ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2024.
4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: 1325 : 5 + 15 : 5 – (99 – 9 : 9) · 2 – 35 – 30.

Rješenje.
1325 : 5 + 15 : 5 – (99 – 9 : 9) · 2 – 35 – 30

= 265 + 3 – (99 – 9 : 9) · 2 – 35 – 30 1 BOD

= 265 + 3 – (99 – 1) · 2 – 35 – 30 1 BOD

= 268 – 98 · 2 – 35 – 30 1 BOD

= 268 – 196 – 35 – 30 1 BOD

= 72 – 35 – 30 1 BOD

= 37 – 30

= 7 1 BOD
…....……………………...…………………………………………….….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik pogrešno prepiše neki dio zadatka ili napravi neku pogrešku u računu, za taj dio se oduzmu odgovarajući bodovi, a dalje se boduje principom „slijedi grešku“.

2. Petra ima crne pločice trokutastog oblika od kojih je složila četiri lika kao na slici. Ako nastavi slagati likove prema istom pravilu, koliko će crnih pločica 15. lik u nizu imati više od 10. lika u nizu?

Prvo rješenje.
Uočimo da 2. lik ima dvije pločice više od 1. lika, 3. lik ima tri pločice više od 2. lika, 4. lik ima četiri pločice više od 3. lika i tako redom dalje do 15. lika koji ima petnaest pločica više od 14. lika.

3 BODA

Zato vrijedi:
15. lik ima (15 + 14 + 13 + 12 + 11) pločica više od 10. lika, tj. 2 BODA

15. lik ima 65 pločica više od 10. lika. 1 BOD
…....……………………...……………………………………………….... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
Uočimo da je:

broj crnih pločica 1. lika 1

broj crnih pločica 2. lika 1 + 2

broj crnih pločica 3. lika 1 + 2 + 3

broj crnih pločica 4. lika 1 + 2 + 3 + 4 i tako redom dalje

do 15. lika koji ima 1 + 2 + 3 + … + 15 crnih pločica. 3 BODA

Odredimo broj crnih pločica 15. i 10. lika.

Broj crnih pločica 15. lika je $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15 = 15 \cdot 16 : 2 = 120$, a 1 BOD

broj crnih pločica 10. lika je $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 10 = 10 \cdot 11 : 2 = 55$. 1 BOD

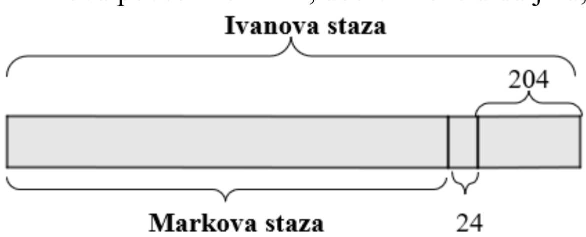
15. lik ima $120 - 55 = 65$ crnih pločica više nego 10. lik. 1 BOD

…....…………………...…………………………………………….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za izračunavanje zbroja prvih 15 odnosno prvih 10 prirodnih brojeva učenik ne mora koristiti Gaussovu dosjetku.

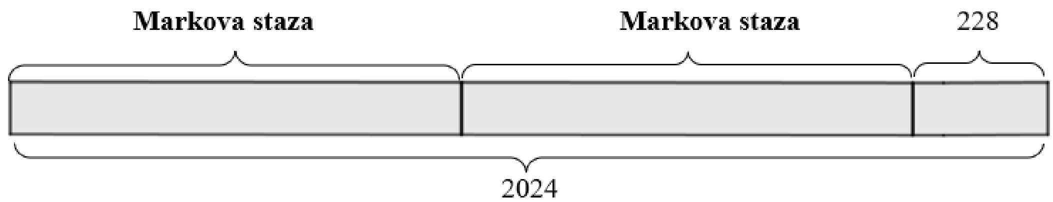
3. Treneri Ivan i Marko organiziraju potragu za blagom kroz dvije šumske staze. Katja je prošla obje staze, Ivanovu i Markovu, te napravila ukupno 2024 koraka iste duljine. Da je na Ivanovoj stazi napravila 204 koraka manje, a na Markovoj stazi 24 koraka više, onda bi na te dvije staze napravila isti broj koraka. Koliko je koraka Katja napravila na Ivanovoj, a koliko na Markovoj stazi?

Prvo rješenje.
Prikažimo crtežom odnos Markove i Ivanove staze. Kad Ivanovu stazu umanjimo za 204 koraka, a Markovu povećamo za 24, dobivamo istu duljinu, što možemo prikazati ovako:



2 BODA

Budući da su Markova i Ivanova staza zajedno duge kao 2024 Katjina koraka, a vidimo na prethodnoj slici da se razlikuju za 228 koraka, onda to možemo prikazati na sljedeći način:



2 BODA

Katja je na Markovoj stazi napravila $(2024 - 228) : 2 = 898$ koraka. 1 BOD

Na Ivanovoj stazi je napravila $898 + 228 = 1126$ koraka. 1 BOD

…....…………………...…………………………………..…………..….…..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
Na obje je staze napravila ukupno 2024 koraka.

