Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

5. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 3. veljače 2024.

1. Odredi najmanji prirodan broj n za koji postoje pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da je

$$n = \lfloor xy \rfloor \cdot \lfloor yz \rfloor = (x+y+z)^2 + 2.$$

Napomena. Za realan broj t, sa $\lfloor t \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak t.

2. U jednom gradu postoje tri škole, nazovimo ih A, B i C, pri čemu svaku školu pohađa barem jedan učenik. Poznato je da kako god odabrali po jednog učenika iz svake škole, među odabranim učenicima postojat će dva koja se poznaju te dva koja se ne poznaju. Dokaži da je najmanje jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

- postoji učenik iz A koji poznaje sve učenike iz B
- postoji učenik iz B koji poznaje sve učenike iz C
- postoji učenik iz C koji poznaje sve učenike iz A.

3. Dan je šiljastokutni trokut ABC. Označimo s k kružnicu s promjerom $\overline{AB}$. Kružnica koja dira simetralu kuta $\sphericalangle BAC$ u točki A i koja prolazi kroz točku C siječe se s kružnicom k u točki P različitoj od A. Slično, kružnica koja dira simetralu kuta $\sphericalangle CBA$ u točki B i koja prolazi kroz točku C siječe se s kružnicom k u točki Q različitoj od B. Dokaži da se pravci AQ i BP sijeku na simetrali kuta $\sphericalangle ACB$.

4. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $n! - n + 1$ kvadrat prirodnog broja.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Hrvatsko matematičko društvo

5. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 4. veljače 2024.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a, b vrijedi

$$f(ab + a + b) = f(b)\Big(f\big(f(a)\big) - f\big(f(b)\big) + f(b)\Big).$$

2. Maša ima 300 čaša. Volumen svake čaše je pozitivan realan broj. Poznato je da je zbroj volumena svih čaša 2102, te da za svaki $n \in \{1, 2, \ldots, 300\}$ postoji n čaša čiji je zbroj volumena prirodan broj. Odredi najmanji mogući volumen najveće čaše.

3. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ nalaze se redom točke E i F takve da pravci DE i DF dijele dijagonalu $\overline{AC}$ na tri sukladna dijela. Ako vrijedi

$$P(ADE) = P(CDF) = \frac{1}{4}\,P(ABCD),$$

dokaži da je $ABCD$ paralelogram.

Napomena. $P(\ldots)$ označava površinu lika.

4. Za prirodne brojeve a i b, neka je $N(a, b)$ broj prirodnih brojeva k za koje je

$$\frac{k^2}{ak - b}$$

prirodan broj. Dokaži da je za svaki par prirodnih brojeva (a, b) broj $N(a, b)$ konačan, te odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje je broj $N(a, b)$ neparan.

Vrijeme rješavanja: 4 sata
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.