Zimska radionica - Povezivanje područja

Matija Bašić

12. siječnja 2024.

Zadaci

1. Neka je S konačan skup u trodimenzionalnom prostoru. Neka su S_x, S_y i S_z skupovi ortogonalnih projekcija točaka iz S na yz-ravninu, xz-ravninu i xy-ravninu, redom. Dokaži da vrijedi
$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

2. Nad stranicama trokuta ABC konstruirani su prema van jednakostranični trokuti. Neka su A_1, B_1, C_1 redom središta tih jednakostraničnih trokuta. Dokaži da je trokut $A_1B_1C_1$ jednakostraničan.

3. Dokaži da $p(x) = x^2 + x + 1$ dijeli $q(x) = x^{3034} + x^{2024} + x^{1014}$.

4. Odredi broj podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, 2024\}$ čiji zbroj elemenata je djeljiv brojem 5.

5. Za $\alpha \in [0, \pi]$, izračunajte zbroj
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\alpha.$$

6. Dokaži da broj
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$
nije djeljiv brojem 5 ni za koji cijeli broj $n \geqslant 0$.

7. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Neka su dane $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jedinične kružnice u ravnini sa središtima $O_1, O_2, \ldots, O_n$, redom. Ako nijedan pravac ne siječe više od dvije dane kružnice, dokaži da vrijedi
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

8. Neka je n prirodan broj i λ pozitivan realan broj. Na početku se n buha nalazi na horizontalnom pravcu, pri čemu nisu sve na istom mjestu. Potez se sastoji od odabira dvije buhe u točkama A i B, pri čemu je A lijevo od B, te preskakanja buhe iz točke A u točku C preko točke B tako da $\frac{|BC|}{|AB|} = \lambda$.

   Odredi sve vrijednosti λ takve da za bilo koju točku M i bilo koji početni raspored buha na pravcu, postoji konačan niz poteza kojima se može postići da se svebuhe nalaze desno od točke M.

9. Dano je $4n$ kamenčića težina 1, 2, 3, $\dots$, $4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:

   - Ukupne težine obje hrpe su jednake.
   - Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

10. Spernerova lema:

    Jednakostraničan trokut T ima vrhove označene 0, 1 i 2, te je podijeljen na manje trokute pri čemu vrh svakog trokuta ima također oznaku 0, 1 ili 2, a vrhovi koji leže na stranicama trokuta T imaju jednu od dvije oznake krajnjih točaka stranice na kojoj leže. Dokaži da postoji mali trokut s različitim oznakama vrhova.

    Brouwerov teorem o fiksnoj točki:

    Neka je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, te neka je $f\colon D \to D$ neprekidna funkcija. Dokaži da postoji $x \in D$ tako da je $f(x) = x$.