + \frac{1}{a-1} = a + 2 + \frac{1}{a-1}.$$ 3 boda

Sad je očito da će razlomak $\dfrac{a + a^2 - 1}{a - 1}$ biti cijeli broj samo ako je razlomak $\dfrac{1}{a-1}$ cijeli broj, tj. ako je $a - 1$ jednako -1 ili 1. Dakle, $a \in \{0, 2\}$. 2 boda

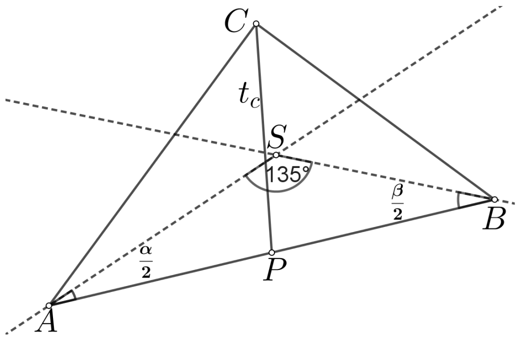
Napomena: Ako učenik pogodi rješenja za svako pogođeno rješenje dobiva po jedan bod.

Zadatak B-1.5.

Duljina stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC jednaka je 10 cm. Simetrale unutarnjih kutova pri vrhovima A i B sijeku se u točki S tako da je $\sphericalangle BSA = 135°$. Izračunaj duljinu težišnice povučene iz vrha C.

Rješenje.

Neka je $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle CBA$ i $\gamma = \sphericalangle BCA$.



Kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, iz trokuta ABS dobivamo

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135^\circ = 180^\circ,$$

odnosno $\alpha + \beta = 90^\circ$. 2 boda

Dakle, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$. 1 bod

Prema tome, trokut ABC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu C, te je točka P polovište hipotenuze i ujedno središte trokutu ABC opisane kružnice. 1 bod

Konačno, duljina težišnice je $|CP| = |AP| = |BP| = \frac{1}{2}|AB| = 5\,\text{cm}$. 2 boda

Zadatak B-1.6.

Odredi sve parove cijelih brojeva x i y takvih da je $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$.

Rješenje.

Izraz $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y$ možemo zapisati u obliku $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = (x + 3y)^2 - y^2 + 3x + 6y$ odakle faktorizacijom dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$(x + 3y)^2 - y^2 + 3x + 6y = (x + 2y)(x + 4y) + 3(x + 2y) = (x + 2y)(x + 4y + 3)$$ 4 boda

Dakle, vrijedi $(x + 2y)(x + 4y + 3) = 2$.

Kako su x i y cijeli brojevi zaključujemo da je jedan od faktora izraza $(x+2y)(x+4y+3)$ jednak 1, a drugi 2 ili je jedan od faktora jednak -1, a drugi -2. 2 boda

Rješavanjem sustava $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 4y + 3 = 1 \end{cases}$ dobivamo $x = 6$ i $y = -2$. 1 bod

Iz $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 4y + 3 = 2 \end{cases}$ dobivamo $x = 3$ i $y = -1$. 1 bod

Analogno, rješavanjem sustava $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ x + 4y + 3 = -1 \end{cases}$ nalazimo da je $x = 0$, $y = -1$, 1 bod a iz sustava $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+4y+3=-2 \end{cases}$ dobivamo $x=3$ i $y=-2$. 1 bod

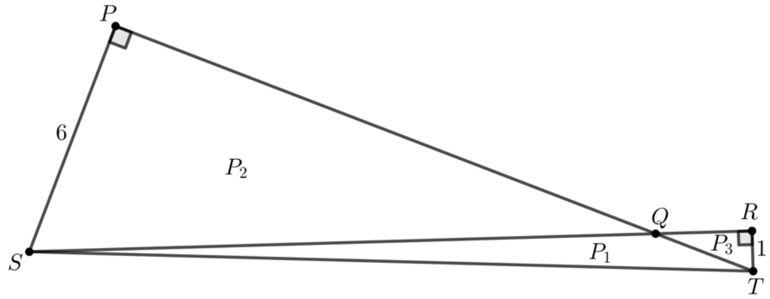
Dakle, imamo četiri rješenja: $(6,-2)$, $(3,-1)$, $(0,-1)$, $(3,-2)$

Napomena: Ako učenik pogodi rješenja za svako pogođeno rješenje dobiva po jedan bod.

Zadatak B-1.7.

Dva pravokutna trokuta PST i RST imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{ST}$. Vrhovi P i R nalaze se s iste strane hipotenuze $\overline{ST}$. Katete $\overline{PT}$ i $\overline{RS}$ sijeku se u točki Q. Ako je $|PS|=6$ cm, $|PT|=17$ cm i $|RT|=1$ cm, kolika je površina trokuta QST?

Prvo rješenje.



Označimo površinu trokuta QST s P_1, površinu PSQ s P_2 i površinu trokuta RQT s P_3.

Kako je trokut PST pravokutan, primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|ST|^2=|PS|^2+|PT|^2=36+289=325$$

1 bod

Primijenimo li Pitagorin poučak na trokut RST slijedi

$$|RS|=\sqrt{|ST|^2-|RT|^2}=\sqrt{325-1}=\sqrt{324}=18 \text{ cm}.$$

1 bod

Trokut PST sastoji se od trokuta PSQ i QST pa je površina trokuta PST jednaka

$$P_1+P_2=\frac{|PS|\cdot|PT|}{2}=\frac{6\cdot 17}{2}=51 \text{ cm}^2.$$

1 bod

Trokut RST sastoji se od trokuta RQT i QST pa je površina trokuta RST jednaka

$$P_1+P_3=\frac{|RT|\cdot|RS|}{2}=\frac{1\cdot 18}{2}=9 \text{ cm}^2.$$

1 bod

Trokuti PQS i RQT su pravokutni, s pravim kutom u vrhu P odnosno u vrhu R te je $|\sphericalangle PQT| = |\sphericalangle RQT|$.

Prema KK poučku o sličnosti slijedi da su trokuti PQS i RQT slični, s koeficijentom sličnosti $k = \frac{|RT|}{|PS|} = \frac{1}{6}$. 2 boda

Stoga je $\frac{P_3}{P_2} = k^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ tj. $P_3 = \frac{1}{36}P_2$. 2 boda

Konačno, rješavanjem sustava jednadžbi $\begin{cases} P_1 + P_2 = 51 \\ P_1 + P_3 = 9 \\ P_3 = \frac{1}{36}P_2 \end{cases}$ dobivamo da je $P_1 = \frac{39}{5}$. 2 boda

Dakle, tražena površina je $\dfrac{39}{5}$ cm^2.

Drugo rješenje.

Uz oznake kao u prvom rješenju, primijenimo li Pitagorin poučak na trokute PST i RST dobivamo:

$$|ST|^2 = |PS|^2 + |PT|^2 = 36 + 289 = 325$$

1 bod

$$|RS| = \sqrt{|ST|^2 - |RT|^2} = \sqrt{325 - 1} = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}.$$

1 bod

Trokuti PQS i RQT su pravokutni, s pravim kutom u vrhu P odnosno u vrhu R te je $|\sphericalangle PQT| = |\sphericalangle RQT|$.

Stoga, prema KK poučku o sličnosti slijedi da su trokuti PQS i RQT slični, s koeficijentom sličnosti $k = \dfrac{|RT|}{|PS|} = \dfrac{1}{6}$. 2 boda

Stoga je

$\dfrac{|TQ|}{18 - |RQ|} = \dfrac{1}{6}$ i $\dfrac{|RQ|}{17 - |TQ|} = \dfrac{1}{6}$. 2 boda

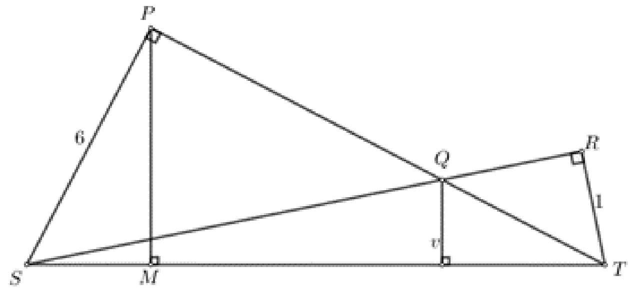
Rješavanjem ovog sustava dobivamo $|RQ| = \dfrac{12}{5}$ cm. 1 bod

Dakle, površina trokuta RQT je $P_3 = \dfrac{|RT| \cdot |RQ|}{2} = \dfrac{1 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \dfrac{6}{5}$ cm^2. 1 bod

Kako je $P_3 + P_1 = \dfrac{|RT| \cdot |RS|}{2} = \dfrac{1 \cdot 18}{2} = 9$, slijedi da je $P_1 = 9 - P_3 = 9 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{39}{5}$ cm^2.

