ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2y + 4x^2 - 3y = 51.$$

Rješenje.

Zapišimo početnu jednakost na drugačiji način:

$$\begin{aligned} x^2y + 4x^2 - 3y &= 51 \\ x^2(y+4) - 3y &= 51 \\ x^2(y+4) - 3(y+4) + 12 &= 51 && \text{1 bod} \\ (x^2-3)(y+4) &= 39. && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Faktori $x^2 - 3$ i $y + 4$ s lijeve strane djelitelji su broja 39 i umnožak im je 39. Zaključujemo da je

$$x^2 - 3 \in \{-39, -13, -3, -1, 1, 3, 13, 39\},$$ 3 boda

odnosno $x^2 \in \{-36, -10, 0, 2, 4, 6, 16, 42\}$. Od ovih brojeva, samo 0, 4 i 16 su potpuni kvadrati. 1 bod

Za y vrijedi $y + 4 = \dfrac{39}{x^2 - 3}$.

Ako je $x^2 = 0$, odnosno $x = 0$, slijedi $y = -17$. 1 bod

Ako je $x^2 = 4$, odnosno $x = \pm 2$, slijedi $y = 35$. 1 bod

Ako je $x^2 = 16$, odnosno $x = \pm 4$, slijedi $y = -1$. 1 bod

Zaključujemo da su sva rješenja početne jednadžbe

$$(x, y) = (0, -17),\ (2, 35),\ (-2, 35),\ (4, -1),\ (-4, -1).$$

Zadatak A-1.2.

Na ploči su bili napisani svi prirodni brojevi od 1 do nekog broja. Nakon što je jedan od brojeva obrisan, aritmetička sredina preostalih brojeva na ploči iznosi $\frac{673}{18}$. Koji je broj obrisan?

Prvo rješenje.

Neka je najveći napisani prirodni broj n, a izbrisan broj k. Zbroj prvih n prirodnih brojeva iznosi $\frac{n(n+1)}{2}$.

Uvjet zadatka može se zapisati kao

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-k}{n-1}=\frac{673}{18}.$$ 2 boda

Kada bi izbrisani broj k bio n, dobili bismo najmanju moguću aritmetičku sredinu. Ona bi iznosila

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-n}{n-1}=\frac{n}{2},$$ 1 bod

i manja je ili jednaka dobivenoj aritmetičkoj sredini:

$$\frac{n}{2}\leqslant\frac{673}{18}.$$ 1 bod

Kada bi izbrisani broj k bio 1, dobili bismo najveću moguću aritmetičku sredinu. Ona bi iznosila

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{n-1}=\frac{n+1}{2},$$ 1 bod

i veća je ili jednaka dobivenoj aritmetičkoj sredini:

$$\frac{n+1}{2}\geqslant\frac{673}{18}.$$ 1 bod

Iz dobivenih nejednakosti slijedi $72<n<75$, odakle je $n=73$ ili $n=74$. 2 boda

Ako je $n=73$, tada je

$$\frac{673}{18}=\frac{\frac{73\cdot(73+1)}{2}-k}{73-1}.$$

Odavde slijedi $k=9$. 1 bod

Ako je $n=74$, dobivamo da je

$$\frac{673}{18}=\frac{\frac{74\cdot(74+1)}{2}-k}{74-1}.$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo da je $k=\frac{821}{18}$, što nije prirodan broj pa zaključujemo da n ne može biti 74. 1 bod

Zaključujemo da je s ploče obrisan broj 9.

Drugo rješenje.

Koristeći oznake i jednadžbu

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - k}{n-1} = \frac{673}{18} \qquad \text{2 boda}$$

kao u prvom rješenju, uvjet možemo zapisati kao

$$74 + \frac{7}{9} = n + 2 \cdot \frac{n-k}{n-1}.$$

Kako je $k \leqslant n$, slijedi $\frac{n-k}{n-1} \geqslant \frac{n-n}{n-1} = 0$. 1 bod

Zato je $n \leqslant 74 + \frac{7}{9} < 75$. 1 bod

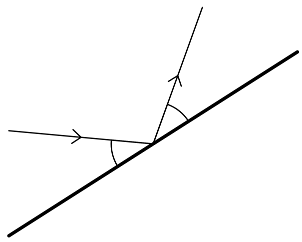
Kako je $k \geqslant 1$, slijedi $\frac{n-k}{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n-1} = 1$. 1 bod

Zato je $n - 2 \geqslant 74 + \frac{7}{9} > 74$. 1 bod

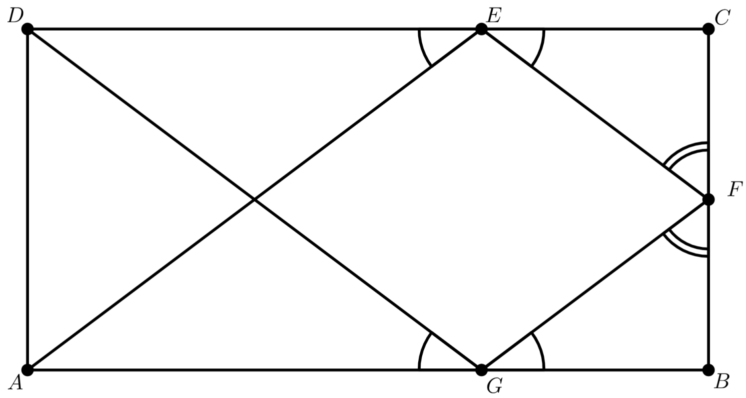
Iz dobivenih nejednakosti zaključujemo da su moguće vrijednosti za n brojevi 73 ili 74, a te mogućnosti provjerimo kao u prošlom rješenju. 4 boda

Zadatak A-1.3.

Biljarski stol ima oblik pravokutnika $ABCD$ i dimenzije $|AB| = 2$ m i $|BC| = 1$ m. Biljarska kugla giba se po stolu pravocrtno dok ne dođe do ruba pravokutnika, a tada se odbija tako da putanja kugle prije i poslije odbijanja zatvara s rubom sukladne kutove. Ako biljarska kugla započne gibanje u točki A te nakon odbijanja od stranica $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom završi gibanje u točki D, odredi ukupnu udaljenost koju je kugla prešla. Kuglu promatramo kao materijalnu točku.



Prvo rješenje.



Neka su E, F i G redom točke u kojima se kugla odbija od stranica $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$. Uvjet odbijanja biljarske kugle znači da vrijede jednakosti

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle CEF, \quad \sphericalangle EFC = \sphericalangle GFB, \quad \sphericalangle FGB = \sphericalangle DGA.$$

Označimo s $l = |AE| + |EF| + |FG| + |GD|$ duljinu putanje koju je prešla biljarska kugla.

Promotrimo trokute AGD i DEA. To su pravokutni trokuti s pravim kutovima pri vrhovima A i D redom, imaju zajedničku katetu $\overline{AD}$, a za kutove nasuprot te katete vrijedi

$$\sphericalangle DGA = \sphericalangle FGB = 90^\circ - \sphericalangle GFB = 90^\circ - \sphericalangle EFC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle AED.$$ 2 boda

Zato se svi kutovi tih trokuta u parovima podudaraju, pa su ti trokuti sukladni prema K–S–K poučku o sukladnosti. 1 bod

Iz te sukladnosti slijedi da je $|AE| = |DG|$ te $|AG| = |DE|$, pa onda i $|BG| = |CE|$. 1 bod

Promotrimo pravokutne trokute BGF i CEF. Svi kutovi im se u parovima poklapaju (zbog $\sphericalangle EFC = \sphericalangle GFB$), te imaju jedan par stranica jednake duljine (zbog $|BG| = |CE|$). Zato su i oni sukladni prema K–S–K poučku o sukladnosti. 1 bod

Zaključujemo da je

$$|CF| = |FB| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}\text{ m},$$ 1 bod

te $|EF| = |FG|$.

