Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

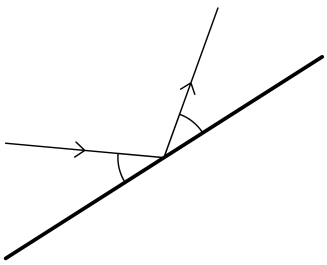
26. veljače 2024.

1. Odredi sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2y + 4x^2 - 3y = 51.$$

2. Na ploči su bili napisani svi prirodni brojevi od 1 do nekog broja. Nakon što je jedan od brojeva obrisan, aritmetička sredina preostalih brojeva na ploči iznosi $\frac{673}{18}$. Koji je broj obrisan?

3. Biljarski stol ima oblik pravokutnika $ABCD$ i dimenzije $|AB| = 2$ m i $|BC| = 1$ m. Biljarska kugla giba se po stolu pravocrtno dok ne dođe do ruba pravokutnika, a tada se odbija tako da putanja kugle prije i poslije odbijanja zatvara s rubom sukladne kutove. Ako biljarska kugla započne gibanje u točki A te nakon odbijanja od stranica $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom završi gibanje u točki D, odredi ukupnu udaljenost koju je kugla prešla. Kuglu promatramo kao materijalnu točku.



4. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, dokaži da je

$$(a + b)^2ab + (b + c)^2bc + (c + a)^2ca + 4abc(a + b + c) = 0.$$

5. Dokaži da među bilo kojih pet vrhova pravilnog deveterokuta postoje četiri koja su vrhovi trapeza.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-2x+4}=1.$$

2. Neka je a realan broj. Ako jednadžba $x^2-ax+a=0$ ima dva (ne nužno različita) realna rješenja x_1 i x_2, dokaži da vrijedi $x_1^2+x_2^2 \geqslant 2(x_1+x_2)$.

3. Odredi sve uređene trojke (m,n,p), pri čemu su m i n prirodni brojevi, a p prost broj, za koje vrijedi

$$(2m+3)(4n+1)=pmn.$$

4. Polukrug promjera $\overline{PQ}$ upisan je u pravokutnik $ABCD$ i dira njegove stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Pritom se točka P nalazi na stranici $\overline{BC}$, a točka Q na stranici $\overline{CD}$. Ako je $|BP|=2$ i $|DQ|=1$, odredi $|PQ|$.

5. Koliko ima prirodnih brojeva čiji zapis u dekadskome sustavu sadržava svaku od deset znamenaka 0, 1, 2, …, 9 točno jednom, a svaka je znamenka, osim znamenke 9, manja od barem jedne njoj susjedne znamenke?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

1. Za koje realne brojeve x vrijedi

$$5^{2x} + 4^x < 29 \cdot 10^{x-1}?$$

2. Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na opisanoj kružnici šiljastokutnog trokuta ABC takve da su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ promjeri te kružnice. Dokaži da vrijedi

$$|A_1B| \cdot |B_1B| + |B_1C| \cdot |C_1A| = |AC| \cdot |BC|.$$

3. Odredi sve uređene trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje je $2^a + 2^b + 2^c + 3$ kvadrat nekoga prirodnog broja.

4. Dokaži da je zbroj

$$\frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}$$

jednak

$$\frac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}.$$

5. Na karticama su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 2024^2. Zbroj svih tih brojeva iznosi $2024A$. Manuel je odabrao 2024 kartice s brojevima čiji je zbroj jednak A. Dokaži da Neva može preostale kartice rasporediti u 2023 skupine tako da u svakoj skupini budu po 2024 kartice i da zbroj brojeva na karticama u svakoj skupini bude jednak A.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

1. Dokaži da svi članovi niza

$$a_1 = 4\cdot 2024^1 - 2024, \quad a_2 = 4\cdot 2024^2 - 20244, \quad \ldots, \quad a_n = 4\cdot 2024^n - \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n \text{ puta}}}, \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

daju ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

2. Neka su x_1, x_2 i x_3 različite nultočke polinoma $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Odredi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3}.$$

3. Neka je $ABCDE$ peterokut upisan u kružnicu sa središtem O. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ sijeku se u točki P, a dužine $\overline{BD}$ i $\overline{EC}$ u točki Q. Ako su pravci PQ i AD međusobno paralelni, dokaži da je pravac EO okomit na ta dva pravca.

4. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji točno pet prirodnih brojeva n takvih da je $n + p \mid n^3 + p^2$.

5. Odredi (ako postoji) najveći prirodni broj koji se ne može prikazati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa $\{135, 136, 137, \ldots, 144\}$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.