2 boda

Treće rješenje.



Uz oznake kao u prvom rješenju, primijenimo li Pitagorin poučak na trokute PST i RST dobivamo:

$$|ST|^2 = |PS|^2 + |PT|^2 = 36 + 289 = 325$$

1 bod

$$|RS| = \sqrt{|ST|^2 - |RT|^2} = \sqrt{325 - 1} = \sqrt{324} = 18 \text{ cm.}$$

1 bod

Izračunajmo duljinu visine $|PM|$ na hipotenuzu u trokutu PST.

$$|PM| = \frac{|PS| \cdot |PT|}{|ST|} = \frac{102}{5\sqrt{13}}.$$ 1 bod

Neka je v visina trokuta QST. Primijenimo li Talesov poučak o proporcionalnosti odsječaka paralelnih pravaca unutar kuta $\sphericalangle PTS$ dobivamo:

$$\frac{|TQ|}{v} = \frac{|PT|}{|PM|} = \frac{17}{\frac{102}{5\sqrt{13}}} = \frac{5\sqrt{13}}{6},$$

odnosno

$$v = \frac{6|TQ|}{5\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{65}|TQ|.$$ 1 bod

Nadalje, trokuti RQT i PQS su slični po KK poučku o sličnosti pa vrijedi: 1 bod

$$\frac{|SQ|}{|TQ|} = \frac{6}{1},$$

$$\frac{17 - |TQ|}{18 - |SQ|} = \frac{6}{1}.$$ 2 boda

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobivamo da je $|TQ| = \dfrac{13}{5}$ cm. 1 bod

Tada je

$$v = \frac{6\sqrt{13}}{65}|TQ| = \frac{6\sqrt{13}}{25} \text{ cm.}$$ 1 bod

Tražena površina trokuta QST jednaka je

$$P = \frac{|ST| \cdot v}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{6\sqrt{13}}{25} = \frac{39}{5}\ \mathrm{cm}^2.$$ 1 bod

Napomena: Analogno se dobije tražena površina ako se primijeni Talesov poučak na kut TSR i izračuna duljina visine na hipotenuzu u trokutu RST koja iznosi $\frac{8}{5\sqrt{13}}$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredi kvadratnu funkciju s racionalnim koeficijentima kojoj je najmanja vrijednost -4, a jedna nultočka $\sqrt{2}-1$.

Prvo rješenje.

Zapišimo kvadratnu funkciju u obliku $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$, $a\neq 0$.

Ako je $x_1=\sqrt{2}-1$ jedna njena nultočka, druga nultočka je $x_2=-\sqrt{2}-1$. 1 bod

Primjenom Vièteovih formula slijedi

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=-\tfrac{b}{a}=-2\\ x_1x_2&=\tfrac{c}{a}=-1 \end{aligned}$$ 1 bod

Kako je -4 najmanja vrijednost funkcije, primjenit ćemo formulu za ordinatu tjemena:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-4.$$ 1 bod

Rješenja dobivenog sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice su $a=2$, $b=4$, $c=-2$.

2 boda

Tražena je kvadratna funkcija $f(x)=2x^2+4x-2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Ako je $x_1=\sqrt{2}-1$ jedna nultočka, druga nultočka je $x_2=-\sqrt{2}-1$. 1 bod

Tada za $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-1$ funkcija ima zadanu najmanju vrijednost $y_0=f(x_0)=-4$. 1 bod

Zapišimo kvadratnu funkciju u obliku:

$$\begin{aligned} f(x)&=a(x-x_1)(x-x_2)=\\ &=a(x-\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2}+1) && \text{1 bod}\\ &=a(x^2+2x-1). && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Kako je $f(-1)=-4$, iz gornje jednakosti slijedi

$$-4=a(1-2-1),$$

odnosno $a=2$. 1 bod

Tražena je kvadratna funkcija $f(x)=2x^2+4x-2$. 1 bod

Zadatak B-2.2.

Počevši od najmanje stranice trokuta, svaka je sljedeća stranica 4 cm dulja od prethodne. Ako je mjera jednog kuta toga trokuta jednaka 120°, izračunaj polumjer tomu trokutu upisane kružnice.

Rješenje.

Neka su stranice trokuta a, b i c. Iz uvjeta zadatka slijedi $b = a + 4$, $c = a + 8$, a kut $\gamma = 120^\circ$ je nasuprot najveće stranice.

Primjenimo li poučak o kosinusu, redom slijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$(a+8)^2 = a^2 + (a+4)^2 - 2a(a+4)\cos 120^\circ \qquad \text{1 bod}$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu $a^2 - 2a - 24 = 0$. 1 bod

Pozitivno je rješenje te jednadžbe $a = 6$. 1 bod

Konačno, stranice trokuta su 6 cm, 10 cm i 14 cm. 1 bod

Površinu trokuta računamo koristeći formulu $P = \frac{ab}{2}\sin\measuredangle(a,b)$:

$$P = \frac{6\cdot 10}{2}\sin 120^\circ = 30\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je $r = \frac{P}{s} = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Izračunaj:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{4047}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{4047^2}\right)}}$$

Rješenje.

Uočimo da se izraz sastoji od umnoška razlomaka oblika:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}}.$$

Napišimo ga u jednostavnijem obliku. Uočimo da je u nazivniku razlika kvadrata i unesimo brojnik pod isti korijen. Tada je redom:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)}} = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}} = \qquad \text{2 boda}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}} = \sqrt{\frac{2n+2}{2n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}. \qquad \text{2 boda}$$

Konačno, prikažemo li svaki član početnog izraza u ovom obliku slijedi da je traženi umnožak jednak

$$\sqrt{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2022} \cdot \frac{2024}{2023}} = \sqrt{2024}.$$

2 boda

Zadatak B-2.4.

Učiteljica ima nekoliko bombona koje želi podijeliti učenicima koji dođu na dodatnu nastavu iz matematike tako da svatko dobije jednak broj bombona i niti jedan bombon ne ostane.

- Ako dođu dva učenika, ne može svaki učenik dobiti isti broj bombona.
- Ako dođu tri učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođu četiri učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođe pet učenika, svaki će od njih dobiti isti broj bombona.
- Ako dođe šest učenika, ne može svaki učenik dobiti isti broj bombona.

Ako je poznato da samo jedna od navedenih tvrdnji nije istinita, koliko najmanje bombona može imati učiteljica?

Rješenje.

Neka je x traženi broj bombona. Tada navedene tvrdnje možemo zapisati u sljedećem obliku:

1. x nije višekratnik broja 2;
2. x je višekratnik broja 3;
3. x je višekratnik broja 4;
4. x je višekratnik broja 5;
5. x nije višekratnik broja 6.

Ako nije istinita 1. tvrdnja, istinite su sve tvrdnje od 2. – 5. pa vrijedi da je x višekratnik brojeva 2 i 3, što je u kontradikciji s činjenicom da nije višekratnik broja 6. To znači da je 1. tvrdnja istinita. 2 boda

Kako je 1. tvrdnja istinita, x je neparan broj, pa 3. tvrdnja mora biti lažna, a sve ostale istinite. 2 boda

Zaključujemo da je x neparni višekratnik brojeva 3 i 5. 1 bod

Najmanji broj bombona koje učiteljica može imati jednak je 15 jer tražimo najmanji neparni zajednički višekratnik od 3 i 5. 1 bod

Napomena: Učenik može i nekim drugim logičkim zaključivanjem doći do zaključka da je 3. tvrdnja lažna. Ispravno zaključivanje te činjenice vrijedi 4 boda.

Zadatak B-2.5.

Jednadžbe $x^2 - 45x + 4a + 4 = 0$ i $x^2 - 47x + 5a - 4 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a < 20$ imaju jedno zajedničko realno rješenje. Koliko iznosi umnožak preostalih dvaju rješenja tih jednadžbi?

Prvo rješenje.