Budući da je $\sphericalangle DGA = \sphericalangle FGB$, pravokutni trokuti DGA i FGB su slični. Zato vrijedi

$$\frac{|DG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|GB|} = \frac{|FB|}{|DA|} = \frac{1}{2}.$$ 1 bod

Zajedno s $|AG| + |GB| = 2$ m dobivamo $|BG| = \dfrac{2}{3}$ m. 1 bod

Duljina putanje koju je prešla biljarska kugla iznosi

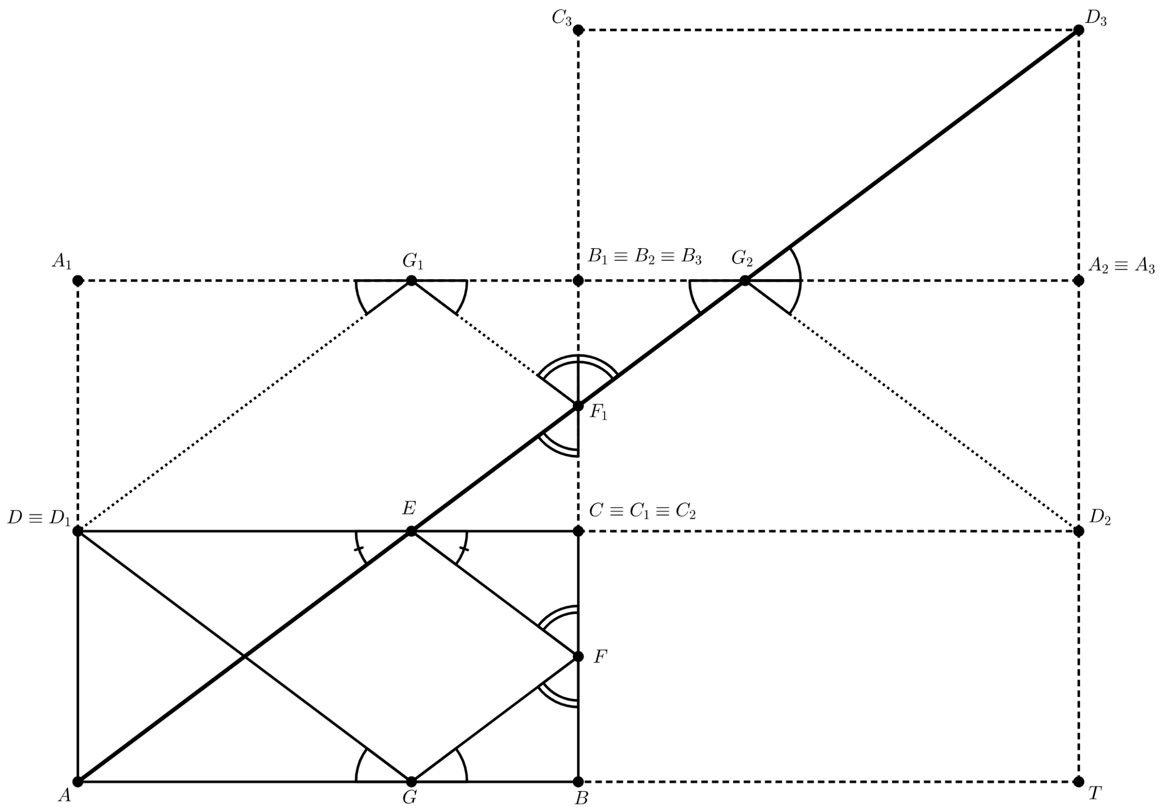
$$\begin{aligned} l &= |AE| + |EF| + |FG| + |GD| \\ &= |GD| + |FG| + |FG| + |GD| \\ &= 2|FG| + |FG| + |FG| + 2|FG| \\ &= 6|FG|. \end{aligned}$$ 1 bod

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut FGB dobivamo

$$|FG| = \sqrt{|FB|^2 + |GB|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\text{ m} = \frac{5}{6}\text{ m},$$

odakle je $l = 5$ m. 1 bod

Drugo rješenje.



Neka su točke E, F i G dane kao u prošlom rješenju, te l duljina putanje biljarske kugle.

Neka je $A_1B_1C_1D_1$ osnosimetrična slika pravokutnika $ABCD$ u odnosu na pravac CD. Dodatno, istom osnom simetrijom preslikajmo i putanju biljarske kugle nakon točke E ($E \to F \to G \to D$) u putanju $E \to F_1 \to G_1 \to D_1$. Zbog osne simetrije i uvjeta odbijanja biljarske kugle vrijedi

$$\sphericalangle F_1EC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle AED.$$

Kutovi kod vrha E se podudaraju pa su točke A, E i F_1 kolinearne. 2 boda

Posebno, vrijedi $|AE| + |EF_1| = |AF_1|$. Osna simetrija čuva duljine dužina, pa vrijedi

$$\begin{aligned} l &= |AE| + |EF| + |FG| + |GD| \\ &= |AE| + |EF_1| + |F_1G_1| + |G_1D_1| \\ &= |AF_1| + |F_1G_1| + |G_1D_1|. \end{aligned}$$

Neka su $A_2B_2C_2D_2$ i točka G_2 osnosimetrična slika pravokutnika $A_1B_1C_1D_1$ i točke G_1 redom u odnosu na pravac B_1C_1, te $A_3B_3C_3D_3$ osnosimetrična slika pravokutnika $A_2B_2C_2D_2$ u odnosu na pravac A_2B_2.

Na sličan način se pokazuje da su točke G_2 i D_3 na istom pravcu na kojem su točke A, E i F_1. Zaključujemo da se preostali dijelovi putanje kugle nizom osnih simetrija preslikavaju tako da čine dužinu koja spaja A i D_3, pa je ukupna duljina putanje kugle jednaka $l = |AD_3|$. 6 bodova

Neka je T osnosimetrična slika točke A u odnosu na pravac BC. Dužina $\overline{AD_3}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta ATD_3 kojemu su duljine kateta $2|AB| = 4$ m i $3|BC| = 3$ m pa je

$$l = |AD_3| = \sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m} = 5 \text{ m}.$$ 2 boda

Napomena: Za potpuno rješenje potrebno je dokazati da je poligonalna linija između A i D_3 dobivena osnosimetričnim preslikavanjima originalne putanje biljarske kugle zapravo ravna linija. Za to je dovoljno pokazati kolinearnost na jednom primjeru odbijanja kugle od stranice (kao u prikazanom rješenju). Rješenja koja nemaju takav dokaz mogu ostvariti najviše 8 bodova.

Zadatak A-1.4.

Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$, dokaži da je

$$(a+b)^2ab + (b+c)^2bc + (c+a)^2ca + 4abc(a+b+c) = 0.$$

Prvo rješenje.

Uvjet zadatka možemo zapisati u obliku $(a+b+c)^3 - a^3 = b^3 + c^3$. Primjenom razlike i zbroja kubova dobivamo

$$((a+b+c)-a)((a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$ 1 bod

$$(b+c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) = (b+c)(b^2 - bc + c^2)$$

$$(b+c)(3a^2 + 3ab + 3bc + 3ca) = 0$$ 2 boda

$$(b+c)(a+b)(a+c) = 0$$ 2 boda

Jedan od faktora na lijevoj strani jednadžbe mora biti jednak nuli. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a + b = 0$. 1 bod

Tada koristeći $b = -a$ izraz iz tvrdnje zadatka možemo izraziti preko a i c:

$$\begin{aligned} &(a+b)^2ab + (b+c)^2bc + (c+a)^2ca + 4abc(a+b+c) \\ &\quad = 0 + (-a+c)^2(-a)c + (c+a)^2ac + 4a(-a)c(0+c) \\ &\quad = -ac(a^2 - 2ac + c^2) + ac(a^2 + 2ac + c^2) - 4a^2c^2 \\ &\quad = 0, \end{aligned}$$ 1 bod, 3 boda

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Raspišimo uvjet zadatka. Dobivamo redom

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc &= a^3 + b^3 + c^3 \\ 3(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2abc) &= 0 \\ a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 2abc &= 0. \end{aligned}$$ 2 boda

Uvedimo oznaku $S=a+b+c$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2ab+(b+c)^2bc+(c+a)^2ca+4abc(a+b+c)\\
&\quad=(S-c)^2ab+(S-a)^2bc+(S-b)^2ca+4Sabc\\
&\quad=S^2(ab+bc+ca)-6Sabc+c^2ab+a^2bc+b^2ca+4Sabc\\
&\quad=S^2(ab+bc+ca)-6Sabc+Sabc+4Sabc && \text{3 boda}\\
&\quad=S^2(ab+bc+ca)-Sabc\\
&\quad=S(S(ab+bc+ca)-abc)\\
&\quad=S((a+b+c)(ab+bc+ca)-abc)\\
&\quad=S(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc-abc) && \text{3 boda}\\
&\quad=S(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+2abc)\\
&\quad=0, && \text{2 boda}
\end{aligned}$$

budući da je izraz u drugoj zagradi jednak nuli prema uvjetu zadatka.

Napomena: Svaki dokaz da je uvjet zadatka ekvivalentan s $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ vrijedi 5 bodova.

Ako učenici u prvom rješenju ne zaključe da je dovoljno tvrdnju dokazivati samo slučaj $a+b=0$ nego dokazuju tvrdnju i u slučajevima $b+c=0$ i $c+a=0$, za taj dio potpunog dokaza ostvaruju 1 bod koji odgovara šestom bodu prve bodovne sheme.

U drugoj bodovnoj shemi 3 boda ostvaruju se prvo za izlučivanje izraza S iz svih pribrojnika u izrazu iz tvrdnje zadatka, a zatim 3 boda za točno raspisivanje izraza u preostaloj zagradi na monome.

Zadatak A-1.5.

Dokaži da među bilo kojih pet vrhova pravilnog deveterokuta postoje četiri koja su vrhovi trapeza.

Prvo rješenje.

Za svaku dijagonalu pravilnog deveterokuta postoje još dvije dijagonale i jedna stranica tog deveterokuta koje su sve međusobno paralelne. Posebno, svaka stranica i dijagonala paralelna je jednoj od 9 stranica pravilnog deveterokuta. 4 boda

Pretpostavimo tvrdnju suprotnu onoj iz zadatka: postoji odabir pet točaka takvih da nikojih četiri ne čine vrhove trapeza. Promotrimo taj izbor točaka.

