5. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Prvi dan

Zagreb, 3. veljače 2024.

Zadatak 1.

Odredi najmanji prirodan broj n za koji postoje pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da je

$$n = \lfloor xy \rfloor \cdot \lfloor yz \rfloor = (x + y + z)^2 + 2.$$

Napomena. Za realan broj t, sa $\lfloor t \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak t.

Rješenje.

Imamo

$$\lfloor xy \rfloor \lfloor yz \rfloor \leqslant xy \cdot yz \leqslant \frac{(xy + yz)^2}{4},$$

gdje prva nejednakost slijedi iz $\lfloor t \rfloor \leqslant t$, a druga je AG nejednakost.

Nadalje, $y(x + z) \leqslant \frac{(x+y+z)^2}{4}$ ponovno po AG nejednakosti, pa kombiniranjem tih nejednakosti dobivamo

$$n = \lfloor xy \rfloor \lfloor yz \rfloor \leqslant \frac{(x + y + z)^4}{64} = \frac{(n - 2)^2}{64}.$$

Dakle, $(n - 2)^2 \geqslant 64n$ odnosno $4 \geqslant n(68 - n)$. Za $n \leqslant 67$ desna strana je veća od 68, pa zaključujemo $n \geqslant 68$.

Za $n = 68$ moramo imati $\lfloor xy \rfloor \cdot \lfloor yz \rfloor = 68$. Ali onda je barem jedan od faktora s desne strane veći ili jednak 17, jer je 17 najmanji djelitelj od 68 veći od $\sqrt{68}$. Bez smanjenja općenitosti neka je to $\lfloor xy \rfloor$. Onda je $xy \geqslant 17$, pa je opet po AG nejednakosti $x + y \geqslant 2\sqrt{17}$, ali onda je $(x + y + z)^2 > 68$, kontradikcija.

Analogno, za $n = 69$ je neki od brojeva $\lfloor xy \rfloor, \lfloor yz \rfloor$ veći ili jednak 23. Recimo da je to $\lfloor xy \rfloor$. Onda je $x + y \geqslant 2\sqrt{23}$ i $(x + y + z)^2 > 92$, kontradikcija.

Za $n = 70$, stavimo $y = \sqrt{17}$, $x = \frac{10}{\sqrt{17}}$, $z = \frac{7}{\sqrt{17}}$. Tada je $xy = 10$, $yz = 7$ i $x + y + z = 2\sqrt{17}$, pa je

$$\lfloor xy \rfloor \lfloor yz \rfloor = (x + y + z)^2 + 2 = 70.$$

Zaključujemo da je odgovor $n = 70$.

Zadatak 2.

U jednom gradu postoje tri škole, nazovimo ih A, B i C, pri čemu svaku školu pohađa barem jedan učenik. Poznato je da kako god odabrali po jednog učenika iz svake škole, među odabranim učenicima postojat će dva koja se poznaju te dva koja se ne poznaju. Dokaži da je najmanje jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

- postoji učenik iz A koji poznaje sve učenike iz B
- postoji učenik iz B koji poznaje sve učenike iz C
- postoji učenik iz C koji poznaje sve učenike iz A.

Rješenje.

Dokazat ćemo tvrdnju indukcijom po n, gdje je n broj učenika svih triju škola.

Riješimo prvo poseban slučaj kad neka škola ima samo jednog učenika (to ujedno pokriva i bazu indukcije za $n = 3$).

Bez smanjenja općenitosti neka je A škola s jednim učenikom kojeg ćemo zvati a. Onda ako netko iz C poznaje a, zadovoljen je treći uvjet. Inače nitko iz C ne poznaje a. Ako prvi uvjet nije zadovoljen, onda a ne poznaje nekog učenika b iz B. Ako drugi uvjet nije zadovoljen, onda postoji c iz C takav da b ne poznaje c. Međutim, onda trojka $\{a, b, c\}$ ne zadovoljava uvjet zadatka jer se nikoja dva učenika iz trojke ne poznaju. Time je ovaj poseban slučaj dokazan.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi kad god ima manje od n učenika u sve tri škole zajedno, te promotrimo konfiguraciju s n učenika. Pretpostavimo da ne vrijedi nijedno od tri svojstva. Tada u sve tri škole postoji barem dva učenika.

Uzmimo bilo kojeg učenika a iz A, te sa A' označimo školu dobivenu micanjem a iz škole A. Ako primijenimo pretpostavku indukcije na A', B, C dobijemo da postoji učenik c iz C koji poznaje sve učenike iz A'.

Označimo sada s C' školu dobivenu micanjem c iz C, te primijenimo sada pretpostavku indukcije na A, B, C'. Dobivamo da postoji b iz B koji poznaje sve učenike iz C'.