Neka je x_0 zajedničko rješenje. Tada vrijedi:

$$x_0^2 - 45x_0 + 4a + 4 = 0 \text{ i } x_0^2 - 47x_0 + 5a - 4 = 0.$$

Oduzmemo li ove dvije jednadžbe dobivamo da je $x_0 = \frac{a-8}{2}$. 1 bod

Uvrstimo li dobiveni izraz za x_0 u prvu jednadžbu, dobivamo jednadžbu samo s nepoznanicom a:

$$\left(\frac{a-8}{2}\right)^2 - 45\left(\frac{a-8}{2}\right) + 4a + 4 = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$a^2 - 90a + 800 = 0.$$ 1 bod

Njezina su rješenja $a = 80$ i $a = 10$. Budući da je $a < 20$, slijedi $a = 10$. 1 bod

Tada zadane jednadžbe prelaze u jednadžbe

$$x^2 - 45x + 44 = 0 \text{ i } x^2 - 47x + 46 = 0,$$ 1 bod

čija su rješenja $x_0 = 1$, $x_1 = 44$, odnosno $x_0 = 1$, $x_2 = 46$. 1 bod

Traženi je umnožak $x_1 \cdot x_2 = 44 \cdot 46 = 2024$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x_0 zajedničko rješenje. Tada vrijedi:

$$x_0^2 - 45x_0 + 4a + 4 = 0 \text{ i } x_0^2 - 47x_0 + 5a - 4 = 0.$$

Oduzmemo li ove dvije jednadžbe dobivamo da je $x_0 = \frac{a-8}{2}$. 1 bod

Vièteove formule za prvu jednadžbu glase:

$$x_0 + x_1 = 45$$
$$x_0 x_1 = 4a + 4.$$

Uvrstimo li x_0 u drugu formulu dobivamo:

$$\frac{a-8}{2} \cdot x_1 = 4a + 4, \text{ odnosno } x_1 = \frac{8(a+1)}{a-8},\ a \neq 8.$$ 1 bod

Uvrstimo li x_0 i x_1 u prvu formulu dobivamo jednadžbu

$$\frac{a-8}{2} + \frac{8a+8}{a-8} = 45, \text{ odnosno } a^2 - 900a + 800 = 0.$$ 1 bod

Kako je $a < 20$ rješenje jednadžbe je $a = 10$. 1 bod

Koristeći navedene Vièteove formule dobivamo tražena rješenja:

$$x_0 = \frac{a-8}{2} = 1,\ x_1 = 45 - 1 = 44, \text{ a iz } x_0 + x_2 = 47 \text{ je } x_2 = 46.$$ 1 bod

Traženi umnožak iznosi $x_1 \cdot x_2 = 44 \cdot 46 = 2024$. 1 bod

Napomena: Za bilo koji način rješavanja dobivanje parametra a vrijedi 3 boda, a dobivanje rješenja jednadžbi i traženi umnožak 3 boda.

Zadatak B-2.6.

Odredi duljine stranica pravokutnog trokuta opsega 24 cm i polumjera upisane kružnice 2 cm.

Prvo rješenje.

Neka su a i b katete pravokutnog trokuta, a c hipotenuza.

Tada je polumjer upisane kružnice $r = \dfrac{a+b-c}{2} = 2$. 1 bod

Iz sustava $\begin{cases} a+b+c=28 \\ a+b-c=4 \end{cases}$ dobivamo da je $c = 10$ cm. 2 boda

Primijenimo li Pitagorin poučak slijedi

$$a^2+b^2=c^2 \text{ i } a+b-c=4, \text{ odnosno } a+b=14,$$

pa treba riješiti sustav

$$\begin{cases} a^2+b^2=100 \\ a+b=14 \end{cases}.$$ 2 boda

Uvrštavanjem $b = 14-a$ u jednadžbu $a^2+b^2=100$ sustav svodimo na jednadžbu

$$a^2+(14-a)^2=100.$$ 2 boda

Slijedi $a^2-14a+48=0$. Rješenja ove jednadžbe su $a_1=6$, $a_2=8$. 1 bod

Tada je $b_1=8$, $b_2=6$. 1 bod

Dakle, duljine stranica danoga trokuta su 6 cm, 8 cm, 10 cm. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a i b katete pravokutnog trokuta, a c hipotenuza.

Površina pravokutnog trokuta jednaka je $P=\frac{ab}{2}$ i $P=r\cdot s$, gdje je r polumjer upisane kružnice, a s poluopseg trokuta. Iz jednakosti površina dobivamo $ab=2rs=48$. 1 bod

U pravokutnom trokutu vrijedi Pitagorin poučak te imamo sljedeće jednakosti, odnosno sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} a+b+c=24 \\ ab=48 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}.$$ 1 bod

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $a+b$ i kvadriramo slijedi redom:

$$a+b=24-c$$
$$(a+b)^2=(24-c)^2$$ 1 bod
$$a^2+b^2+2ab=576-48c+c^2.$$ 1 bod

Budući da je $c^2 = a^2 + b^2$ i $ab = 48$, slijedi

$$c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2 \Longrightarrow 48c = 576 - 96 = 480.$$

Dakle, duljina hipotenuze je 10 cm. 2 boda

Uvrstimo li $c = 10$ u jednakost $a + b = 24 - c$ tada iz sustava

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ ab = 48 \end{cases}$$ 1 bod

slijedi jednadžba $a^2 - 14a + 48 = 0$ koja ima rješenja $a_1 = 8$ i $a_2 = 6$. 1 bod

Slijedi da je $b_1 = 6$ i $b_2 = 8$. 1 bod

Dakle, duljine stranica danoga trokuta su 6 cm, 8 cm, 10 cm. 1 bod

Zadatak B-2.7.

Na polici se nalazi šest različitih čokolada i tri različite bombonjere. Svatko od troje djece može izabrati za desert ili dvije čokolade ili jednu bombonjeru. Na koliko načina troje djece može izabrati desert?

Rješenje.

Prilikom odabira promatramo sljedeće slučajeve. 2 boda

Prvi slučaj: svako od troje djece može odabrati dvije čokolade.

Pri tome prvo dijete može odabrati prvu čokoladu na 6 načina, drugu na 5, što je ukupno $6 \cdot 5$ načina. No time smo svaki par čokolada brojili dva puta jer je primjerice `ab` i `ba` isti odabir čokolada za jedno dijete. Stoga je ukupan broj načina na koji prvo dijete može odabrati dvije čokolade jednak $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Drugo dijete ima na raspolaganju 4 čokolade pa dvije čokolade može izabrati na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina. Budući da su sad ostale samo dvije čokolade, treće dijete može dvije čokolade odabrati na 1 način.

Ukupan broj odabira po dvije čokolade jest $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ jer za svaki od 15 odabira dvije čokolade prvog djeteta imamo 6 odabira po dvije čokolade drugog djeteta. 2 boda

Drugi slučaj: dvoje djece može odabrati po dvije čokolade, a jedno dijete jednu bombonjeru.

Na tri načina prvo možemo odabrati dijete koje će odabrati jednu bombonjeru. Ono bombonjeru može odabrati na 3 načina. Nadalje, jedno od preostalo dvoje djece može odabrati dvije čokolade na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ načina, a drugo na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina. Tada je ukupan broj odabira u ovom slučaju $3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 3 = 810$. 2 boda

Treći slučaj: dvoje djece može odabrati po jednu bombonjeru, a jedno dijete dvije čokolade.

Slično kao u prethodnom slučaju, prvo ćemo na 3 načina odabrati dijete koje će odabrati dvije čokolade, a to može učiniti na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ načina. Nadalje, jedno od preostalo dvoje djece može odabrati jednu bombonjeru na 3 načina, a drugo na 2 načina.

Tada je ukupan broj odabira u ovom slučaju $3 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 2 = 270$. 2 boda

Četvrti slučaj: svako od troje djece može odabrati po jednu bombonjeru.

Očito je ovaj broj odabira jednak $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. 1 bod

Konačno, ukupan broj načina na koji djeca mogu odabrati desert dobivamo zbrajanjem ukupnih brojeva odabira iz četiri navedena slučaja, odnosno to je broj

$$90 + 810 + 270 + 6 = 1176.$$ 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Brojevni izraz $\dfrac{6-\log_{14} 2401}{4-\log_{14} 49}$ pojednostavi i zapiši u obliku logaritma $\log_{28} n$, pri čemu je n prirodni broj.

Prvo rješenje.