Tih pet točaka određuje $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ dužina. Svaka od tih dužina paralelna je nekoj od 9 stranica pravilnog deveterokuta. Prema Dirichletovom principu postoje dvije dužine koje su određene s dva para nekih od pet odabranih točaka te koje su paralelne istoj stranici deveterokuta, pa su posebno i međusobno paralelne. 4 boda

Krajnje točke tih dviju dužine su sve međusobno različite jer bismo u suprotnom imali 3 kolinearne točke među vrhovima pravilnog deveterokuta. Upravo te četiri točke čine vrhove trapeza (te paralelne dužine njegove su osnovice), čime je tvrdnja zadatka dokazana. 2 boda

Drugo rješenje.

Označimo ponovno vrhove deveterokuta $A_1, A_2, \ldots, A_9$ redom.

Pretpostavimo suprotno: postoji odabir pet točaka takvih da nikojih četiri ne čine vrhove trapeza. Promotrimo taj izbor točaka.

Prvo dokažimo da u tom odabiru postoje dvije susjedne točke deveterokuta. Fiksirajmo bilo koju neodabranu točku. Ostalih 8 točaka možemo podijeliti u četiri para susjednih točaka deveterokuta. Prema Dirichletovom principu, među pet odabranih točaka postoje dvije koje su u istom paru, pa su zato susjedne. 2 boda

Primijetimo da nikoje četiri točke od pet odabranih nisu uzastopne u deveterokutu, jer bi one činile vrhove trapeza.

Zato promotrimo dva slučaja: među pet odabranih točaka postoje tri uzastopne točke i među pet odabranih točaka nikoje tri točke nisu uzastopne.

U prvom slučaju neka su bez smanjenja općenitosti te tri uzatopne točke A_1, A_2 i A_3. Kako četiri uzastopne točke čine vrhove trapeza, A_9 i A_4 nisu odabrane točke. To znači da su među preostale četiri točke A_5, A_6, A_7 i A_8 dvije odabrane. 1 bod

Te dvije preostale točke nisu uzastopne jer bi s A_1 i A_2 činile vrhove trapeza. Također, dvije preostale točke ne smiju biti odijeljene točno jednom točkom jer bi tada s A_1 i A_3 činile vrhove trapeza. Preostala je mogućnost da su te dvije točke A_5 i A_8, no one čine vrhove trapeza s točkama A_1 i A_3. 3 boda

Promotrimo sada drugi slučaj: nikoje tri točke nisu uzastopne. Kako postoji par uzastopnih točaka među odabranima, neka su bez smanjenja općenitosti A_1 i A_2 odabrane točke. Točke A_3 i A_9 nisu odabrane jer bi imali niz triju uzastopnih točaka. To znači da su među preostalih pet točaka A_4, A_5, A_6, A_7 i A_8 tri odabrane. 1 bod

Nikoje dvije odabrane točke od tih pet ne smiju biti uzastopne jer bi s A_1 i A_2 činile vrhove trapeza. Preostaje nam samo mogućnost da su odabrane točke A_4, A_6 i A_8, no one čine vrhove trapeza s A_2. 3 boda

Ovime smo došli do kontradikcije, jer ne postoji odabir pet točaka među kojima ne postoje četiri koje čine vrhove trapeza, pa je tvrdnja zadatka dokazana.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2-2x+4}=1.$$

Rješenje.

Prebacivanjem jednog izraza s lijeve strane jednadžbe na desnu i kvadriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
-\sqrt{x^2-2x+4} &= 1-\sqrt{x^2+x+3} \\
x^2-2x+4 &= 1-2\sqrt{x^2+x+3}+x^2+x+3 && \text{1 bod} \\
-3x &= -2\sqrt{x^2+x+3} && \text{3 boda} \\
3x &= 2\sqrt{x^2+x+3}.
\end{aligned}$$

Ponovnim kvadriranjem i sređivanjem imamo

$$\begin{aligned}
9x^2 &= 4(x^2+x+3) \\
9x^2 &= 4x^2+4x+12 \\
5x^2-4x-12 &= 0. && \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1=2$ i $x_2=-\dfrac{6}{5}$. 1 bod

Uvrštavanjem rješenja $x=2$ u početnu jednadžbu vidimo da to jest rješenje. 1 bod

S druge strane, uvrštavanjem $x=-\dfrac{6}{5}$ u početnu jednadžbu vidimo da to nije rješenje. 1 bod

Zaključujemo da je jedino rješenje početne jednadžbe $x=2$.

Napomena: Da $x=-\dfrac{6}{5}$ nije rješenje početne jednadžbe možemo vidjeti i tako što sigurno ne zadovoljava jednakost $3x=\sqrt{x^2+x+3}$, jer je jedna strana jednakosti pozitivna, a druga negativna.

Rješenje se može provesti (i bodovati) analogno i ako se na desnu stranu jednakosti ne prebaci član $\sqrt{x^2+x+3}$ nego $\sqrt{x^2-2x+4}$.

Zadatak A-2.2.

Neka je a realan broj. Ako jednadžba $x^2 - ax + a = 0$ ima dva (ne nužno različita) realna rješenja x_1 i x_2, dokaži da vrijedi $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2(x_1 + x_2)$.

Prvo rješenje.

Iz Vièteovih formula imamo $x_1 + x_2 = -(-a) = a$ i $x_1 x_2 = a$. 3 boda

Kvadriranjem izraza $x_1 + x_2$ imamo

$$a^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2a,$$ 2 boda

odnosno $x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2a$.

Prema tome, tražena tvrdnja je ekvivalentna tvrdnji $a^2 - 2a \geqslant 2a$, odnosno $a^2 - 4a \geqslant 0$. 1 bod

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2 - ax + a$ iznosi $D = a^2 - 4a$. 2 boda

Ona je nužno nenegativna (jer jednadžba ima realna rješenja). 1 bod

Dakle, nejednakost $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2(x_1 + x_2)$ ekvivalentna je nejednakosti $D \geqslant 0$, koja vrijedi, čime je tvrdnja dokazana. 1 bod

Drugo rješenje.

Iz Vièteovih formula imamo $x_1 + x_2 = -(-a) = a$. 2 boda

Kako su x_1 i x_2 rješenja početne jednadžbe, znamo da vrijedi $x_1^2 = ax_1 - a$ i $x_2^2 = ax_2 - a$. 2 boda

Lijeva strana nejednakosti jednaka je

$$x_1^2 + x_2^2 = (ax_1 - a) + (ax_2 - a) = a^2 - 2a,$$ 1 bod

odnosno, potrebno je dokazati da je $a^2 - 2a \geqslant 2a$, tj. $a^2 - 4a \geqslant 0$. 1 bod

Kao u prvom rješenju vidimo da je ta nejednadžba ekvivalentna uvjetu da je diskriminanta nenegativna, čime je tvrdnja dokazana. 4 boda

Treće rješenje.

Korištenjem formula za rješenje kvadratne jednadžbe

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2},$$ 1 bod

dobivamo

$$x_1 + x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2} = a,$$ 2 boda

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + (a^2 - 4a)\right) = a^2 - 2a,$$ 2 boda

odakle je uvjet koji treba dokazati ekvivalentan $a^2 - 4a \geqslant 0$. 1 bod

Kao u prvom rješenju vidimo da je ta nejednadžba ekvivalentna uvjetu da je diskriminanta nenegativna, čime je tvrdnja dokazana. 4 boda

Zadatak A-2.3.

Odredi sve uređene trojke (m, n, p), pri čemu su m i n prirodni brojevi, a p prost broj, za koje vrijedi

$$(2m + 3)(4n + 1) = pmn.$$

Prvo rješenje.

Primijetimo da vrijedi $m \mid (2m + 3)(4n + 1)$. Kako je $D(m, 2m + 3) = D(m, 3)$, razlikujemo mogućnosti $D(m, 3) = 1$ i $D(m, 3) = 3$ (odnosno $3 \mid m$).

Pretpostavimo prvo da je $D(m, 3) = 1$. Zato m nužno dijeli $4n + 1$. Slično, kako $n \mid (2m + 3)(4n + 1)$ te kako su n i $4n + 1$ relativno prosti brojevi, vrijedi $n \mid 2m + 3$. 2 boda

Početnu jednakost možemo zapisati kao

$$\frac{2m + 3}{n} \cdot \frac{4n + 1}{m} = p,$$

gdje je na lijevoj strani dan umnožak dvaju prirodnih brojeva. Kako je p prost broj, imamo dvije mogućnosti: prvi od njih je 1, a drugi p ili obratno. 1 bod

U prvom slučaju imamo $2m+3 = np$ i $4n+1 = m$. Uvrštavanjem imamo $2(4n+1)+3 = np$, odnosno $(p - 8)n = 5$. Ne može vrijediti $p - 8 = 1$ jer p ne bi bio prost broj, pa je jedino moguće rješenje $n = 1$, $p - 8 = 5$, odnosno $p = 13$ i $m = 5$. 1 bod

U drugom slučaju je $2m+3 =$ i $4n+1 = mp$. Uvrštavanjem imamo $4(2m+3)+1 = mp$, odnosno $m(p - 8) = 13$. Iz $p - 8 = 1$ i $p - 8 = 13$ slijedilo bi $p = 9$ ili $p = 21$ što nisu prosti brojevi, pa ovaj slučaj nema rješenja. 1 bod

Pretpostavimo sada da $3 \mid m$. Dakle, m možemo zapisati u obliku $m = 3k$, $k \in \mathbb{N}$. Sada uvrštavanjem u početnu jednakost i sređivanjem dobivamo $(2k + 1)(4n + 1) = pkn$.