Da je na Ivanovoj stazi napravila 204 koraka manje, a na Markovoj 24 koraka više, Katja bi na obje staze napravila ukupno 2024 – 204 + 24 = 1844 koraka. 2 BODA

Tada bi na te dvije staze napravila isti broj koraka i to 1844 : 2 = 922 koraka. 2 BODA

To znači da je Katja na Ivanovoj stazi napravila 922 + 204 = 1126 koraka, a 1 BOD

na Markovoj stazi 922 – 24 = 898 koraka. 1 BOD
…....…………………...……………………………….…..……….... UKUPNO 6 BODOVA

4. Andrija tijekom svibnja, lipnja, srpnja i kolovoza (ukupno 123 dana) svojim susjedima zalijeva cvijeće i kosi travu. Travu je potrebno kositi svaki šesti dan, a cvijeće zalijevati svaki treći dan. Za svaku košnju trave dobije 2 eura i 40 centi, a za svako zalijevanje cvijeća 75 centi. Trećinu svoje ukupne zarade u ta četiri mjeseca Andrija planira donirati u humanitarne svrhe. Koliko će novca donirati ako 1. svibnja bude kosio travu i zalijevao cvijeće?

Prvo rješenje.
Kako je 123 : 6 = 20 i ostatak 3, a 123 : 3 = 41, zaključujemo da je Andrija svojim susjedima 20 puta kosio travu i 41 puta zalio cvijeće. 1 BOD

Za svaku košnju trave dobije 2 eura i 40 centi pa je za 20 košnji trave zaradio:

20 · 2 eura = 40 eura

20 · 40 centi = 800 centi 1 BOD

40 eura i 800 centi = 48 eura 1 BOD

Za svako zalijevanje cvijeća dobije 75 centi pa je za 41 zalijevanje zaradio

41 · 75 centi = 3075 centi = 30 eura i 75 centi. 1 BOD

Ukupno je zaradio 78 eura i 75 centi. 1 BOD

Kako planira donirati trećinu zarade, a 78 : 3 = 26 i 75 : 3 = 25,
donirat će 26 eura i 25 centi. 1 BOD
…....…………………...……………………………….…..……….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenici mogu sve iznose pretvoriti u cente i izračunati da za jednu košnju trave Andrija zaradi 2 eura i 40 centi što je 240 centi pa za dvadeset košnji zaradi 4800 centi.
Za četrdeset i jedno zalijevanja cvijeća zaradi 3075 centi pa mu je ukupna zarada 7875 centi.
7875 : 3 = 2625 centi što je 26 eura i 25 centi i taj iznos će Andrija donirati.

Drugo rješenje.

Za svaku košnju trave zaradi 2 eura i 40 centi, tj. 240 centi.

Od zarade za svaku košnju donirat će 240 : 3 = 80 centi. 1 BOD

Za svako zalijevanje cvijeća zaradi 75 centi.

Od zarade za svako zalijevanje donirat će 75 : 3 = 25 centi. 1 BOD

Kako je 123 : 6 = 20 i ostatak 3, a 123 : 3 = 41, u ta 123 dana Andrija je svojim susjedima 20 puta kosio travu i 41 puta zalio cvijeće. 1 BOD

Od zarade za košnju trave ukupno će donirati $20 \cdot 80$ centi = 1600 centi. 1 BOD

Od zarade za zalijevanje cvijeća ukupno će donirati $41 \cdot 25$ centi = 1025 centi. 1 BOD

Andrija će donirati 1600 + 1025 = 2625 centi, odnosno 26 eura i 25 centi. 1 BOD

…....……………………...……………………………………...………..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje zapisano u eurima i centima ili samo u centima treba jednako bodovati.

5. Na slici je prikazana tablica. U nekim poljima tablice su ucrtani simboli. Isti simbol na svakom mjestu u tablici predstavlja istu vrijednost, a uz svaki redak i stupac naveden je zbroj vrijednosti svih simbola u tom retku, odnosno stupcu. Odredi vrijednost svakog simbola iz tablice.

▲	■		●	14
■	♥	■		16
♥	▲	●	▲	23
●	■	●	▲	15
20	24	7	17	

Rješenje.

Prvi redak i prvi stupac se razlikuju po tome što je u prvom stupcu srce, dok je u prvom retku praznina. Stoga je vrijednost srca jednaka 20 – 14 = 6. 3 BODA

Kako je vrijednost srca 6, iz drugog retka uočavamo da je vrijednost dvaju kvadrata 10, odnosno vrijednost kvadrata je 5. 1 BOD

Kako je vrijednost kvadrata 5, iz trećeg stupca uočavamo da dva kruga vrijede 2 pa je vrijednost kruga 1. 1 BOD

Kako je vrijednost kruga 1, iz četvrtog stupca uočavamo da dva trokuta vrijede 16 pa je vrijednost trokuta 8. 1 BOD

…....……………………...……………………………………..……..….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Za svaki drugačiji redoslijed rješavanja bodovanje je analogno. Na primjer, učenici mogu krenuti od drugog retka i drugog stupca te najprije odrediti vrijednost trokuta. Za taj korak se dobije 3 BODA samo ako učenik ukaže na redak i stupac pomoću kojih je odredio vrijednost simbola. Ukoliko učenik odredi vrijednost samo jednog od simbola, a ne zapiše obrazloženje, dobije 1 BOD. Za određivanje svakog sljedećeg simbola dobije po 1 BOD.