Onda c ne poznaje a jer bi inače vrijedio treći uvjet, i b ne poznaje c jer bi inače vrijedio drugi uvjet, pa zaključujemo da a poznaje b. Međutim, onda nitko iz škole C' ne poznaje a, jer bismo onda imali trojku učenika koji se svi međusobno poznaju. Kako ni c ne poznaje a, zaključujemo da nitko iz C ne poznaje a. Međutim, a je bio proizvoljan, pa se nikoja dva učenika iz A i C ne poznaju. Analognim argumentom bismo isto mogli zaključiti za škole B i A, te za škole C i B. Dobivamo da nitko nikog ne poznaje, što je kontradikcija s uvjetom zadatka. Dakle, korak indukcije je dokazan.

Zadatak 3.

Dan je šiljastokutni trokut ABC. Označimo s k kružnicu s promjerom $\overline{AB}$. Kružnica koja dira simetralu kuta $\sphericalangle BAC$ u točki A i koja prolazi kroz točku C siječe se s kružnicom k u točki P različitoj od A. Slično, kružnica koja dira simetralu kuta $\sphericalangle CBA$ u točki B i koja prolazi kroz točku C siječe se s kružnicom k u točki Q različitoj od B. Dokaži da se pravci AQ i BP sijeku na simetrali kuta $\sphericalangle ACB$.

Rješenje.

Neka su α, β i γ redom mjere kutova u vrhovima A, B i C trokuta ABC. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Označimo s k_1 kružnicu koja dira AI u točki A i prolazi kroz C.

Dokažimo najprije da je četverokut $BCPI$ tetivan.

Imamo da je

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Budući da je AI tangenta na kružnicu k_1, po teoremu o kutu između tetive i tangente zaključujemo da je mjere obodnih kutova nad tetivom $\overline{AP}$ kružnice k_1 iznose $\sphericalangle IAC = \dfrac{\alpha}{2}$. Iz toga slijedi ta je $\sphericalangle CPA = 180^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Također znamo da je $\sphericalangle APB = 90^\circ$ jer je $\overline{AB}$ promjer kružnice k.

Konačno imamo da je

$$\sphericalangle BPC = 360^\circ - \sphericalangle CPA - \sphericalangle APB = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BIC$$

iz čega slijedi da je četverokut $BCPI$ tetivan.

Sasvim analogno je i četverokut $AIQC$ tetivan.

Označimo s ω_1 i ω_2 redom opisane kružnice četverokuta $AIQC$ i $BCPI$.

Kružnice k i ω_1 se sijeku u točkama A i Q pa je stoga AQ radikalna os kružnica k i ω_1.

Analogno je BP radikalna os kružnica k i ω_2 te CI radikalna os kružnica ω_1 i ω_2.

Konačno, po teoremu o radikalnim osima i radikalnom središtu, zaključujemo da se pravci AQ, BP i CI sijeku u jednoj točki.

Zadatak 4.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je $n! - n + 1$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Za $n \in \{1, 2\}$ imamo $n! - n + 1 = 1^2$, a za $n = 3$ imamo $n! - n + 1 = 2^2$, pa ti brojevi jesu rješenja. Direktnom provjerom vidimo da je $4! - 4 + 1 = 21$, pa 4 nije rješenje.

Dokažimo sada da nijedan $n \geqslant 5$ nije rješenje. Primijetimo da je

$$n! - n + 1 = (n-1)((n-2)! \cdot n - 1).$$

Ako $n-1$ nije prost, onda je $(n-2)!$ djeljiv s $n-1$. Naime, ako je $n-1 = p^2$ za neparan prost broj p, onda je $p < 2p < n-1$ i p^2 dijeli $(n-2)!$, a inače je $n-1 = ab$ za neke $1 < a < b < n-1$, pa i tada $n-1 \mid (n-2)!$.

U tom slučaju su $n-1$ i $(n-2)! \cdot n - 1$ relativno prosti, pa ako je njihov produkt potpun kvadrat, oba moraju biti potpuni kvadrati. Međutim, $(n-2)!$ je djeljivo s 3 zbog $n \geqslant 5$, pa $(n-2)! \cdot n - 1$ daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, pa nije potpun kvadrat.

Ako $n-1$ je prost, onda da bi $(n-1)((n-2)! \cdot n - 1)$ bio potpun kvadrat mora $(n-2)! \cdot n - 1$ biti djeljivo s $n-1$. Međutim, prema Wilsonovom teoremu, za svaki prost broj p vrijedi $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, pa je

$$(n-2)! \cdot n - 1 \equiv -n - 1 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{n-1},$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili da je $n - 1 > 2$. Dakle, ni u ovom slučaju promatrani broj nije potpun kvadrat.

5. HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA ZA DJEVOJKE

Drugi dan

Zagreb, 4. veljače 2024.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve a, b vrijedi

$$f(ab + a + b) = f(b)\Big(f\big(f(a)\big) - f\big(f(b)\big) + f(b)\Big).$$

Rješenje.

Neka je f funkcija koja zadovoljava dani uvjet.

Uvrštavanjem $a = b = 0$ dobivamo $f(0) = f(0)^2$, pa je $f(0) \in \{0, 1\}$. Razdvajamo na slučajeve.

1. $f(0) = 0$. Tada uvrstimo $b = 0$ i imamo $f(a) = 0$ za svaki $a \in \mathbb{Z}$, i to je prvo rješenje.
2. $f(0) = 1$. Opet uvrstimo $b = 0$ i imamo $f(f(a)) - f(a) = f(1) - 1$, odnosno $f(f(a)) = f(a) + c$ za neku konstantu c koja ne ovisi o a. Početni uvjet se korištenjem te tvrdnje svodi na

   $$f(a + b + ab) = f(a)f(b),$$

   jer je $f(f(a)) - f(f(b)) = f(a) - f(b)$.

   Uvrstimo sada $b = -1$. Imamo $f(-1) = f(a)f(-1)$, pa je ili $f(a) = 1$ za svaki $a \in \mathbb{Z}$, za što lako vidimo da je rješenje jednadžbe, ili je $f(-1) = 0$.

   Ako je $f(-1) = 0$, onda je $f(f(-1)) - f(-1) = f(0) - f(-1) = 1$, odnosno $c = 1$ i $f(f(a)) = f(a) + 1$ za svaki a. Sada indukcijom slijedi $f(n) = n + 1$ za svaki $n \geqslant -1$.

   Sad uvrstimo $b = -2$, dobivamo $f(-2 - a) = f(-2)f(a)$. Uvrštavanjem $a = -2$, dobivamo $f(-2)^2 = 1$. Opet razdvajamo na slučajeve.

   (a) $f(-2) = -1$. Tada je $f(-2 - a) = -f(a)$ i odmah imamo $f(a) = a + 1$ za svaki $a \in \mathbb{Z}$. Lako vidimo da je i ta funkcija rješenje.

   (b) $f(-2) = 1$. Tada je $f(-2 - a) = f(a)$ i imamo $f(a) = |a + 1|$ za svaki $a \in \mathbb{Z}$. Može se vidjeti i da je to rješenje početne jednadžbe. Naime, lijeva strana je $|(a + 1)(b + 1)|$, a desna je $|b + 1| \cdot (|a + 1| + 1 - (|b + 1| + 1) + |b + 1|) = |b + 1| \cdot |a + 1|$.

Zadatak 2.

Maša ima 300 čaša. Volumen svake čaše je pozitivan realan broj. Poznato je da je zbroj volumena svih čaša 2102, te da za svaki $n \in \{1, 2, \ldots, 300\}$ postoji n čaša čiji je zbroj volumena prirodan broj. Odredi najmanji mogući volumen najveće čaše.

Rješenje.

Odgovor je $7 + \frac{1}{100}$.

Promotrimo kolekciju čaša u kojoj 100 čaša ima volumen 7, a 200 čaša volumen $7+\frac{1}{100}$. Tvrdimo da ta kolekcija čaša zadovoljava uvjet zadatka.

Zbroj volumena čaša je $300 \cdot 7 + 200 \cdot \frac{1}{100} = 2102$.

Za $n \in \{1, \dots, 100\}$ možemo uzeti n čaša volumena 7 i njihov zbroj volumena je prirodni broj.

Za $n \in \{101, \dots, 200\}$ možemo uzeti $n - 100$ čaša volumena 7 i 100 čaša volumena $7 + \frac{1}{100}$.

Za $n \in \{201, \dots, 300\}$ možemo uzeti $n - 200$ čaša volumena 7 i 200 čaša volumena $7 + \frac{1}{100}$.

Pretpostavimo sada da sve čaše imaju volumen manji od $7 + \frac{1}{100}$. Onda najvećih 100 čaša ima zbroj volumena manji od 701. Uzmimo 100 čaša koje u zbroju imaju cjelobrojni volumen. One imaju zbroj volumena manji od zbroja volumena najvećih 100 čaša, pa im je volumen najviše 700. Zaključujemo da i najmanjih 100 čaša u zbroju ima volumen najviše 700. Međutim, onda srednjih 100 čaša mora imati volumen veći od $2102 - 701 - 700 = 701$, što je kontradikcija jer je to veće od zbroja volumena najvećih 100 čaša.