Kako je $D(2k + 1, k) = 1$ i $D(4n + 1, n) = 1$, slično kao ranije zaključujemo $k \mid 4n + 1$ i $n \mid 2k + 1$. 2 boda

Zato početnu jednakost možemo zapisati u obliku

$$\frac{2k + 1}{n} \cdot \frac{4n + 1}{k} = p,$$

gdje je na lijevoj strani dan umnožak dvaju prirodnih brojeva, te razlikujemo dva slučaja: prvi od njih je jednak 1, a drugi p ili obratno. 1 bod

U prvom slučaju je $2k + 1 = np$ i $4n + 1 = k$. Uvrštavanjem slijedi $2(4n + 1) + 1 = np$ odnosno $n(p - 8) = 3$. Jedino rješenje je $n = 1$, $p - 8 = 3$, odnosno $p = 11$, $k = 5$, $m = 15$. 1 bod

U drugom slučaju je $2k+1 = n$ i $4n+1 = kp$, odnosno $4(2k+1)+1 = kp$, $k(p-8) = 5$. Slijedi $k = 1$, $p - 8 = 5$, odnosno $p = 13$, $m = 3$, $n = 3$. 1 bod

Prema tome, sva rješenja su $(m, n, p) = (5, 1, 13), (15, 1, 11)$ i $(3, 3, 13)$.

Drugo rješenje.

Iz početne jednakosti redom dobivamo

$$\begin{aligned}(2m+3)(4n+1) &= pmn\\ 2m+12n+8mn+3 &= pmn\\ 2m+12n+3 &= (p-8)mn\\ m &= \frac{12n+3}{(p-8)n-2}.\end{aligned}$$

1 bod

Početnu jednakost možemo također zapisati kao

$$p=\frac{2m+3}{m}\cdot\frac{4n+1}{n}=\left(2+\frac{3}{m}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right).$$

1 bod

Kako recipročna vrijednost prirodnog broja nije veća od 1 niti manja od 0, desna strana gornje jednakosti može se ograničiti između $(2+0)\cdot(4+0)=8$ i $(2+3)\cdot(4+1)=25$. Zaključujemo da je p između 8 i 25. Kako je prost, mogućnosti su $p=11,13,17,19,23$. 4 boda

Ako je $p=11$, uvrštavanjem imamo $m=\dfrac{12n+3}{3n-2}=4+\dfrac{11}{3n-2}$. Nužno vrijedi $3n-2=1$ ili $3n-2=11$. U prvom slučaju dobivamo $n=1$, $m=5$, a u drugom slučaju nema rješenja. 1 bod

Ako je $p=13$, uvrštavanjem imamo $m=\dfrac{12n+3}{5n-2}=2+\dfrac{2n+7}{5n-2}$. Primijetimo da je za $n\geqslant 4$ nazivnik veći od brojnika pa rezultat nije cijeli broj. Za $n=1$ slijedi $m=15$, za $n=2$ rezultat nije cijeli broj, a za $n=3$ dobivamo $m=3$. 1 bod

Ako je $p=17$, slijedi $m=\dfrac{12n+3}{9n-2}=1+\dfrac{3n+5}{9n-2}$. Za $n=1$ rezultat nije cijeli broj, a uza $n\geqslant 2$ nazivnik je veći od brojnika, pa ovaj slučaj nema rješenja. 1 bod

Ako je $p=19$, imamo $m=\dfrac{12n+3}{11n-2}=1+\dfrac{n+5}{11n-2}$, pa ovaj slučaj nema rješenja jer je nazivnik veći od brojnika za sve $n\in\mathbb{N}$. Slično, ako je $p=23$, uvrštavanjem imamo $m=\dfrac{12n+3}{15n-2}=1-\dfrac{3n-5}{15n-2}$, pa iz istog razloga nema rješenja. 1 bod

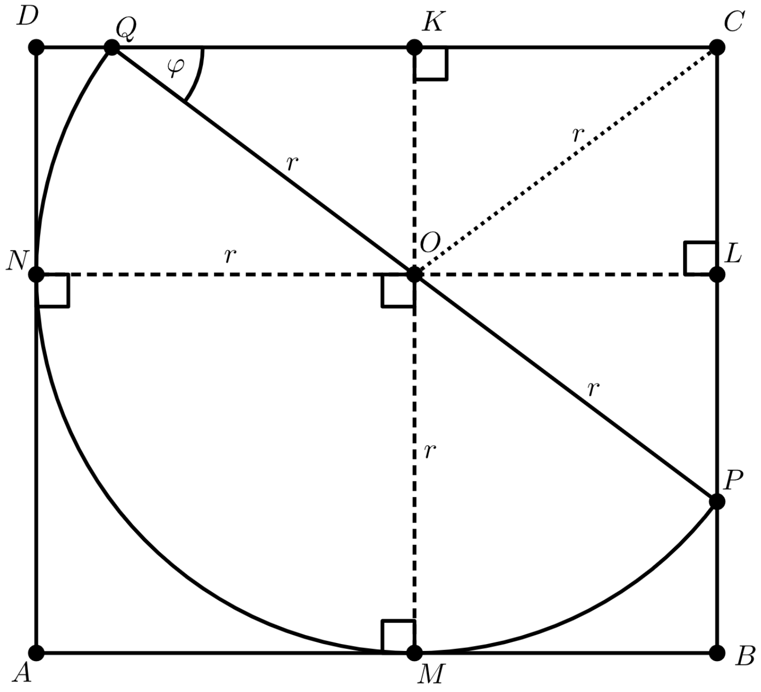
Prema tome, sva rješenja su $(m,n,p)=(15,1,11)$, $(5,1,13)$ i $(3,3,13)$.

Napomena: U slučaju da učenici nisu ostvarili bodove na drugačiji način, sva pogođena rješenja bez dokaza da su to sva nose 2 boda, a dva pogođena rješenja nose 1 bod.

Zadatak A-2.4.

Polukrug promjera $\overline{PQ}$ upisan je u pravokutnik $ABCD$ i dira njegove stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Pritom se točka P nalazi na stranici $\overline{BC}$, a točka Q na stranici $\overline{CD}$. Ako je $|BP|=2$ i $|DQ|=1$, odredi $|PQ|$.

Prvo rješenje.



Neka je O središte, a r radijus danog polukruga. Neka su točke K, L, M i N ortogonalne projekcije točke O na stranice $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ redom. Neka je φ mjera kuta $\sphericalangle CQP$.

Kako je spojnica središta i dirališta polukruga okomita na stranicu koju taj polukrug dira, točke M i N upravo su dirališta polukruga i stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Posebno, $|OM| = |ON| = r$. U četverokutu $AMON$ kutovi pri vrhovima A, M i N su pravi, pa je taj četverokut kvadrat stranice duljine r. 1 bod

U pravokutnom trokutu QKO vrijedi $|QK| = r\cos\varphi$. 1 bod

Slično, u pravokutnom trokutu PLO imamo $|PL| = r\sin\varphi$. 1 bod

Promotrimo četverokut $OKDN$. To je pravokutnik jer su kutovi pri vrhovima K, D i N pravi. Zato vrijedi $|DK| = |ON|$, odakle je

$$1 + r\sin\varphi = |DQ| + |QK| = |DK| = |ON| = r.$$ 2 boda

Slično, iz pravokutnika $LOMB$ dobivamo $2 + r\cos\varphi = r$. 1 bod

Zapišemo li te jednadžbe kao

$$r\sin\varphi = r - 1, \quad r\cos\varphi = r - 2,$$

kvadriramo i zbrojimo, dobivamo

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$ 1 bod

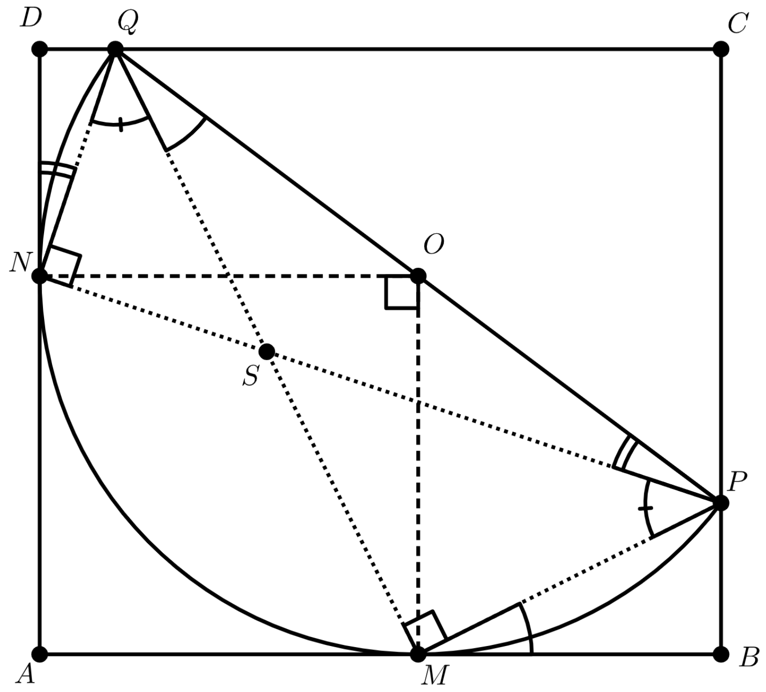
$$0 = r^2 - 6r + 5.$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $r = 1$ i $r = 5$. 1 bod

Rješenje $r = 1$ odbacujemo jer u tom slučaju iz jednadžbe $r\cos\varphi = r - 2$ dobivamo $\cos\varphi = -1$, što je nemoguće ako je φ mjera šiljastog kuta pravokutnog trokuta PCQ. 1 bod

Dakle, $r = 5$, pa je $|PQ| = 2r = 10$. 1 bod

Drugo rješenje.