6. Koristeći točno jednom svaku od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5 i 6, Ivan treba napisati dva broja čiji je zbroj 750. Koliko ima različitih mogućnosti? Odredi onu mogućnost za koju je razlika tih dvaju napisanih brojeva najveća moguća.

Rješenje.
Ako bi jedan od brojeva bio dvoznamenkast (ili jednoznamenkast), onda bi drugi bio četveroznamenkast (ili peteroznamenkast), pa bi zbroj bio veći od 750. Zato oba broja moraju biti troznamenkasta. 1 BOD

Njihov će zbroj završiti s nulom samo ako su znamenke na mjestu jedinica 4 i 6. 2 BODA

Od preostalih znamenaka, zbroj 7 na mjestu stotica moguće je dobiti samo znamenkama 5 i 2.
2 BODA

Uočimo da za mjesta desetica preostaju znamenke 1 i 3, a budući da je zbroj znamenaka jedinica 10, zbroj desetica je zaista 5. Traženi parovi brojeva su:

Veći broj	536	534	516	514
Manji broj	214	216	234	236

Ima ukupno četiri mogućnosti. 2 BODA

Najveća razlika se postiže kad je umanjenik najveći mogući i umanjitelj najmanji mogući tj. za brojeve 536 i 214. 3 BODA
…....…………………...……………………...……….……….……. UKUPNO 10 BODOVA

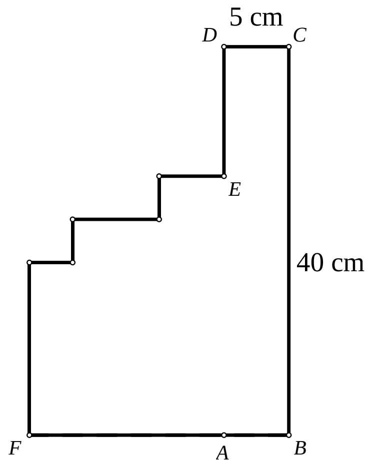
Napomena: Za odgovor na prvo pitanje, nije potrebno ispisati sve mogućnosti već je moguće argumentirati da veći broj ima znamenku stotica 5, dok znamenku desetica i jedinica možemo izabrati svaku na dva načina, pa ukupno ima četiri mogućnosti.

Ukoliko učenik zaključi da ima osam mogućnosti jer interpretira da je važno koji je broj prvi zapisan, a koji drugi, treba dobiti također 2 BODA za odgovor na prvo pitanje.

Ukoliko učenik ne navede argument da tražimo najveći mogući umanjenik i najmanji mogući umanjitelj, za posljednja 3 BODA treba izračunati razlike 536 – 214 = 322, 534 – 216 = 318, 516 – 234 = 282 i 514 – 236 = 278 i navesti najveću tj. 322. Odgovor bez argumentacije nosi 1 BOD.

7. Ana je počela crtati pravokutnik $ABCD$ počevši od točke A. Nacrtala je dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Crtajući dužinu $\overline{DA}$ došla je do točke E i umjesto dužine $\overline{EA}$ nacrtala je sedam dužina u nizu i tako je došla do točke A, kao što je prikazano na njenom crtežu. Svaka dužina koju je nacrtala okomita je na prethodno nacrtanu dužinu.

Na slici je označila duljine dviju dužina, $|BC| = 40$ cm i $|CD| = 5$ cm. Kolika je duljina posljednje nacrtane dužine $\overline{FA}$ ako je opseg nacrtanog lika 140 cm?



Rješenje.

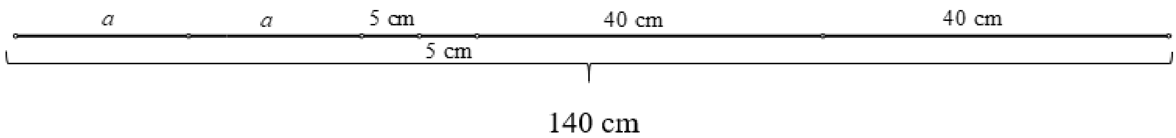
Označimo s a duljinu posljednje nacrtane dužine, $\overline{FA}$.

Četverokut $ABCD$ je pravokutnik, pa je $|AB| = 5$ cm. 1 BOD

Uočimo da je ukupna duljina sve četiri dužine koje je Ana nacrtala usporedno s dužinom $\overline{BC}$ jednaka 40 cm. 2 BODA

Isto tako, zbroj duljina triju dužina koje je nacrtala nakon točke E , a usporedne su s dužinom $\overline{FA}$ jednak je duljini dužine $\overline{FA}$, što je jednako a. 3 BODA

Opseg nacrtanog lika je 140 cm i jednak je duljini ruba tog lika, tj. zbroju duljina svih dužina koje je nacrtala.