Uočimo najprije da je $49=7^2$ i $2401=7^4$. 1 bod

Primjenjujući svojstva logaritama pojednostavnimo zadani brojevni izraz.

$$\frac{6-\log_{14} 2401}{4-\log_{14} 49}=\frac{6-4\log_{14} 7}{4-2\log_{14} 7}=\frac{3-2\log_{14} 7}{2-\log_{14} 7} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{\log_{14} 14^3-\log_{14} 7^2}{\log_{14} 14^2-\log_{14} 7} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{\log_{14} \frac{14^3}{7^2}}{\log_{14} \frac{14^2}{7}} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{\log_{14} 56}{\log_{14} 28} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\log_{28} 56 \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Uočimo najprije da je $49=7^2$ i $2401=7^4$. 1 bod

Primjenjujući svojstva logaritama pojednostavnimo zadani brojevni izraz.

$$\frac{6-\log_{14} 2401}{4-\log_{14} 49}=\frac{6-4\log_{14} 7}{4-2\log_{14} 7}=\frac{3-2\log_{14} 7}{2-\log_{14} 7} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{3-\frac{2}{\log_7 14}}{2-\frac{1}{\log_7 14}}=\frac{3-\frac{2}{1+\log_7 2}}{2-\frac{1}{1+\log_7 2}} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{\frac{3+3\log_7 2-2}{1+\log_7 2}}{\frac{2+2\log_7 2-1}{1+\log_7 2}}=\frac{1+3\log_7 2}{1+2\log_7 2} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\frac{\log_7(7\cdot 2^3)}{\log_7(7\cdot 2^2)}=\frac{\log_7 56}{\log_7 28} \qquad \text{1 bod}$$

$$=\log_{28} 56 \qquad \text{1 bod}$$

Treće rješenje.

Uočimo najprije da je $49 = 7^2$ i $2401 = 7^4$. 1 bod

Primjenjujući svojstva logaritama pojednostavnimo zadani brojevni izraz.

$$\frac{6-\log_{14} 2401}{4-\log_{14} 49} = \frac{6-4\log_{14} 7}{4-2\log_{14} 7} = \frac{3-2\log_{14} 7}{2-\log_{14} 7}$$ 1 bod

$$= \frac{3-\frac{2\log_{28} 7}{\log_{28} 14}}{2-\frac{\log_{28} 7}{\log_{28} 14}} = \frac{\frac{3\log_{28} 14-2\log_{28} 7}{\log_{28} 14}}{\frac{2\log_{28} 14-\log_{28} 7}{\log_{28} 14}}$$ 1 bod

$$= \frac{3\log_{28} 14-2\log_{28} 7}{2\log_{28} 14-\log_{28} 7} = \frac{\log_{28} 14^3-\log_{28} 7^2}{\log_{28} 14^2-\log_{28} 7}$$ 1 bod

$$= \frac{\log_{28}(14^3:7^2)}{\log_{28}(14^2:7)} = \frac{\log_{28} 56}{\log_{28} 28}$$ 1 bod

$$= \log_{28} 56$$ 1 bod

Zadatak B-3.2.

Riješi nejednadžbu $|\cos x| \leqslant \cos x + 2\sin x$ na intervalu $[0,\ 2\pi\rangle$.

Rješenje.

Riješimo nejednadžbu na zadanome intervalu rastavljanjem na dva slučaja.

1\. slučaj: $\cos x \geqslant 0$

$\cos x \leqslant \cos x + 2\sin x$

$\sin x \geqslant 0$ 1 bod

Uz uvjet $\cos x \geqslant 0$, slijedi da je $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. 1 bod

2\. slučaj: $\cos x < 0$

$-\cos x \leqslant \cos x + 2\sin x$

$-2\sin x \leqslant 2\cos x / : (-2)$ 1 bod

$\sin x \geqslant -\cos x / : \cos x < 0$

$\operatorname{tg} x \leqslant -1$ 1 bod

Uz uvjet $\cos x < 0$, slijedi da je $x \in \left\langle \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right]$. 1 bod

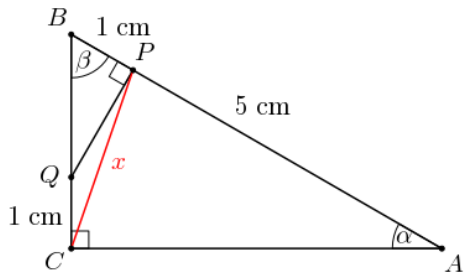
Skup rješenja početne nejednadžbe unija je rješenja dobivenih u dvama slučajevima:

$x \in \left[0,\ \frac{3\pi}{4}\right]$. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Zadan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 6 cm. Na hipotenuzi $\overline{AB}$ označena je točka P, a na kateti $\overline{BC}$ točka Q tako da vrijedi $|BP| = |QC| = 1$ cm. Ako je $\sphericalangle BPQ = 90°$, odredi $|PC|$.

Prvo rješenje.



Neka su a, b i $c = 6$ cm duljine stranica trokuta ABC, a x tražena duljina dužine $\overline{PC}$.

Trokuti ABC i QBP slični su po K-K poučku o sličnosti trokuta jer su oba trokuta pravokutna, a kut u vrhu B im je zajednički. 1 bod

Prema tome, duljine odgovarajućih stranica tih trokuta u istome su omjeru:

$\dfrac{1}{a-1} = \dfrac{a}{6}$. 1 bod

Slijedi da je $a^2 - a - 6 = 0$, pri čemu je a pozitivan broj jer predstavlja duljinu stranice trokuta.

Rješavanjem kvadratne jednadžbe zaključujemo da je $a = 3$ cm. 1 bod

Kako je trokut ABC pravokutan, vrijedi da je $\cos\beta = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. 1 bod

Primijenimo poučak o kosinusu na trokut PBC:

$x^2 = |BP|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |BP| \cdot |BC| \cdot \cos\beta$. 1 bod

$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 1 + 9 - 3 = 7$

Konačno je $|PC| = \sqrt{7}$ cm. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su a, b i $c = 6$ cm duljine stranica trokuta ABC, a x tražena duljina dužine $\overline{PC}$.

Trokuti ABC i QBP slični su po K-K poučku o sličnosti trokuta jer su oba trokuta pravokutna, a kut u vrhu B im je zajednički. 1 bod

Prema tome, duljine odgovarajućih stranica tih trokuta u istome su omjeru:

$\dfrac{1}{a-1} = \dfrac{a}{6}$. 1 bod

Slijedi da je $a^2 - a - 6 = 0$, pri čemu je a pozitivan broj jer predstavlja duljinu stranice trokuta.

Rješavanjem kvadratne jednadžbe zaključujemo da je $a = 3$ cm.

Tada je $b = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ cm. 1 bod

Kako je trokut ABC pravokutan, vrijedi da je $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1 bod

Primijenimo poučak o kosinusu na trokut APQ:

$x^2 = |AP|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$. 1 bod

$x^2 = 5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 27 - 45 = 7$

Konačno je $|PC| = \sqrt{7}$ cm. 1 bod

Zadatak B-3.4.

Kolika je najveća moguća površina kružnoga isječka čiji opseg iznosi 40 cm?

Prvo rješenje.

Opseg kružnoga isječka polumjera r, središnjega kuta α i pripadnoga kružnog luka duljine l iznosi $o = 2r + l = 2r + \dfrac{r\alpha\pi}{180^\circ} = 40$. 1 bod

Izrazimo najprije mjeru kuta α iz dobivene jednakosti.

$\alpha = \dfrac{180^\circ}{r\pi}(40 - 2r)$ 1 bod

Sada možemo izraziti površinu kružnoga isječka u ovisnosti o njegovome polumjeru r.

$P = \dfrac{r^2\alpha\pi}{360^\circ} = \dfrac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \dfrac{180^\circ}{r\pi}(40 - 2r) = \dfrac{r}{2}(40 - 2r) = 20r - r^2$ 2 boda

Uočimo da je $P(r)$ kvadratna funkcija s varijablom r koja maksimalnu vrijednost postiže za $r_0 = -\dfrac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$ cm. 1 bod

Maksimalna vrijednost funkcije P, odnosno najveća moguća površina kružnoga isječka zadanoga opsega iznosi: $P(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100\ \text{cm}^2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Opseg kružnoga isječka polumjera r i pripadnoga kružnog luka duljine l iznosi:

$o = 2r + l = 40$. 1 bod

Površina kružnoga isječka polumjera r i pripadnoga kružnog luka duljine l iznosi:

$P = \dfrac{r \cdot l}{2}$. 1 bod

Sada možemo izraziti površinu kružnoga isječka u ovisnosti samo o njegovome polumjeru r tako da u formulu za površinu uvrstimo $l = 40 - 2r$.

$P = \dfrac{r \cdot l}{2} = \dfrac{r(40 - 2r)}{2} = 20r - r^2$ 2 boda

Maksimalna vrijednost funkcije P, odnosno najveća moguća površina kružnoga isječka zadanoga opsega iznosi:

$P_0 = \dfrac{4 \cdot (-1) \cdot 0 - 20^2}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{-400}{-4} = 100\ \text{cm}^2$. 2 boda

Zadatak B-3.5.