Zadatak 3.

Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ nalaze se redom točke E i F takve da pravci DE i DF dijele dijagonalu $\overline{AC}$ na tri sukladna dijela. Ako vrijedi

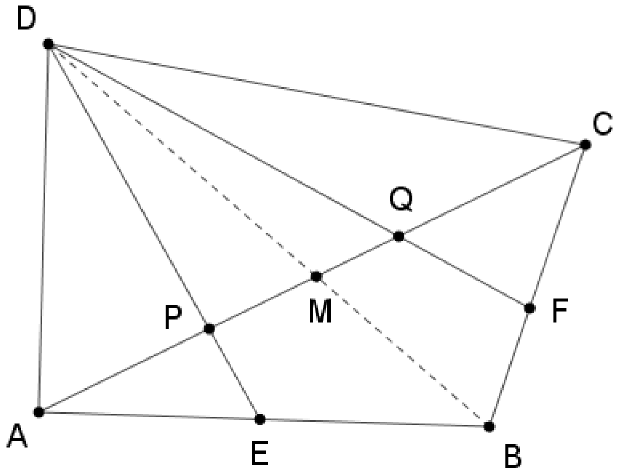
$$P(ADE) = P(CDF) = \frac{1}{4}\, P(ABCD),$$

dokaži da je $ABCD$ paralelogram.

Napomena. $P(\dots)$ označava površinu lika.

Rješenje.

Površine trokuta APD i CQD su jednake ($AP = CQ$, zajednička visina). Zato iz pretpostavke slijedi $P(APE) = P(CQF)$, a odatle dobivamo $AC \parallel EF$.



Označimo $BE/EA = BF/FC = x$. Kako je $BE/EA = P(BED)/P(ADE)$, $P(BED) = \frac{x}{4}P$, i analogno $P(BDF)/P(CDF) = \frac{x}{4}P$, gdje je $P = P(ABCD)$.

Kako je ukupna površina promatrana četiri trokuta upravo P, mora biti $x = 1$. Dakle, E i F su polovišta od AB odnosno BC. To znači da je PC srednjica trokuta ABQ, te da je FQ srednjica trokuta BCP, a iz toga slijedi da je $BPDQ$ paralelogram.

Neka je M sjecište dijagonala danog četverokuta. Vrijedi $BM = DM$ i $PM = MQ$ jer je M sjecište dijagonala paralelograma $BQDP$, a zbog $AP = CQ$ slijedi i $AM = MC$. Konačno, $ABCD$ je paralelogram jer je točka M polovište obje dijagonale.

Zadatak 4.

Za prirodne brojeve a i b, neka je $N(a, b)$ broj prirodnih brojeva k za koje je

$$\frac{k^2}{ak - b}$$

prirodan broj. Dokaži da je za svaki par prirodnih brojeva (a, b) broj $N(a, b)$ konačan, te odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje je broj $N(a, b)$ neparan.

Rješenje.

Dokažimo prvo da ima konačno mnogo (a, b)-dobrih brojeva. Naime, ako je x (a, b)-dobar, onda $ax - b \mid x^2 \implies ax - b \mid ax^2 - x(ax - b) = bx$, iz čega slijedi da $ax - b \mid abx - b(ax - b) = b^2$, odnosno $ax - b$ može poprimati samo konačno mnogo vrijednosti.

Neka je x (a, b)-dobar broj, te neka je $m = \frac{x^2}{ax-b}$. Tada je x nultočka kvadratne jednadžbe

$$t^2 - amt + bm = 0.$$

Označimo sa u drugu nultočku. Tada je u također cijeli broj jer je x cijeli broj. Nadalje, $xu = bm > 0$, pa je u zapravo prirodan broj. Iz Vieta formula imamo $u = am - x$.

Za dani m onda postoje $0, 1$ ili 2 (a, b)-dobra broja x za koje je $\frac{x^2}{ax-b} = m$, s tim da postoji točno jedan ako i samo ako je $x = u$. To se događa ako i samo ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe jednaka 0, odnosno

$$a^2m^2 - 4bm = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$a^2m = 4b.$$

Zaključujemo da ako je

$$\frac{4b}{a^2}$$

prirodan broj, onda je to jedinstveni broj za koji postoji točno jedan pridruženi (a, b)-dobar broj x i tada postoji neparno mnogo (a, b)-dobrih brojeva, a u suprotnom (a, b)-dobri brojevi dolaze u parovima i ima ih parno mnogo. Dakle, traženi parovi su svi (a, b) takvi da $a^2 \mid 4b$.