Definirajmo točke M, N i O kao u prošlom rješenju, te neka je S sjecište pravaca NP i QM. Neka x i y označavaju duljine dužina $\overline{PM}$ i $\overline{QN}$ redom.

Promotrimo trokute QMP i MBP. To su pravokutni trokuti (prema Talesovom teoremu svaki kut nad promjerom $\overline{PQ}$ je pravi).

Nadalje, pravac AB tangenta je na taj polukrug, pa prema teoremu o kutu između tetive i tangente vrijedi $\sphericalangle PMB = \sphericalangle PQM$. 1 bod

Zaključujemo da su dva para kuta tih trokuta jednaka, pa su trokuti slični prema K–K poučku o sličnosti.

Zato vrijedi $\dfrac{|PB|}{|PM|} = \dfrac{|PM|}{|PQ|}$, odakle je $|PQ| = \dfrac{x^2}{2}$. 1 bod

Analogno, trokuti DQN i QNP su slični i vrijedi $|PQ| = y^2$. 1 bod

Posebno zaključujemo da je $x = y\sqrt{2}$. 1 bod

Kao u prošlom rješenju zaključujemo da je $AMON$ kvadrat, pa je $\sphericalangle MON = 90°$. 1 bod

Promotrimo trokute SMP i SNQ. To su pravokutni trokuti s pravim kutom pri vrhovima M i N. Dodatno, prema teoremu o obodnom i središnjem kutu imamo

$$\sphericalangle NPM = \sphericalangle NQM = \frac{\sphericalangle NOM}{2} = 45°.$$ 1 bod

Zato su trokuti SMP i SNQ su jednakokračni pravokutni, pa je posebno $|QS| = y\sqrt{2} = x$ i $|MS| = x$. 2 boda

Primijenimo Pitagorin poučak na trokut QMP. Kako je $|QM| = |QS| + |SM| = 2x$, slijedi

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |QM|^2 + |MP|^2 \\ \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 &= (2x)^2 + x^2 \\ \frac{1}{4}x^4 &= 5x^2 \\ x^2 &= 20. \end{aligned}$$

1 bod

Konačno, zaključujemo $|PQ| = \dfrac{x^2}{2} = 10.$ 1 bod

Zadatak A-2.5.

Koliko ima prirodnih brojeva čiji zapis u dekadskome sustavu sadržava svaku od deset znamenaka $0, 1, 2, \ldots, 9$ točno jednom, a svaka je znamenka, osim znamenke 9, manja od barem jedne njoj susjedne znamenke?

Rješenje.

Nazovimo *dobrim* deseteroznamenkaste brojeve koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Cilj je naći broj dobrih brojeva. Neka *blok* označava niz susjednih znamenaka dobrog broja.

Promotrimo znamenku 8. Kako bi znamenka 8 imala susjednu znamenku koja je veća od nje, znamenke 8 i 9 moraju činiti blok. 1 bod

Promotrimo sada znamenku 7. Jedine znamenke koje su veće od nje su 8 i 9, pa jedna od njih mora biti njoj susjedna. Kako 8 i 9 čine blok, zaključujemo da znamenke 7, 8 i 9 čine blok. Kako se 7 ne smije naći između znamenaka 8 i 9, mora se naći neposredno lijevo od bloka koje čine znamenke 8 i 9 ili neposredno desno od tog bloka. 2 boda

Za svaku sljedeću znamenku (6, 5, 4, 3, 2 i 1) slično zaključujemo da se mora naći neposredno lijevo ili neposredno desno uz blok koji čine znamenke veće od nje. 3 boda

Poziciju svake znamenke od 8 naniže možemo odabrati na dva načina (lijevo ili desno uz blok znamenaka većih od nje). 2 boda

Konačno, znamenku 0 također možemo smjestiti uz postojeći blok svih preostalih znamenaka, ali ne može doći lijevo od tog bloka jer broj ne smije početi znamenkom nula. 1 bod

Zato ukupno imamo $2^8 = 256$ dobrih brojeva. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Za koje realne brojeve x vrijedi

$$5^{2x} + 4^x < 29 \cdot 10^{x-1}?$$

Rješenje.

Podijelimo početnu nejednadžbu s 10^x i sredimo izraz na lijevoj strani nejednadžbe. Kako je 10^x uvijek pozitivan broj, smjer nejednakosti se ne mijenja. Redom slijedi

$$\frac{5^{2x}}{10^x} + \frac{4^x}{10^x} < \frac{29}{10}$$
$$\frac{5^x}{2^x} + \frac{2^x}{5^x} < \frac{29}{10}.$$ 3 boda

Uvođenjem supstitucije $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ gornja nejednadžba postaje $t + \frac{1}{t} < \frac{29}{10}$. 1 bod

Pomnožimo gornju nejednadžbu sa $10t$. Nejednakost se ponovno ne mijenja jer je $10t > 0$. Dobivamo kvadratnu nejednadžbu $10t^2 - 29t + 10 < 0$. 3 boda

Rješenje kvadratne nejednadžbe je $t \in \left\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \right\rangle$. 1 bod

Iz supstitucije $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ slijedi $\left(\frac{5}{2}\right)^x \in \left\langle \frac{2}{5}, \frac{5}{2} \right\rangle$, odnosno

$$\frac{2}{5} < \left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{5}{2}.$$

Primjenom $\log_{\frac{5}{2}}$ na gornje nejednakosti slijedi $-1 < x < 1$ (baza logaritma je veća od 1 pa se nejednakost ne mijenja), odakle dobivamo konačno rješenje $x \in \langle -1, 1 \rangle$. 2 boda

Napomena: Rješenje se moglo provesti tako da se početna nejednadžba podijelila s 4^x ili 5^{2x}.

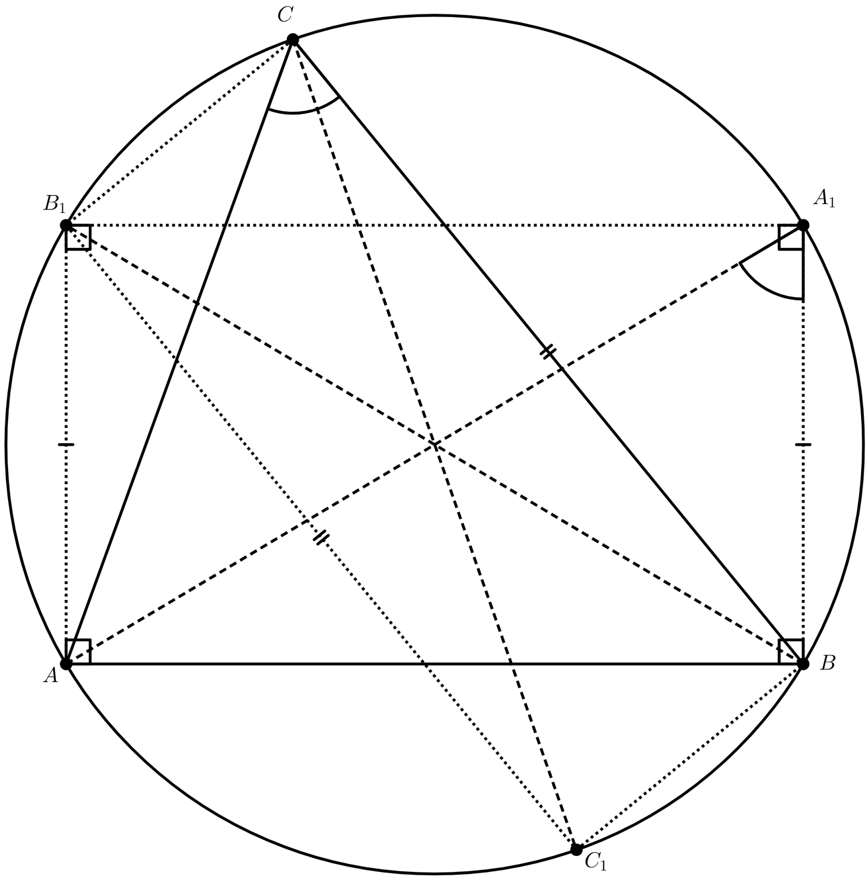
Ako učenici u rješenju ne komentiraju da se nejednakost ne mijenja primjenom logaritma s pozitivnom bazom ili množenjem s pozitivnim brojem koji ovisi o nepoznanici, gube po 1 bod za svaku takvu nejednakost, a ukupno najviše 2 boda.