U računalnoj igri nalazi se magični cvjetnjak u kojemu su 2024 cvijeta. Igrač u svakome potezu može iz cvjetnjaka ubrati 4, 9 ili 10 cvjetova. Ako igrač ubere 4 cvijeta, prije sljedećega poteza u cvjetnjaku naraste 1 novi cvijet, ako ih ubere 9, narastu 3 nova cvijeta, a ako ih ubere 10, narastu 4 nova cvijeta. Novi cvjetovi neće narasti ako igrač u posljednjem potezu uspije ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka.

Može li igrač ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka? Obrazloži odgovor.

Prvo rješenje.

Ako igrač ubere 4 cvijeta, pri sljedećem su potezu u cvjetnjaku 3 cvijeta manje.

Ako igrač ubere 9 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku 6 cvjetova manje.

Ako igrač ubere 10 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku također 6 cvjetova manje. 1 bod

Ako igrač x puta ubere 4 cvijeta, y puta 9 cvjetova, a z puta 10 cvjetova, prije sljedećega poteza u cvjetnjaku preostaje $2024 - 3x - 6y - 6z$ cvjetova. 1 bod

Igrač će uspjeti ubrati sve cvjetove ukoliko prije posljednjega poteza u cvjetnjaku preostane 4, 9 ili 10 cvjetova. 1 bod

1. mogućnost: $2024 - 3x - 6y - 6z = 4$

$3(x + 2y + 2z) = 2020$

Budući da broj 2020 nije djeljiv s 3, prije posljednjega poteza ne mogu preostati 4 cvijeta. 1 bod

2. mogućnost: $2024 - 3x - 6y - 6z = 9$

$3(x + 2y + 2z) = 2015$

Budući da broj 2015 nije djeljiv s 3, prije posljednjega poteza ne može preostati 9 cvjetova. 1 bod

3. mogućnost: $2024 - 3x - 6y - 6z = 10$

$3(x + 2y + 2z) = 2014$

Budući da broj 2014 također nije djeljiv s 3, prije posljednjega poteza ne može preostati 10 cvjetova.

Prema tome, igrač nikada neće moći ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka. 1 bod

Drugo rješenje.

Ako igrač ubere 4 cvijeta, pri sljedećem su potezu u cvjetnjaku 3 cvijeta manje.

Ako igrač ubere 9 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku 6 cvjetova manje.

Ako igrač ubere 10 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku također 6 cvjetova manje. 1 bod

Uočimo da se broj cvjetova u cvjetnjaku prije novoga poteza uvijek umanji za višekratnik broja 3. 1 bod

Broj 2024 pri dijeljenju s brojem 3 daje ostatak 2. 1 bod

Budući se nakon svakoga poteza (osim posljednjega ako je moguć) broj cvjetova umanji za višekratnik broja 3, broj preostalih cvjetova u cvjetnjaku prije novoga poteza uvijek će biti broj koji pri dijeljenju s brojem 3 daje ostatak 2. 1 bod

Broj 9 nema ostatak pri dijeljenju s brojem 3, dok brojevi 4 i 10 pri dijeljenju s brojem 3 daju ostatak 1. 1 bod

Nemoguće je da prije posljednjega poteza u cvjetnjaku preostane 4, 9 ili 10 cvjetova jer niti jedan od tih brojeva pri dijeljenju s 3 ne daje ostatak 2. Prema tome, igrač nikada neće uspjeti ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka. 1 bod

Treće rješenje.

Ako igrač ubere 4 cvijeta, pri sljedećem su potezu u cvjetnjaku 3 cvijeta manje.

Ako igrač ubere 9 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku 6 cvjetova manje.

Ako igrač ubere 10 cvjetova, pri sljedećem je potezu u cvjetnjaku također 6 cvjetova manje. 1 bod

Uočimo da se broj cvjetova u cvjetnjaku prije novoga poteza uvijek umanji za višekratnik broja 3. 1 bod

U slučaju da igrač može ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka, u posljednjem potezu mora ubrati točno 4, 9 ili 10 cvjetova. 1 bod

Da bi igrač u posljednjem potezu mogao ubrati 4 cvijeta, broj cvjetova u cvjetnjaku ukupno se trebao smanjiti za $2024 - 4 = 2020$, no to nije moguće jer broj 2020 nije višekratnik broja 3. 1 bod

Da bi igrač u posljednjem potezu mogao ubrati 9 cvjetova, broj cvjetova u cvjetnjaku ukupno se trebao smanjiti za $2024 - 9 = 2015$, no to nije moguće jer broj 2015 također nije višekratnik broja 3. 1 bod

Da bi igrač u posljednjem potezu mogao ubrati 10 cvjetova, broj cvjetova u cvjetnjaku ukupno se trebao smanjiti za $2024 - 10 = 2014$, no ni to nije moguće jer ni broj 2014 nije višekratnik broja 3.

Prema tome, igrač nikada neće uspjeti ubrati sve cvjetove iz cvjetnjaka. 1 bod

Napomena: Za odgovor bez obrazloženja učenik dobiva 0 bodova. Ako učenik odgovor obrazloži tvrdnjom da broj 2024 nije višekratnik broja 3, može dobiti najviše 2 boda jer se u posljednjem koraku broj cvjetova ne mora umanjiti za višekratnik broja 3.

Zadatak B-3.6.

Ako za realne brojeve x i y vrijedi da je $2\sin(x-y) = \sin y \cos x$, dokaži da jednakost $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\sin 2y}{5 - \cos 2y}$ vrijedi za sve x i y za koje su izrazi definirani.

Prvo rješenje.

Raspišimo zadanu tvrdnju koristeći adicijsku formulu za sinus razlike.

$2\sin(x-y)=\sin y\cos x$

$2(\sin x\cos y-\cos x\sin y)=\sin y\cos x$ 1 bod

$2\sin x\cos y=3\sin y\cos x$ 1 bod

$2\operatorname{tg} x=3\operatorname{tg} y$

$\operatorname{tg} x=\dfrac{3}{2}\operatorname{tg} y$ 1 bod

Dobivenu jednakost uvrstimo u adicijsku formulu za tangens.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x-y) &= \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\frac{3}{2}\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} y}{1+\frac{3}{2}\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} y}=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg} y}{1+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 y} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\dfrac{\sin y}{2\cos y}}{\dfrac{2\cos^2 y+3\sin^2 y}{2\cos^2 y}} && \text{1 bod}\\
&= \frac{2\sin y\cos^2 y}{2\cos y\left(2\cos^2 y+2\sin^2 y+\sin^2 y\right)}=\frac{\sin y\cos y}{2+\sin^2 y} && \text{1 bod}\\
&= \frac{2\sin y\cos y}{4+2\sin^2 y}=\frac{\sin 2y}{4+2\sin^2 y} && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Budući vrijedi da je:

$$\begin{aligned}
5-\cos 2y &= 5-\left(\cos^2 y-\sin^2 y\right) && \text{1 bod}\\
&= 5-\left(1-2\sin^2 y\right)\\
&= 4+2\sin^2 y, && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

zaključujemo da je $\operatorname{tg}(x-y)=\dfrac{\sin 2y}{5-\cos 2y}$, što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Raspišimo zadanu tvrdnju koristeći adicijsku formulu za sinus razlike.

$2\sin(x-y)=\sin y\cos x$

$2(\sin x\cos y-\cos x\sin y)=\sin y\cos x$ 1 bod

$2\sin x\cos y=3\sin y\cos x$ 1 bod

Iz posljednje jednakosti možemo izraziti $\sin x$: $\sin x=\dfrac{3\sin y\cos x}{2\cos y}$.