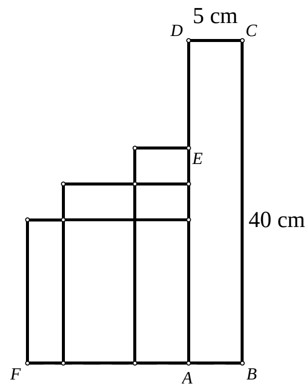


Iz toga slijedi da su dvije duljine a jednake 140 – 5 – 5 – 40 – 40 = 50 cm. 3 BODA

Dakle, duljina a tražene dužine je jednaka 50 : 2 = 25 cm. 1 BOD

…....……………………...……………………………………...…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Umjesto argumentacije o dužinama koje su usporedne sa stranicama pravokutnika $ABCD$, može se nacrtati i sljedeća slika te naglasiti da su dobiveni docrtani likovi pravokutnici, što se boduje s 5 bodova. Na osnovu te slike se zapisuje izraz za opseg lika koji je Ana nacrtala.



ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2024.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U akciji skupljanja staroga papira 5. razred je sakupio 178 kg papira, 6. razred je skupio 47 kg više od 5. razreda, 7. razred 36 kg manje od 6. razreda, a 8. razred koliko 5. i 6. razred zajedno. Koliko kilograma papira nedostaje da bi sva četiri razreda zajedno skupila jednu tonu papira?

Rješenje.

5. razred je skupio 178 kg papira.

6. razred je skupio $178 + 47 = 225$ kg papira. 1 BOD

7. razred je skupio $225 - 36 = 189$ kg papira. 1 BOD

8. razred je skupio $178 + 225 = 403$ kg papira. 1 BOD

Sva četiri razreda zajedno skupili su $178 + 225 + 189 + 403 = 995$ kg papira. 1 BOD

1 tona $= 1000$ kg 1 BOD

Da bi sva četiri razreda zajedno skupila jednu tonu nedostaje $1000 - 995 = 5$ kg papira. 1 BOD

…....…………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

2. Marko je troznamenkasti prirodni broj zaokružio na najbližu deseticu i dobio broj 950. Petar je troznamenkasti prirodni broj zaokružio na najbližu stoticu i dobio broj 800. Koliko iznosi najveća, a koliko najmanja moguća razlika između Markova i Petrova broja?

Prvo rješenje.

Najmanji broj koji zaokružen na najbližu deseticu iznosi 950 jest broj 945. 1 BOD

Najveći broj koji zaokružen na najbližu deseticu iznosi 950 jest broj 954. 1 BOD

Najmanji broj koji zaokružen na najbližu stoticu iznosi 800 jest broj 750. 1 BOD

Najveći broj koji zaokružen na najbližu stoticu iznosi 800 jest broj 849. 1 BOD

Najveća moguća razlika između Markova i Petrova broja iznosi $954 - 750 = 204$. 1 BOD

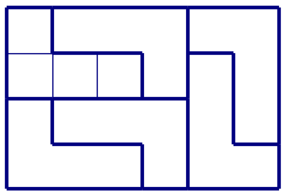
Najmanja moguća razlika između Markova i Petrova broja iznosi $945 - 849 = 96$. 1 BOD

…....…………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
Troznamenkasti broj koji kod zaokruživanja na najbližu deseticu iznosi 950 Marko je mogao odabrati iz skupa $\{945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954\}$. 1 BOD
Troznamenkasti broj koji kod zaokruživanja na najbližu stoticu iznosi 800 Petar je mogao odabrati iz skupa $\{750, 751, 752, \ldots, 847, 848, 849\}$. 1 BOD

Kako bi razlika brojeva bila najveća, Marko je trebao odabrati 954, a Petar 750. Najveća moguća razlika je $954 - 750 = 204$. 2 BODA
Kako bi razlika brojeva bila najmanja, Marko je trebao odabrati 945, a Petar 849. Najmanja moguća razlika je $945 - 849 = 96$. 2 BODA
.... UKUPNO 6 BODOVA

3. Pravokutnik $ABCD$ sastoji se od 6 oblika sličnih slovu „L“, a svako slovo „L“ sastoji se od 4 jednaka kvadrata. Ako zbroj opsega svih slova „L“ iznosi 1200 mm, koliki je opseg pravokutnika $ABCD$?



Rješenje.
Opseg jednog slova „L“ iznosi $1200 : 6 = 200$ mm. 1 BOD

Neka je a duljina stranice kvadrata od kojih se sastoji slovo „L“.
Opseg slova „L“ iznosi $10a$. 1 BOD
Vrijedi $10a = 200$,
odnosno $a = 20$ mm 1 BOD

Duljine stranica pravokutnika su:
$6a = 6 \cdot 20 = 120$ mm 1 BOD
$4a = 4 \cdot 20 = 80$ mm 1 BOD

Opseg pravokutnika $ABCD$ iznosi $2 \cdot 120 + 2 \cdot 80 = 400$ mm. 1 BOD
.... UKUPNO 6 BODOVA

4. Četiri slona i osam zebri dnevno pojedu tonu hrane. Slon dnevno pojede 214 kg hrane više od zebre. Ako zebra treba 24 minute da pojede 1 kg hrane, koliko joj vremena treba da pojede svoju dnevnu količinu hrane? Dobiveno vrijeme izrazi u satima i minutama.