Zadatak A-3.2.

Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na opisanoj kružnici šiljastokutnog trokuta ABC takve da su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ promjeri te kružnice. Dokaži da vrijedi

$$|A_1B| \cdot |B_1B| + |B_1C| \cdot |C_1A| = |AC| \cdot |BC|.$$

Prvo rješenje.



Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom, te neka su α, β i γ mjere kutova pri vrhovima A, B i C redom. Neka je k opisana kružnica trokuta ABC, a R njezin radijus.

Kako je $\overline{AA_1}$ promjer kružnice k, vrijedi $|AA_1| = 2R$. Nadalje, vrijedi $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = \gamma$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom. 1 bod

Prema Talesovom poučku trokut kut $\sphericalangle B_1AB$ je pravi, pa slijedi

$$|A_1B| = |AA_1| \cos \sphericalangle AA_1B = 2R\cos\gamma.$$ 2 boda

Analogno je $|B_1C| = 2R\cos\alpha$ i $|C_1A| = 2R\cos\beta$. 1 bod

Prema poučku o sinusima vrijedi $a = 2R\sin\alpha$ i $b = 2R\sin\beta$. 2 boda

Uvrštavanjem gornjih jednakosti i $|B_1B| = 2R$ u jednakost iz tvrdnje zadatka slijedi da je potrebno dokazati

$$\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta.$$ 1 bod

Ta jednakost slijedi iz adicijske formule za kosinus:

$$\cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta. \qquad \text{3 boda}$$

Time je tvrdnja zadatka dokazana

Drugo rješenje.

Koristimo oznake kao u prošlom rješenju.

Primjenom Talesovog poučka na promjere $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$ zaključujemo da su svi kutovi u četverokutu ABA_1B_1 pravi, pa je to pravokutnik. Zato je je $|AB_1| = |BA_1|$. 2 boda

Analogno, BCB_1C_1 je pravokutnik, pa je $|B_1C_1| = |BC|$. 2 boda

Primjenom Ptolomejevog teorema na tetivni četverokut AC_1CB_1 dobivamo

$$|AC_1|\cdot|B_1C| + |C_1C|\cdot|AB_1| = |AC|\cdot|B_1C_1|. \qquad \text{5 bodova}$$

Uvrštavanjem gornjih jednakosti i korištenjem $|C_1C| = |B_1B| = 2R$ (promjeri kružnice) slijedi tvrdnja zadatka. 1 bod

Zadatak A-3.3.

Odredi sve uređene trojke prirodnih brojeva (a,b,c) za koje je $2^a+2^b+2^c+3$ kvadrat nekoga prirodnog broja.

Rješenje.

Budući da je izraz $2^a+2^b+2^c+3$ simetričan u a, b i c možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $a \leqslant b \leqslant c$.

Ako je $a \geqslant 2$, tada $2^a+2^b+2^c+3$ daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4 i stoga ne može biti kvadrat prirodnog broja. Dakle, mora biti $a = 1$. 1 bod

Nadalje, ako je $b \geqslant 3$, tada $2^a+2^b+2^c+3 = 2^b+2^c+5$ daje ostatak 5 pri dijeljenju s 8 pa zbog toga ne može biti kvadrat prirodnog broja. 1 bod

Preostaje provjeriti slučajeve kada je $b = 1$ i $b = 2$.

Ako je $b = 1$, tada $2^a+2^b+2^c+3 = 2^c+7$ mora biti potpuni kvadrat.

Ako je $c \geqslant 2$, tada će 2^c+7 dati ostatak 3 pri dijeljenju s 4 i zbog toga 2^c+7 neće biti potpun kvadrat. 1 bod

Direktnom provjerom vidimo da za $c = 1$ dobivamo rješenje, jer je $2^1+2^1+2^1+3 = 9$ potpun kvadrat. 1 bod

Ako je $b = 2$, tada $2^a+2^b+2^c+3 = 2^c+9$ mora biti potpuni kvadrat, tj. $2^c+9 = k^2$ za neki prirodni broj k. Koristeći razliku kvadata, jednadžbu zapišimo kao

$$2^c = k^2 - 9 = (k-3)(k+3). \qquad \text{1 bod}$$

Iz gornje jednakosti slijedi da su $k-3$ i $k+3$ potencije od 2, tj. $k-3 = 2^{c_1}$ i $k+3 = 2^{c_2}$ pri čemu su c_1 i c_2 nenegativni cijeli brojevi takvi da je $c = c_1 + c_2$ i $c_1 < c_2$. 2 boda

Oduzimanjem tih jednakosti slijedi

$$6 = 2^{c_2} - 2^{c_1} = 2^{c_1}(2^{c_2-c_1} - 1)$$

iz čega zaključujemo da je $c_1 = 1$ i $c_2 = 3$, odnosno $c = 4$. U tom slučaju je $k = 5$. 2 boda

Dakle, uz pretpostavku $a \leqslant b \leqslant c$ imamo da su rješenja $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 2, 4)$.

Sve moguće trojke brojeva (a, b, c) dobivamo permutiranjem gornjih rješenja:

$$(a, b, c) = (1, 1, 1),\ (1, 2, 4),\ (1, 4, 2),\ (2, 1, 4),\ (2, 4, 1),\ (4, 1, 2),\ (4, 2, 1).$$ 1 bod

Zadatak A-3.4.

Dokaži da je zbroj

$$\frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}$$

jednak

$$\frac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}.$$

Rješenje.

Označimo

$$S = \frac{\cos 3^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}.$$

Pomnožimo cijeli izraz za S sa $\sin 1^\circ$, dobivamo

$$\sin 1^\circ \cdot S = \frac{\cos 3^\circ \sin 1^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} + \cdots + \frac{\cos 89^\circ \sin 1^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ}.$$ 2 boda

Opći član sume u izrazu za $\sin 1^\circ \cdot S$ je oblika $\dfrac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ}$.

Primjenom formule pretvorbe za razliku kosinusa nazivnik možemo zapisati kao

$$\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ = -2 \sin(2n+2)^\circ \sin(2n)^\circ.$$ 2 boda

Primjenom formule pretvorbe za produkt sinusa i kosinusa brojnik možemo zapisati kao

$$\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ = \frac{1}{2}\left(\sin(2n+2)^\circ - \sin(2n)^\circ\right).$$ 2 boda

Ovime opći član u sumi možemo zapisati kao

$$\frac{\cos(2n+1)^\circ \sin 1^\circ}{\cos(4n+2)^\circ - \cos 2^\circ} = \frac{\sin(2n+2)^\circ - \sin(2n)^\circ}{-4 \sin(2n+2)^\circ \sin(2n)^\circ} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin(2n+2)^\circ} - \frac{1}{\sin(2n)^\circ}\right).$$ 2 boda

Uvrštavanjem u izraz za $\sin 1^\circ \cdot S$ redom imamo

$$\begin{aligned}
\sin 1^\circ \cdot S &= \frac{\cos 3^\circ \sin 1^\circ}{\cos 6^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 5^\circ \sin 1^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 2^\circ} + \frac{\cos 89^\circ \sin 1^\circ}{\cos 178^\circ - \cos 2^\circ} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin 4^\circ} - \frac{1}{\sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 6^\circ} - \frac{1}{\sin 4^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 90^\circ} - \frac{1}{\sin 88^\circ}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sin 2^\circ}\right).
\end{aligned}$$ 2 boda

Konačno slijedi da je $S = \dfrac{\sin 2^\circ - 1}{4 \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ}$, što je trebalo dokazati.

Zadatak A-3.5.

Na karticama su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 2024^2. Zbroj svih tih brojeva iznosi $2024A$. Manuel je odabrao 2024 kartice s brojevima čiji je zbroj jednak A. Dokaži da Neva može preostale kartice rasporediti u 2023 skupine tako da u svakoj skupini budu po 2024 kartice i da zbroj brojeva na karticama u svakoj skupini bude jednak A.

Rješenje.

Kako je zbroj svih brojeva od 1 do 2024^2 jednak $\dfrac{2024^2(2024^2+1)}{2}$, zaključujemo da je $A = 1012(2024^2+1)$. 1 bod

Raspodijelimo sve brojeve od 1 do 2024^2 u parove

$$(1, 2024^2), \quad (2, 2024^2-1), \quad (3, 2024^2-2), \quad \ldots$$

tako da je svaki broj u točno jednom paru, te da je zbroj elemenata svakog para jednak 2024^2+1. 3 boda

Posebno, suma elemenata bilo kojih 1012 parova iznosi A.