Raspišimo tangens razlike koristeći adicijske formule za sinus i kosinus razlike:

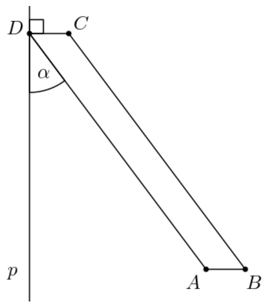
$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\sin x\sin y}. \qquad \text{2 boda}$$

Uvrstimo $\sin x=\dfrac{3\sin y\cos x}{2\cos y}$ i pojednostavnimo dobiveni izraz. Slijedi da je:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(x-y)&=\frac{\frac{3\sin y\cos x}{2\cos y}\cdot\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y+\frac{3\sin y\cos x}{2\cos y}\cdot\sin y}=\frac{\frac{1}{2}\sin y\cos x}{\cos x\left(\cos y+\frac{3\sin^2 y}{2\cos y}\right)} && \text{2 boda}\\
&=\frac{\frac{1}{2}\sin y}{\cos y+\frac{3\sin^2 y}{2\cos y}}=\frac{\sin y\cos y}{2\cos^2 y+3\sin^2 y} && \text{1 bod}\\
&=\frac{2\sin y\cos y}{4\cos^2 y+6\sin^2 y}=\frac{\sin 2y}{4\cos^2 y+6\sin^2 y} && \text{1 bod}\\
&=\frac{\sin 2y}{5-\cos^2 y+\sin^2 y} && \text{1 bod}\\
&=\frac{\sin 2y}{5-\cos 2y}. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

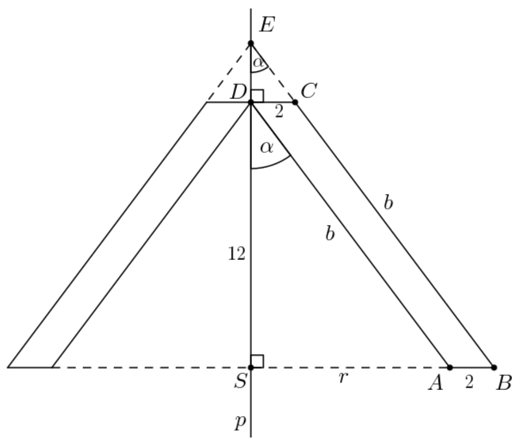
Zadatak B-3.7.

Na slici je prikazan paralelogram $ABCD$ čija je kraća stranica $\overline{AB}$ duljine 2 cm, a duljina visine na tu stranicu iznosi 12 cm. Vrhom D paralelograma prolazi pravac p koji je okomit na pravac CD, a sa stranicom $\overline{AD}$ zatvara kut α tako da vrijedi $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. Odredi obujam tijela nastaloga rotacijom paralelograma $ABCD$ oko pravca p.



Prvo rješenje.

Rotacijom paralelograma oko pravca p nastaje šuplji krnji stožac, odnosno krnji stožac sa šupljinom oblika stošca. Na skici je prikazan osni presjek toga krnjeg stošca. 1 bod



Neka je točka E sjecište pravca p i pravca BC, a točka S pravca p i pravca AB.

Promotrimo pravokutni trokut ADS.

Uočimo najprije da vrijedi $|DS| = 12$ cm.

Uz oznake kao na skici vrijedi da je $\sin\alpha = \frac{r}{b} = \frac{3}{5}$, odnosno $r = \frac{3}{5}b$. 1 bod

Primjenom Pitagorina poučka na taj trokut možemo odrediti r i b.

$12^2 = b^2 - r^2 = b^2 - \left(\frac{3}{5}b\right)^2 = \frac{16}{25}b^2$ pa je $b = 15$ cm. 1 bod

Slijedi da je $r = \frac{3}{5}b = 9$ cm. 1 bod

Kako bismo izračunali obujam dobivenoga rotacijskoga tijela, od obujma stošca radijusa baze $|BS| = r + 2 = 11$ cm trebamo oduzeti obujam maloga stošca (dopunjka) radijusa baze $|CD| = 2$ cm i obujam šupljine radijusa baze $|AS| = r = 9$ cm. 1 bod

Za izračunavanje volumena potrebno je još odrediti visine sva tri stošca.

Primijetimo da su $\sphericalangle SDA$ i $\sphericalangle DEC$ kutovi s paralelnim kracima, što znači da je $\sphericalangle DEC = \alpha$.

U trokutu CED tada vrijedi da je $\sin\alpha = \frac{2}{|CE|} = \frac{3}{5}$, odnosno $|CE| = \frac{10}{3}$ cm. 1 bod

Slijedi da je $|DE| = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 2^2} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$ cm i $|SE| = 12 + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$ cm. 1 bod

Izračunajmo volumen velikoga stošca i volumen maloga stošca (dopunjka).

$V_{\text{stožac}} = \frac{1}{3} \cdot 11^2\pi \cdot \frac{44}{3} = \frac{5324}{9}\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{dopunjak}} = \frac{1}{3} \cdot 2^2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{9}\pi \text{ cm}^3$ 1 bod

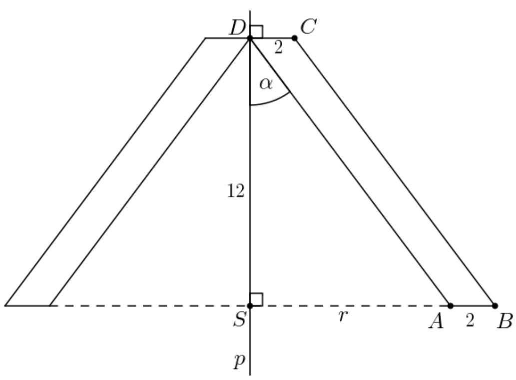
Volumen šupljine iznosi $V_{\text{šupljina}} = \frac{1}{3} \cdot 9^2\pi \cdot 12 = 324\pi \text{ cm}^3$. 1 bod

Konačno, volumen traženoga rotacijskog tijela iznosi:

$V = V_{\text{stožac}} - V_{\text{dopunjak}} - V_{\text{šupljina}} = 264\pi \text{ cm}^3$. 1 bod

Drugo rješenje.

Rotacijom paralelograma oko pravca p nastaje šuplji krnji stožac, odnosno krnji stožac sa šupljinom oblika stošca. Na skici je prikazan osni presjek toga krnjeg stošca. 1 bod



Neka je točka S sjecište pravca p i pravca AB. Promotrimo pravokutni trokut ADS.

Za kut α toga trokuta vrijedi da je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Slijedi da je $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$, odnosno $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$.

Budući je α šiljasti kut, zaključujemo da je $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. 1 bod

Nadalje, vrijedi da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$. 1 bod

Uočimo da vrijedi $|DS| = 12$ cm iz čega slijedi da je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{12} = \frac{3}{4}$, odnosno vrijedi da je $r = 9$ cm. 1 bod

Kako bismo izračunali obujam dobivenoga rotacijskoga tijela, od obujma krnjega stošca radijusa veće baze $|BS| = r + 2 = 11$ cm i radijusa manje baze $|CD| = 2$ cm trebamo oduzeti obujam šupljine radijusa baze $|AS| = r = 9$ cm. 1 bod

Volumen krnjega stošca radijusa baza r_1 i r_2 dan je formulom $V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$, pri čemu je h duljina visine toga krnjeg stošca. 2 boda

$V_{\text{krnji stožac}} = \frac{\pi \cdot 12}{3}(121 + 22 + 4) = 588\pi \text{ cm}^3$ 1 bod

Volumen šupljine iznosi $V_{\text{šupljina}} = \frac{1}{3} \cdot 9^2\pi \cdot 12 = 324\pi \text{ cm}^3$. 1 bod

Konačno, volumen traženoga rotacijskog tijela iznosi:

$V = V_{\text{krnji stožac}} - V_{\text{šupljina}} = 264\pi \text{ cm}^3$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je razlomak $\dfrac{2n^2-40n+175}{n-10}$ prirodan broj.

Rješenje.

Uočimo da vrijedi:

$$\frac{2n^2-40n+175}{n-10}=\frac{2n^2-40n+200-25}{n-10}=\frac{2(n-10)^2-25}{n-10}$$ 2 boda

$$=2n-20-\frac{25}{n-10}.$$ 1 bod

Dobiveni će izraz biti prirodan broj ako je razlomak $\dfrac{25}{n-10}$ cijeli broj, što je moguće jedino ako je nazivnik $n-10$ djelitelj broja 25. Dakle,

$$n-10\in\{\pm1,\pm5,\pm25\}.$$ 1 bod

Iz uvjeta da je $n\in\mathbb{N}$ slijedi:

$$n\in\{5,9,11,15,35\}.$$ 1 bod

Za svaki od dobivenih brojeva n treba još provjeriti je li polazni razlomak, odnosno izraz $2n-20-\dfrac{25}{n-10}$, prirodan broj. Direktnom provjerom dobivamo da je konačno rješenje

$$n\in\{9,15,35\}.$$ 1 bod

Napomena: Učenik može početni razlomak transformirati i na neki drugi način, primjerice:

$$\frac{2n^2-40n+175}{n-10}=\frac{2n^2-20n-20n+200-25}{n-10}=\frac{2n(n-10)-20(n-10)-25}{n-10}$$

$$=2n-20-\frac{25}{n-10}.$$

Zadatak B-4.2.

Koliko ima kompleksnih brojeva z takvih da je $|z| = 1$ i razlika $z^{5!} - z^{4!}$ je realan broj?

Rješenje.