Rješenje.
Slon dnevno pojede 214 kg hrane više od zebre.
Budući da je $214 \cdot 4 = 856$, četiri slona dnevno pojedu koliko pojedu četiri zebre i još 856 kg. 1 BOD
Količina koju pojede dvanaest zebri i još 856 kg ukupno iznosi jednu tonu. 1 BOD

Budući da je $1000 - 856 = 144$, dvanaest zebri pojede 144 kg hrane. 1 BOD
Zebra dnevno pojede $144 : 12 = 12$ kg hrane. 1 BOD
Zebra dnevno jede $12 \cdot 24 = 288$ minuta, 1 BOD
odnosno 4 sata i 48 minuta. 1 BOD
.... UKUPNO 6 BODOVA

5. Ako je $\big((x+23):7-17\big)\cdot 13=429$, koliko iznosi $6x+62$?

Rješenje.

$\big((x+23):7-17\big)\cdot 13=429$
$(x+23):7-17=429:13$
$(x+23):7-17=33$ 1 BOD
$(x+23):7=33+17$
$(x+23):7=50$ 1 BOD
$x+23=50\cdot 7$
$x+23=350$ 1 BOD
$x=350-23$
$x=327$ 1 BOD
$6x+62=6\cdot 327+62=1962+62=$ 1 BOD
2024 1 BOD
……………………………………………………………………………......... UKUPNO 6 BODOVA

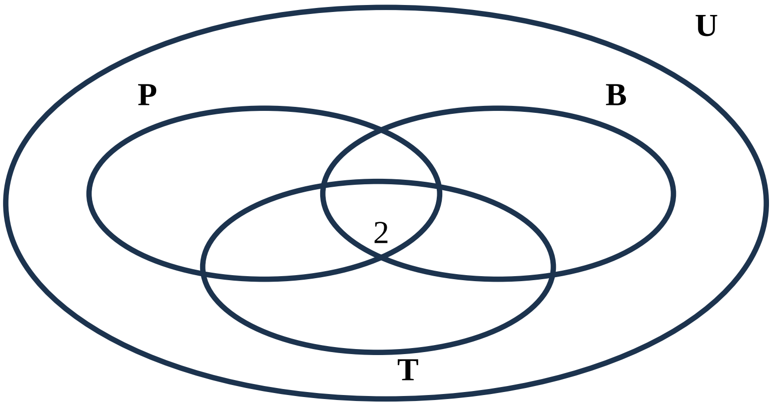
6. U jednom razredu plivanjem se bavi 5 učenika, biciklizmom 12 učenika, a trčanjem 9 učenika, pri čemu se neki učenici bave s više aktivnosti, a neki ni sa jednom. Šest učenika se bavi biciklizmom i trčanjem, a četiri učenika biciklizmom i plivanjem. Dva se učenika bave sa sve tri aktivnosti, a nema učenika koji se bave samo plivanjem i trčanjem. Dva se učenika ne bave nijednom od te tri aktivnosti. Odredi:

- Koliko se učenika bavi barem jednom aktivnošću?
- Koliko se učenika bavi samo trčanjem?
- Koliko se učenika bavi plivanjem i biciklizmom, a ne trči?
- Koliko je ukupno učenika u tom razredu?

Rješenje.

Zadatak možemo riješiti Vennovim dijagramom. Neka je U skup svih učenika u tom razredu, B skup svih učenika koji se bave biciklizmom, P skup svih učenika koji se bave plivanjem i T skup svih učenika koji se bave trčanjem.

U presjeku skupova B, P i T su 2 učenika koji su odabrali sve tri vrste aktivnosti.

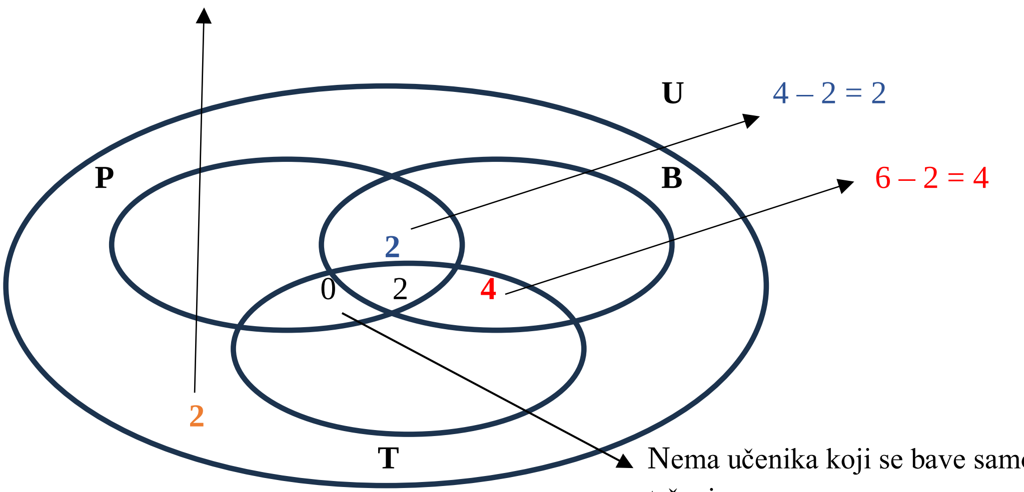


1 BOD

Šest se učenika bavi biciklizmom i trčanjem, a kako se dva učenika bave sa sve tri vrste aktivnosti samo biciklizmom i trčanjem se bavi $6-2=4$ učenika. 1 BOD