Pretpostavimo da je u n parova (za neki $n \in \mathbb{N}_0$) Manuel odabrao oba broja među svoje 2024 kartice, te da je u m parova (za neki $m \in \mathbb{N}_0$) odabrao samo jedan broj među svoje 2024 kartice. Kako je odabrao 2024 broja, vrijedi $2n + m = 2024$.

Neka Neva u prvom potezu u jednu skupinu smjesti preostale članove m Manuelovih parova, te $2n$ brojeva iz bilo kojih n do sada neiskorištenih parova. Kako su sada Neva i Manuel odabrali ukupno 4048 brojeva iz $2n + m = 2024$ parova, njihova ukupna suma je $2A$. Kako je zbroj Manuelovih brojeva jednak A, zaključujemo da je i zbroj elemenata prve Nevine skupine jednak A. 3 boda

Nakon prvog poteza ne postoji par u kojem jedan broj jest odabran, a drugi nije. To znači da Neva može preostale brojeve razvrstati u skupine tako da u svaku od njih smjesti elemente bilo kojih 1012 parova. Tako će zbroj elemenata svake skupine iznositi A, čime je tvrdnja zadatka dokazana. 3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. veljače 2024.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dokaži da svi članovi niza

$$a_1 = 4\cdot 2024^1 - 2024, \quad a_2 = 4\cdot 2024^2 - 20244, \quad \ldots, \quad a_n = 4\cdot 2024^n - \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n\text{ puta}}}, \text{ za } n \in \mathbb{N},$$

daju ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

Prvo rješenje.

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom. Baza indukcije zadovoljena je za $n = 1$ jer je $a_1 = 3 \cdot 2024 = 319 \cdot 19 + 11$. 1 bod

Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da a_n daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19, odnosno $19 \mid a_n - 11$.

Za korak indukcije, primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 4 \cdot 2024^{n+1} - \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n+1\text{ put}}} \\
&= 2024 \cdot 4 \cdot 2024^n - 10 \cdot \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n\text{ puta}}} - 4 \\
&= 10(4 \cdot 2024^n - \overline{202\underbrace{4\ldots4}_{n\text{ puta}}}) + 2014 \cdot 4 \cdot 2024^n - 4 \\
&= 10a_n + 2014 \cdot 4 \cdot 2024^n - 4.
\end{aligned}$$

3 boda

Kako je 2014 djeljiv s 19, broj $2014 \cdot 4 \cdot 2024^n$ je oblika $19k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 10a_n + 19k - 4 \\
&= 10(a_n - 11) + 19k + 10 \cdot 11 - 4 \\
&= 10(a_n - 11) + 19k + 106.
\end{aligned}$$

3 boda

Prema pretpostavci indukcije, broj $a_n - 11$ djeljiv je s 11. Zato a_{n+1} i broj 106 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19. Kako je $106 = 5 \cdot 19 + 11$, dokaz koraka je gotov. 3 boda

Principom matematičke indukcije dokazali smo tvrdnju, a time je dokazana i tvrdnja zadatka.

Drugo rješenje.

Članovi niza a_n mogu se zapisati kao

$$a_n = 4 \cdot 2024^n - 202 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$ 3 boda

Dokažimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $19 \mid a_n - 11$.

Kako 2024 i 10 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19, isto vrijedi i za brojeve 2024^n i 10^n. 1 bod

Također, broj 202 daje ostatak 12 pri dijeljenju s 19. Zato će broj $a_n - 11$ biti djeljiv s 19 ako je s 19 djeljiv broj

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^n - 12 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - 11 &= \frac{-72 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^n + 4 - 99}{9} \\ &= \frac{-76 \cdot 10^n - 95}{9} \\ &= -\frac{19\,(4 \cdot 10^n + 5)}{9}. \end{aligned}$$

3 boda

2 boda

Broj na kraju niza jednakosti cijeli je broj (budući da je i broj s kojim smo krenuli cijeli) kojem je nazivnik djeljiv s 19, a brojnik relativno prost s 19, pa zaključujemo da je taj broj višekratnik broja 19, što je i trebalo dokazati. 1 bod

Treće rješenje.

Članovi niza a_n mogu se zapisati kao

$$a_n = 4 \cdot 2024^n - 202 \cdot 10^n - 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9}.$$ 3 boda

Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom. Baza indukcije zadovoljena je za $n = 1$ jer je $a_1 = 3 \cdot 2024 = 319 \cdot 19 + 11$. 1 bod

Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da a_n daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19.

Za korak indukcije dokažimo da i a_{n+1} daje ostatak 11 pri dijeljenju s 19, a za to je dovoljno dokazati da $19 \mid a_{n+1} - a_n$. Primijetimo da je

$$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 2023 \cdot 2024^n - 202 \cdot 9 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^n.$$ 2 boda

Kako 2024 i 10 daju isti ostatak pri dijeljenju s 19, isto vrijedi i za brojeve 2024^n i 10^n. 1 bod

Zato razlika $a_{n+1} - a_n$ pri dijeljenju s 19 daje isti ostatak kao broj

$$4 \cdot 2023 \cdot 10^n - 202 \cdot 9 \cdot 10^{n-1} - 4 \cdot 10^{n-1} = 6270 \cdot 10^n.$$ 2 boda

Kako je $6270 = 33 \cdot 19$, razlika $a_{n+1} - a_n$ djeljiva je s 19, što smo i htjeli dokazati. Time smo korak indukcije, pa je tvrdnja zadatka dokazana principom matematičke indukcije. 1 bod

Zadatak A-4.2.

Neka su x_1, x_2 i x_3 različite nultočke polinoma $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Odredi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3}.$$

Prvo rješenje.

Za nultočku x_1 polinoma P vrijedi

$$\begin{aligned} x_1^3 - 3x_1 + 1 &= 0 \\ x_1^3 - 3x_1 &= -1 && \text{1 bod} \\ x_1^2 - 3 &= -\frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_1^2 - 3} &= -x_1. && \text{4 boda} \end{aligned}$$

Analogno vrijedi i za x_2 i x_3, pa za traženi izraz vrijedi

$$\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3} = -(x_1 + x_2 + x_3).$$ 3 boda

Po Viéteovom formulama je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, pa je taj izraz jednak nuli. 2 boda

Drugo rješenje.

Svedimo izraz na zajednički nazivnik:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1^2 - 3} + \frac{1}{x_2^2 - 3} + \frac{1}{x_3^2 - 3} \\ &\quad = \frac{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3) + (x_1^2 - 3)(x_3^2 - 3) + (x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)}{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)} \\ &\quad = \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27}{(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3)(x_3^2 - 3)}. \end{aligned}$$ 1 bod

Po Viéteovim formulama vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -3. \end{aligned}$$ 2 boda

Koristeći te formule, dobivamo

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 6,$$ 3 boda

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 9.$$ 3 boda

Zato za brojnik traženog izraza vrijedi

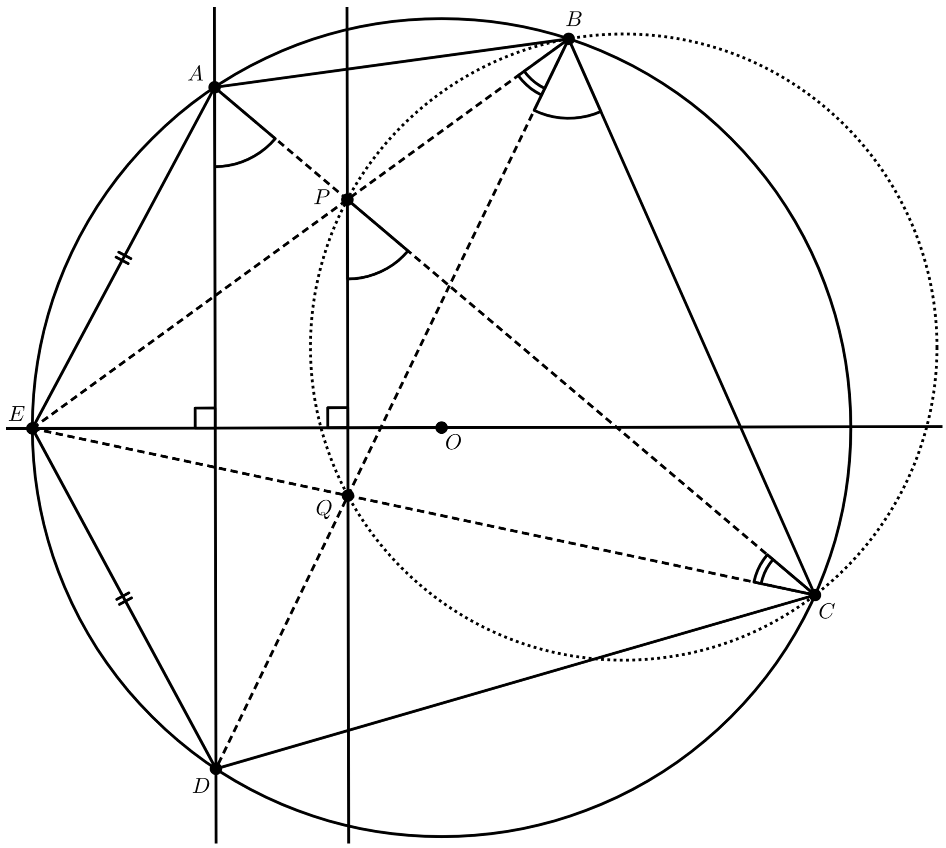
$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27 = 9 - 6 \cdot 6 + 27 = 0,$$

pa je traženi izraz jednak 0. 1 bod

Zadatak A-4.3.