Ako je $|z| = 1$, broj z možemo zapisati u trigonometrijskom obliku

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Tada je

$$z^{5!} = \cos(5!\varphi) + i\sin(5!\varphi) = \cos(120\varphi) + i\sin(120\varphi),$$

a

$$z^{4!} = \cos(4!\varphi) + i\sin(4!\varphi) = \cos(24\varphi) + i\sin(24\varphi),$$

te

$$z^{5!} - z^{4!} = \cos(120\varphi) - \cos(24\varphi) + i\left(\sin(120\varphi) - \sin(24\varphi)\right).$$ 2 boda

Ova će razlika biti realan broj ako je imaginarni dio jednak 0, odnosno ako vrijedi

$$\sin(120\varphi) - \sin(24\varphi) = 0$$ 1 bod

ili

$$\sin(120\varphi) = \sin(24\varphi).$$

Posljednja će jednakost biti točna ako vrijede sljedeće dvije mogućnosti:

$$120\varphi = 24\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

ili

$$120\varphi = \pi - 24\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

odnosno

$$\varphi = \frac{2k\pi}{96}$$

ili

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{144},\ k \in \mathbb{Z}.$$ 1 bod

Budući da mora vrijediti $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ iz prve jednakosti slijedi da je

$$\varphi = \frac{2k\pi}{96} \Rightarrow 0 \leqslant k < 96,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{144} \Rightarrow -0.5 \leqslant k < 143.5,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Takvih cijelih brojeva k ima $96 + 144 = 240$, što je i traženi broj kompleksnih brojeva z. 2 boda

Napomena: Priznati sa svim bodovima i ako učenik jednadžbu $\sin(120\varphi) - \sin(24\varphi) = 0$ riješi nekom drugom metodom.

Zadatak B-4.3.

Za koje je realne parametre b i c prirodna domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-10x^2+bx+c}}$ jednaka skupu $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{2-3x}>0\right\}$?

Rješenje.

Riješimo prvo nejednadžbu $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{2-3x}>0$.

Logaritam je definiran ako je $\dfrac{2x-1}{2-3x}>0$, a što vrijedi za $x\in\left\langle\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right\rangle$. 1 bod

Zatim redom slijedi

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{2-3x}&>0,\\ \frac{2x-1}{2-3x}&<\left(\frac{1}{2}\right)^0,\\ \frac{2x-1}{2-3x}-1&<0,\\ \frac{5x-3}{2-3x}&<0,\\ x\in\left\langle-\infty,\frac{3}{5}\right\rangle&\cup\left\langle\frac{2}{3},\infty,\right\rangle.\end{aligned}$$

1 bod

Zbog uvjeta da je $x\in\left\langle\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right\rangle$ rješenje polazne nejednadžbe je $x\in\left\langle\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right\rangle$. 1 bod

Prirodna domena funkcije $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-10x^2+bx+c}}$ jest skup svih realnih brojeva za koji vrijedi $-10x^2+bx+c>0$. 1 bod

Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $-10x^2+bx+c=0$, onda je rješenje nejednadžbe $-10x^2+bx+c>0$ interval $\langle x_1,x_2\rangle$, pa mora biti $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{3}{5}$. 1 bod

Koristeći Vieteove formule izračunat ćemo tražene parametre:

$$x_1+x_2=\frac{b}{10}\Rightarrow b=10\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)=11,$$

$$x_1\cdot x_2=-\frac{c}{10}\Rightarrow c=-10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=-3.$$

Dakle, traženi su parametri $b=11$, $c=-3$. 1 bod

Napomena: Tražene parametre možemo na kraju dobiti i ako uvrstimo $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{3}{5}$ u $-10x^2+bx+c=0$:

$$x_1=\frac{1}{2}\Rightarrow -10\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}+c=0,$$

$$x_2=\frac{3}{5}\Rightarrow -10\left(\frac{3}{5}\right)^2+b\cdot\frac{3}{5}+c=0.$$

Rješavanjem sustava $3b+5c=18$, $b+2c=5$ slijedi da je $b=11$, $c=-3$.

Zadatak B-4.4.

Ana ima naočale s crnim, smeđim, zelenim, crvenim, žutim i plavim okvirom. Subotom i nedjeljom uvijek nosi naočale s crnim ili smeđim okvirom. Od preostalih pet dana najmanje tri puta nosi zeleni okvir, dok ostale dane nosi naočale s crvenim, žutim ili plavim okvirom. Na koliko različitih načina Ana može složiti tjednu kombinaciju boja naočala? Ana ne mijenja okvir naočala tijekom dana.

Rješenje.

Za subotu i nedjelju Ana može odabrati naočale na $2 \cdot 2 = 4$ načina. 1 bod

Za preostalih 5 dana razlikujemo sljedeće slučajeve: 1 bod

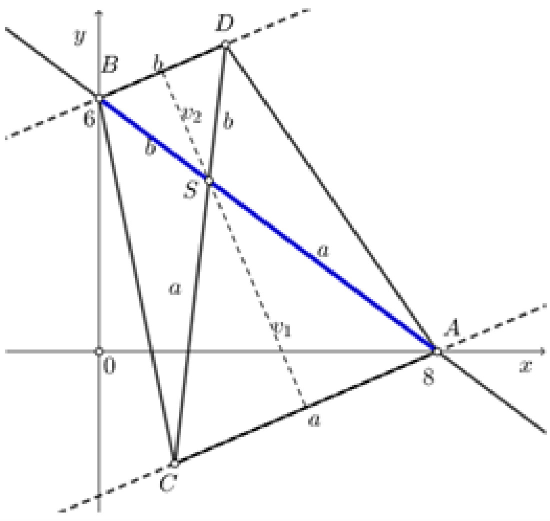
1. Zeleni okvir nosi točno tri dana.
   Tada prvo odabiremo tri dana za zeleni okvir što možemo napraviti na $\binom{5}{3} = 10$ načina. Za preostala dva dana biramo crvene, žute ili plave okvire što možemo napraviti na $3^2 = 9$ načina. Dakle, u ovom slučaju imamo ukupno $9 \cdot 10 = 90$ kombinacija boja po danima. 1 bod
2. Zeleni okvir nosi točno četiri dana.
   Četiri dana za zeleni okvir možemo odabrati na $\binom{5}{4} = 5$ načina, a za peti dan boju okvira možemo izabrati na 3 načina, što je ukupno $5 \cdot 3 = 15$ načina. 1 bod
3. Zeleni okvir nosi točno pet dana.
   Ovaj slučaj ima samo jednu moguću kombinaciju. 1 bod

Prema navedenom, za središnjih pet dana Ana ima na raspolaganju: $90 + 15 + 1 = 106$ kombinacija, odnosno ukupno ima na raspolaganju $4 \cdot 106 = 424$ tjedne kombinacije. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Pravac čija je jednadžba $3x + 4y - 24 = 0$ siječe os apscisa u točki A, a os ordinata u točki B. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka S. S različitih strana dužine $\overline{AB}$ konstruirani su jednakostranični trokuti SCA i SDB. Izračunaj površinu četverokuta $ADBC$.

Prvo rješenje.



Sjecišta pravca s koordinatnim osima dobivamo uvrštavanjem $x = 0$ i $y = 0$. Slijedi:

$$y = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A(8, 0),$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow B(0, 6).$$ 1 bod

Tada je $|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Iz $\sphericalangle SCA = \sphericalangle SDB = 60^\circ$ slijedi da je $AC||BD$. 1 bod
Zaključujemo da je četverokut $ADBC$ trapez, a budući da su trokuti BCS i ADS sukladni (po poučku SKS), trapez je jednakokračan. 1 bod

Ako je $|AS| = a$, $|BS| = b$, tada su osnovice trapeza $|AC| = |AS| = a$, $|BD| = |BS| = b$. 1 bod

Visina trapeza jednaka je zbroju visina jednakostraničnih trokuta SCA i SDB, odnosno vrijedi

$$v = v_1 + v_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Tada je tražena površina jednaka

$$P = \frac{(a+b)v}{2} = \frac{(a+b)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$ 1 bod

Napomena: Učenik ne mora navoditi koordinate točaka A i B kao ni osnovice trapeza ako ih je označio na slici.

Učenik za predviđeni 1 bod mora obrazložiti zašto je četverokut $ABCD$ trapez. Priznati i ako ne navede da je jednakokračan jer se ne koristi za izračun površine.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju dolazimo do sjecišta s koordinatnim osima: $A(8, 0)$ i $B(0, 6)$, 1 bod
te do zaključka da je $|AB| = 10$. 1 bod

Budući da su trokuti SCA i SDB jednakostranični, pravac CD siječe pravac AB pod kutom od 60°, odnosno 120°, pa su točke C, S i D na istom pravcu. 1 bod

Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su dijagonale četverokuta $ABCD$ duljine $a + b$. 1 bod

Tada površinu četverokuta ABCD možemo računati po formuli

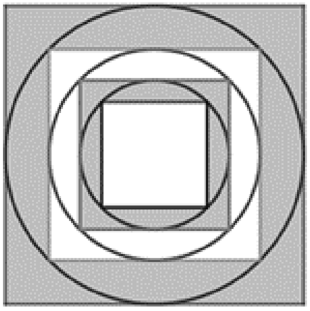
$$P = d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\sphericalangle(d_1, d2) = \frac{1}{2}(a+b)^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 100\frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$ 2 boda

Zadatak B-4.6.

Kvadratu K_1 površine 1 opisan je krug, a krugu je opisan kvadrat K_2 čije su stranice usporedne stranicama početnog kvadrata K_1. Područje između kvadrata K_1 i K_2 obojeno je sivom bojom. Zatim kvadratu K_2 opet opišemo krug, a njemu na isti način opišemo kvadrat K_3. Područje između kvadrata K_2 i K_3 ostavimo neobojeno. Taj postupak ponavljamo sve dok ne bude 2024 sivo obojenih i 2025 neobojenih područja (K_1 brojimo u neobojena područja). Kolika je površina svih sivo obojenih područja, a kolika površina svih neobojenih područja?

Rješenje.

Na slici je prikazano prvih nekoliko koraka u bojenju područja između dva kvadrata:



Ukupno je $2024 + 2025 = 4049$ područja koja su obojena ili neobojena, a broj konstruiranih kvadrata jednak je 4049. 1 bod

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{4049}$, redom duljine stranica kvadrata $K_1, K_2, \ldots, K_{4049}$, a $P_1, P_2, \ldots, P_{4049}$ njihove površine. Polumjere kvadratima opisanih kružnica označit ćemo redom $r_1, r_2, \ldots, r_{4048}$.

Tada je površina obojenog područja jednaka zbroju $P_2 - P_1 + P_4 - P_3 + \cdots + P_{4048} - P_{4047}$, a površina neobojenog područja zbroju $P_1 + P_3 - P_2 + P_5 - P_4 + \cdots + P_{4049} - P_{4048}$. 2 boda

Duljine stranica kvadrata su redom:

$$\begin{gathered} a_1 = 1, \\ a_2 = 2r_1 = a_1\sqrt{2} = \sqrt{2}, \\ a_3 = 2r_2 = a_2\sqrt{2} = 2, \\ a_4 = 2r_3 = a_3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \\ \vdots \end{gathered}$$

1 bod

Duljine stranica kvadrata čine geometrijski niz kojemu je kvocijent $q = \sqrt{2}$, $a_1 = 1$ te opći član

$$a_n = (\sqrt{2})^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

1 bod

Tada je površina kvadrata K_n jednaka $P_n = (a_n)^2 = 2^{n-1}$. Očito površine kvadrata čine geometrijski niz kojemu je kvocijent jednak $q_P = 2$. 1 bod

Površina obojenog područja P_O jednaka je

$$P_O = P_2 - P_1 + P_4 - P_3 + \cdots + P_{4048} - P_{4047} = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4 + \cdots - P_{4047} + P_{4048}.$$

Uočimo da je zbroj obojenih površina jednak zbroju 4048 članova geometrijskog niza kojemu je kvocijent $q_O = -q_P = -2$, a prvi član $-P_1 = -1$. Stoga vrijedi

$$P_O = -1 \cdot \frac{(-2)^{4048} - 1}{-2 - 1} = \frac{1}{3}(2^{4048} - 1).$$

2 boda

Površina neobojenog područja P_N jednaka je

$$P_N = P_1 + P_3 - P_2 + P_5 - P_4 + \cdots + P_{4049} - P_{4048} = P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \cdots - P_{4048} + P_{4049}.$$

Kao i kod zbroja obojenih površina, zaključujemo da je zbroj neobojenih površina jednak zbroju 4049 članova geometrijskog niza kojemu je kvocijent $q_N = -q_P = -2$, a prvi član $P_1 = 1$. Stoga vrijedi

$$P_N = 1 \cdot \frac{(-2)^{4049} - 1}{-2 - 1} = -\frac{1}{3}(-2^{4049} - 1) = \frac{1}{3}(2^{4049} + 1).$$ 2 boda

Napomena: Učenici dobivaju 1 bod za određivanje ukupnog broja konstruiranih kvadrata, po 1 bod za određivanje zbroja obojenih i neobojenih područja, odnosno koje je zadnje obojeno i neobojeno područje u traženom zbroju. Tri boda za uočavanje geometrijskih nizova (duljina stranica i površina), navođenje kvocijenta i općeg člana tih nizova. Na kraju dobivaju po 2 boda za izračunavanje ukupne obojene i neobojene površine.

Učenici mogu zbroj obojenih i neobojenih površina računati i na druge načine, primjerice mogu računati površinu po područjima:

$$P_0 = (P_2 - P_1) + (P_4 - P_3) + \cdots + (P_{4048} - P_{4047}) = 1 + 4 + 16 + \cdots + 2^{4046} =$$

$$1 \cdot \frac{4^{2024} - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(2^{4048} - 1),$$

$$P_N = P_1 + (P_3 - P_2) + (P_5 - P_4) + \cdots + (P_{4049} - P_{4048}) = 1 + (2 + 8 + 16 + \cdots + 2^{4046}) =$$

$$1 + 2 \cdot \frac{4^{2024} - 1}{4 - 1} = 1 + \frac{2}{3}(2^{4048} - 1) = \frac{1}{3}(2^{4049} + 1).$$

Također, učenik može zaključiti da je ukupna površina neobojenih dijelova jednaka polovici ukupne površine obojenih dijelova plus površina početnog kvadrata pa na taj način izračunati neobojenu površinu. Isto vrijedi i ako obojenu računa kao dvostruku neobojenu (bez početnog kvadrata). U svakom od tih slučajeva dobiva sve predviđene bodove za izračun površina.

Zadatak B-4.7.

Laura izrađuje skulpturu od kocaka. Svaka skulptura s oznakom S_n sastoji se od n različitih kocaka čije su duljine bridova redom prirodni brojevi 1, 2, 3, ... do n. Tako skulptura S_1 sadržava jednu kocku čiji je brid duljine 1, S_2 sadržava dvije kocke čije su duljine bridova 1 i 2, i tako dalje redom. Laura tvrdi da je ukupni obujam skulpture S_n uvijek jednak kvadratu zbroja n različitih prirodnih brojeva. Odredi kojih je to n brojeva i dokaži Laurinu tvrdnju.

Rješenje.

Neka je V_n obujam skulpture S_n sastavljene od niza kocaka čije su duljine bridova 1, 2, ... do n. Očito je $V_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ pa je Laurina tvrdnja ekvivalentna tvrdnji:
Zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva jednak je kvadratu zbroja nekih n različitih prirodnih brojeva. 1 bod

Kako bismo odredili koji su to prirodni brojevi redom ćemo računati obujme Laurinih skulptura:

$$V_1 = 1^3 = 1^2,$$

$$V_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2,$$
$$V_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = V_2 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2,$$
$$V_4 = V_3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2,$$
$$\vdots$$
1 bod

Tvrdimo da je obujam skulpture S_n jednak kvadratu zbroja prvih n prirodnih brojeva za sve $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$
2 boda

Budući je zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak $\frac{n(n+1)}{2}$ Laurina će tvrdnja biti dokazana ako dokažemo tvrdnju:

$$T_n: \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$
1 bod

Tvrdnju dokazujemo koristeći princip matematičke indukcije. Provjerimo prvo bazu indukcije odnosno vrijedi li tvrdnja za $n = 1$. Tvrdnja vrijedi jer je

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2.$$
1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja T_n vrijedi za neki prirodni broj n. 1 bod
Pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za sljedeći prirodni broj, odnosno za $n+1$. Dakle, treba dokazati:

$$T_{n+1}: \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$
1 bod

Krenemo li od lijeve strane i primijenimo pretpostavku na zbroj prvih n kubova dobivamo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =$$
$$\frac{(n+1)^2}{4} \cdot \big(n^2 + 4(n+1)\big) = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (n^2 + 4n + 4) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Time smo pokazali da za neki proizvoljan n tvrdnja T_n povlači da vrijedi i tvrdnja T_{n+1}, pa budući da T_n vrijedi za $n = 1$, ona vrijedi za sve prirodne brojeve. 2 boda