Neka je $ABCDE$ peterokut upisan u kružnicu sa središtem O. Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ sijeku se u točki P, a dužine $\overline{BD}$ i $\overline{EC}$ u točki Q. Ako su pravci PQ i AD međusobno paralelni, dokaži da je pravac EO okomit na ta dva pravca.

Rješenje.



Kako su pravci AD i PQ paralelni, vrijedi $\sphericalangle QPC = \sphericalangle DAC$. 1 bod

Promatrajući kutove nad tetivom $\overline{DC}$ zaključujemo $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \sphericalangle QBC$. 1 bod

Kako vrijedi $\sphericalangle QPC = \sphericalangle QBC$, zaključujemo da je četverokut $BPQC$ tetivan. 3 boda

Promatrajući tetivu $\overline{PQ}$ u tom četverokutu dobivamo

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACE.$$ 1 bod

Kako su kutovi nad tetivama $\overline{AE}$ i $\overline{DE}$ tetivnog peterokuta $ABCDE$ jednaki, zaključujemo da je $|AE| = |DE|$. 2 boda

Točka E jednako je udaljena od krajnjih točaka dužine $\overline{AD}$, pa leži na simetrali te dužine. No, isto to vrijedi i za točku O, pa je pravac EO simetrala dužine $\overline{AD}$ i okomit je na AD, što je i trebalo dokazati. 2 boda

Zadatak A-4.4.

Odredi sve proste brojeve p za koje postoji točno pet prirodnih brojeva n takvih da je $n + p \mid n^3 + p^2$.

Prvo rješenje.

Zbroj kubova $n^3 + p^3 = (n + p)(n^2 - np + p^2)$ djeljiv je s $n + p$. Kako je prema uvjetu zadatka $n^3 + p^2$ djeljivo s $n + p$, ekvivalentno tome je da je i

$$(n^3 + p^3) - (n^3 + p^2) = p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$$

djeljivo s $n + p$. 1 bod

Pretpostavimo da postoje n i p takvi da $n + p \mid p^2(p - 1)$ i da n nije djeljiv s p. Tada su n i p relativno prosti, a zato su $n + p$ i p također relativno prosti. 1 bod

Zato nužno vrijedi $n + p \mid p - 1$, što je nemoguće jer je $n + p > p - 1 > 0$. Dakle, n mora biti djeljiv s p. 2 boda

Zaključujemo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = kp$. Naći sve proste p za koje postoji pet prirodnih bojeva iz uvjeta zadatka sada je ekvivalentno problemu naći sve proste p za koje postoji pet prirodnih brojeva k za koje vrijedi

$$k + 1 \mid p(p - 1).$$ 1 bod

Broj k zadovoljava taj uvjet ako i samo ako je oblika $d - 1$, gdje je d djelitelj broja $p(p - 1)$ koji je veći od 1. Kako je 1 djelitelj svakog broja, potrebno je naći sve p za koje izraz $p(p - 1)$ ima točno 6 prirodnih djelitelja. 2 boda

Lako vidimo da p ne može biti jednak 2 i 3, te da $p = 5$ jest rješenje jer broj $p(p-1) = 20$ ima šest djelitelja. 1 bod

Pretpostavimo sad da je $p \geqslant 7$. Tada je $p - 1 = 2m$ za neki prirodan $m \geqslant 3$. No u tom slučaju broj $p(p - 1) = 2m(2m + 1)$ ima barem osam različitih djelitelja:

$$1, 2, m, 2m, 2m + 1, 2(2m + 1), m(2m + 1), 2m(m + 1),$$

pa za $p \geqslant 7$ ne dobivamo nova rješenja. 2 boda

Zaključujemo da je $p = 5$ jedini prost broj koji zadovoljava uvjet zadatka.

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da je potrebno pronaći sve proste brojeve p za koje izraz $p(p - 1)$ ima točno 6 prirodnih djelitelja. 7 bodova

Za prirodan broj m vrijedi formula za broj prirodnih djelitelja prirodnog broja

$$\tau(m) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

gdje je $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ rastav tog broja na proste faktore. Kako su p i $p - 1$ relativno prosti, a $\tau(p) = 2$, koristeći tu formulu za $p(p-1)$ zaključujemo da je nužno $\tau(p-1) = 3$. Umnožak s desne strane formule za $\tau(m)$ može biti jednak 3 samo ako je jedna od tih zagrada jednaka 3, a sve ostale 1, tj. kada je m jednak kvadratu prostog broja. Dakle, postoji prost broj q takav da je $p - 1 = q^2$. 2 boda

Promatrajući tu jednadžbu vidimo da su p i q različite parnosti, što je moguće samo ako je jedan od njih jednak 2. U slučaju $p = 2$ ne dobivamo rješenje, dok u slučaju $q = 2$ dobivamo jedino rješenje $p = 5$. 1 bod

Zadatak A-4.5.

Odredi (ako postoji) najveći prirodni broj koji se ne može prikazati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$.

Prvo rješenje.

Reći ćemo da je prirodan broj *prikaziv* ako se može zapisati kao zbroj nekih, ne nužno različitih, elemenata skupa $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$. Označimo skup sa S skup dozvoljenih pribrojnika $\{135, 136, 137, \dots, 144\}$ sa S i definirajmo skupove

$$S_k = \{135k, 135k + 1, \dots, 144k\}.$$ 1 bod

Dokažimo da je broj n prikaziv kao zbroj k pribrojnika iz S ako i samo ako je $n \in S_k$. 2 boda

Ako se broj n može prikazati kao suma k elemenata skupa S, tada je očito broj n u skupu S_k (jer je k pribrojnika iz njegove sume između 135 i 144). 1 bod

Dokažimo sada obrat: svaki broj iz S_k prikaziv kao zbroj k pribrojnika iz S. Pretpostavimo suprotno, postoje neki brojevi iz S_k koji nisu prikazivi i neka je n_0 najmanji među njima. Sigurno $n_0 \neq 135k$, budući da se taj broj može prikazati kao zbroj k ponavljanja pribrojnika 135. Zato je $n_0 > 135k$, pa je broj $n_0 - 1$ prikaziv. Broj $n_0 - 1$ je manji od $144k$, pa je jedan pribrojnik u njegovom zapisu manji od 144. Uvećavanjem tog pribrojnika za 1 (dok sve ostale pribrojnike ostavimo iste) dobivamo zbroj k elemenata iz S koji iznosi n_0, što je kontradikcija s neprikazivosti broja n_0. Dakle, svi brojevi između $135k$ i $144k$ su prikazivi. 3 boda

Nađimo sada najveći broj koji nije prikaziv. Ako neki prirodan broj m nije prikaziv, tada se ne nalazi ni u jednom skupu S_k. Posebno, nalazi se između dva uzastopna skupa S_k i S_{k+1}, tj. $144k < m < 135(k + 1)$, a to je moguće ako i samo ako je

$$144k + 2 \leqslant 135(k + 1),$$ 1 bod

odakle je $k \leqslant 14$. Dakle, za $k \geqslant 15$ nema brojeva koji se nalaze između S_k i S_{k+1}, pa su najveći neprikazivi brojevi između S_{14} i S_{15}. 1 bod

Najveći broj između $S_{14} = \{1890, \dots, 2016\}$ i $S_{15} = \{2025, \dots, 2160\}$ je 2024, pa je to ujedno i najveći neprikaziv broj. 1 bod

Drugo rješenje.

Koristeći oznake iz prvog rješenja, dokažimo drugačije da je svaki broj iz S_k prikaziv.

Broj n je prikaziv kao suma k pribrojnika iz S ako i samo ako je $\tilde{n} := n - 135k$ prikaziv kao suma k pribrojnika iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$ (svakom od k pribrojnika možemo pribrojiti/oduzeti broj 135). Zato je potrebno dokazati da se svi brojevi $\tilde{n} \in \{0, 1, \dots, 9k\}$ mogu prikazati kao suma k pribrojnika iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$. 1 bod

Ako je $\tilde{n} = 9k$, broj je prikaziv kao zbroj k devetki. Inače broj $\tilde{n}$ cjelobrojno podijelimo s 9: dobivamo $\tilde{n} = 9p + r$ za $p \in [0, \dots, k - 1]$ i $r \in [0, \dots, 8]$. Sada vidimo da je $\tilde{n}$ prikaziv kao suma p devetki, jednog broja r, te $k-p-1$ nula, čime je tvrdnja dokazana. 2 boda

Ostatak dokaza provodi se kao u prošlom rješenju, te se boduje na isti način. 7 bodova