Plivanjem i biciklizmom se bave četiri učenika, a kako se dva učenika bave sa sve tri vrste aktivnosti samo plivanje i biciklizmom bave se $4-2=2$ učenika. 1 BOD

Dva se učenika ne bave nijednom od te tri aktivnosti. 1 BOD

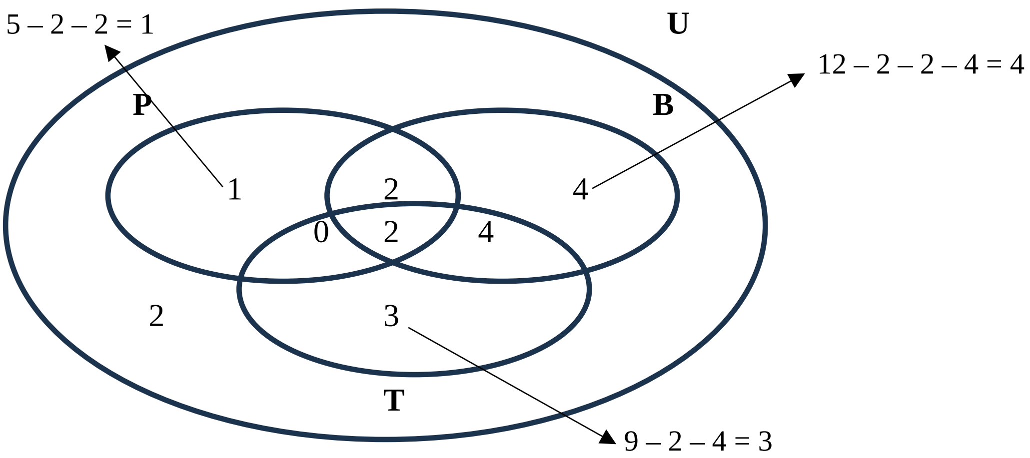


Nema učenika koji se bave samo plivanjem i trčanjem. 1 BOD

Samo plivanjem se bavi $5-2-2=1$ učenik. 1 BOD

Samo biciklizmom se bave $12-2-2-4=4$ učenika. 1 BOD

Samo trčanjem se bave $9-2-4=3$ učenika. 1 BOD



Barem jednom aktivnošću se bavi $1+2+2+4+4+3=16$ učenika. Samo trčanjem se bave tri učenika. Dvoje se učenika bavi plivanjem i biciklizmom, a ne trči. U tom razredu je $1+2+2+4+4+3+2=18$ učenika. 2 BODA

…………………………………………....……………………….……..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Dva točna odgovora bez obrazloženja se boduju jednim bodom.

7. Sanja ima osam štapića duljina 1 cm, 2 cm, ... , 8 cm i zabavlja se sastavljajući od njih stranice jednakostraničnog trokuta. Pri sastavljanju štapiće spaja u njihovim krajnjim točkama, bez svijanja i lomljenja. Na primjer, od štapića duljina 1 cm i 5 cm sastavila je jednu stranicu, od štapića duljina 2 cm i 4 cm drugu stranicu, a za treću stranicu je iskoristila štapić duljine 6 cm. Na koje je sve načine Sanja mogla sastaviti stranice trokuta? Poredak stranica ili poredak štapića na pojedinoj stranici nije bitan.

Rješenje.
Duljina stranice ne može biti 3 jer je $3 = 2 + 1$ i nedostaju štapići za treću stranicu.
Duljina stranice ne može biti 4 jer je $4 = 3 + 1 = 2 + 2$, a nemamo na raspolaganju dva štapića duljine 2. Znači, duljina stranice ne može biti manja od 5. 1 BOD

Promatramo mogućnosti s obzirom na duljinu stranice:

Duljina stranice	Odabir štapića	Broj mogućnosti	Broj bodova
5	$5 = 4 + 1 = 3 + 2$	1	1 BOD
6	$6 = 5 + 1 = 4 + 2$	1	ne boduje se jer je primjer
7	$7 = 6 + 1 = 5 + 2$ $7 = 6 + 1 = 4 + 3$ $7 = 5 + 2 = 4 + 3$ $6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$	4	1 BOD
8	$8 = 7 + 1 = 6 + 2$ $8 = 7 + 1 = 5 + 3$ $8 = 6 + 2 = 5 + 3$ $7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$ $8 = 6 + 2 = 1 + 3 + 4$	5	1 BOD
9	$8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3$ $8 + 1 = 7 + 2 = 5 + 4$ $8 + 1 = 6 + 3 = 5 + 4$ $7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$	4	1 BOD
10	$8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$ $8 + 2 = 7 + 3 = 1 + 4 + 5$	2	1 BOD
11	$8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$ $7 + 4 = 6 + 5 = 1 + 2 + 8$	2	1 BOD
12	$8 + 4 = 7 + 5 = 1 + 2 + 3 + 6$ $8 + 4 = 7 + 2 + 3 = 1 + 5 + 6$ $8 + 1 + 3 = 7 + 5 = 2 + 4 + 6$	3	za 1 ili 2 rješenja 1 BOD za sva 3 rješenja 2 BODA

Ako je duljina stranice 13, opseg trokuta iznosi 39. Kako je zbroj duljina svih štapića 36, zaključujemo da je najveća moguća duljina stranice 12. 1 BOD

…………………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2024.
6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: $77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4)$.

Prvo rješenje.

$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4) =$

$7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 9 \cdot 11 \cdot 8 \cdot (77 - 76) =$ 1 BOD

$7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9) + 9 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 1 =$ 1 BOD

$88 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 19 - 88 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 18 + 88 \cdot 9 =$ 1 BOD

$88 \cdot (14 \cdot 19 - 14 \cdot 18 + 9) =$ 1 BOD

$88 \cdot (14 \cdot (19 - 18) + 9) =$ 1 BOD

$88 \cdot (14 \cdot 1 + 9) =$

$88 \cdot 23 = 2024$ 1 BOD

………………………………………………..……………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4) =$

$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 99 \cdot 8 \cdot (77 - 76) =$ 1 BOD

$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 99 \cdot 8 \cdot 1 =$

$23408 - 22176 + 792 =$ 3 BODA

$1232 + 792 =$ 1 BOD

2024 1 BOD

……….…………………………………………………………………….UKUPNO 6 BODOVA

2. U 6. a razredu je 24 učenika. Pola učenika tog razreda svira neki instrument. Također, $\frac{5}{8}$ učenika tog razreda pjeva u zboru. Ako je poznato da više od trećine, a manje od $\frac{5}{12}$ učenika 6. a razreda i svira i pjeva u zboru, koliko učenika tog razreda ne svira niti jedan instrument i ne pjeva u zboru?

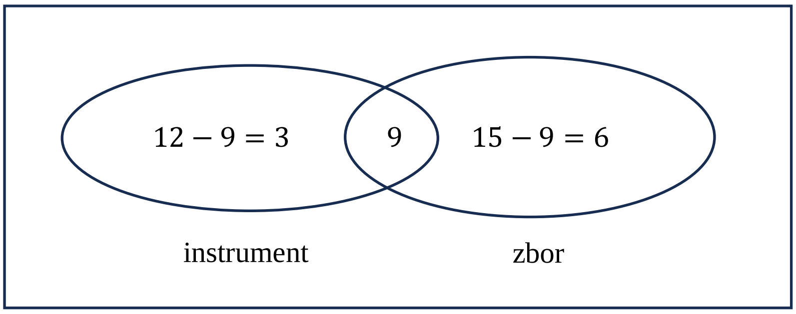
Rješenje.

Broj učenika koji svira neki instrument je $24 : 2 = 12$. 1 BOD

U zboru pjeva $\frac{5}{8} \cdot 24 = 15$ učenika. 1 BOD

Budući da je $24 : 3 = 8$, $\frac{5}{12} \cdot 24 = 10$, 1 BOD

slijedi da 9 učenika i svira i pjeva u zboru. 1 BOD



Broj učenika koji sviraju instrument, pjevaju u zboru ili oboje je
$(12 - 9) + 9 + (15 - 8) = 18.$ 1 BOD

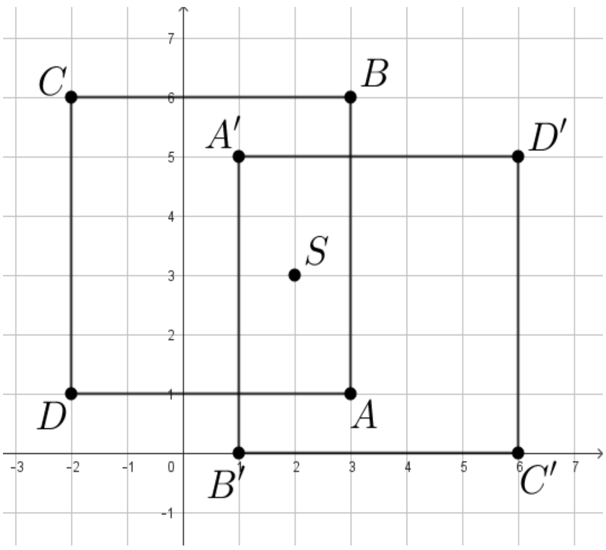
$24 - 18 = 6$ učenika ne svira instrument i ne pjeva u zboru. 1 BOD

………………………………………………..…………………………..…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: U rješenju nije nužno crtati Vennov dijagram. Točno rješenje koje ima sve potrebne račune i zaključke priznaje se u potpunosti i bez Vennovog dijagrama.

3. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini zadana je točka $S(2, 3)$ i kvadrat $ABCD$ kojem su poznata tri vrha $A(3, 1)$, $C(-2, 6)$ i $D(-2, 1)$. Kvadrat $A'B'C'D'$ je centralnosimetrična slika kvadrata $ABCD$ s obzirom na točku S. Odredi koordinate točaka B, A', B', C' i D' te površinu lika koji je presjek kvadrata $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Duljina jedinične dužine je 1 cm.

Rješenje.

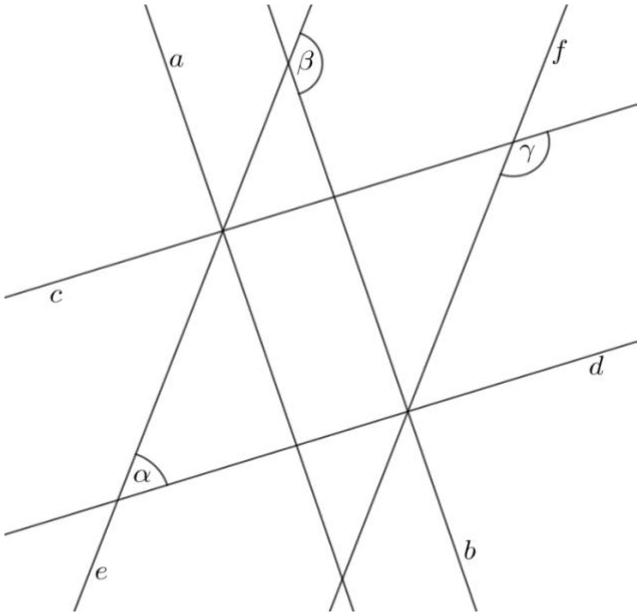


- Skica 2 BODA
- Točka $B(3, 6)$ 1 BOD
- Koordinate točaka $A'(1, 5)$, $B'(1, 0)$, $C'(6, 0)$, $D'(6, 5)$ 2 BODA

Površina lika u presjeku je
$P = 4 \cdot 2 = 8$ cm^2. 1 BOD

………………………………………………..…………………………..…... UKUPNO 6 BODOVA

4. Na slici su označeni pravci a, b, c, d, e i f te kutovi α, β i γ. Za pravce na toj slici vrijedi $a \parallel b$, $c \parallel d$, $e \parallel f$ i $a \perp d$. Veličina kuta α je 50°24'. Odredi veličine kutova β i γ sa slike.



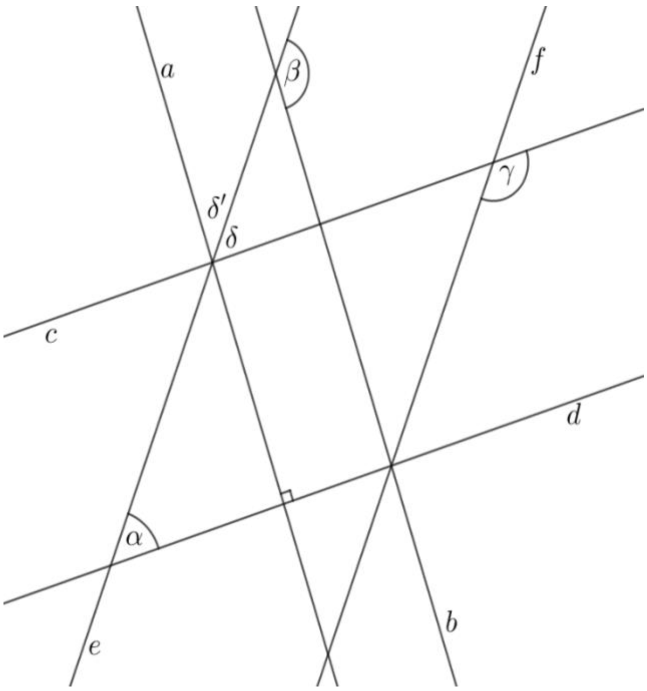
Rješenje.

Kutovi α i γ su kutovi s usporednim kracima ($c \parallel d$ i $e \parallel f$).

α je šiljasti kut, γ je tupi kut pa su oni suplementarni, odnosno vrijedi $\alpha + \gamma = 180°$. 1 BOD

Iz tog izraza izračunamo $\gamma = 180° - 50°24' = 179°60' - 50°24' = 129°36'$. 1 BOD

Označimo pomoćne kutove δ i δ' kao na slici.



Kutovi α i δ su šiljasti kutovi uz presječnicu e paralelnih pravaca c i d pa su njihove veličine jednake.

(Može se reći i da su α i δ kutovi s paralelnim kracima $c \parallel d$, e je zajednički krak.)

Dakle, $\delta = \alpha = 50°24'$ 1 BOD

Iz relacija $a \perp d$ i $d \parallel c$ slijedi $a \perp c$, pa vrijedi $\delta + \delta' = 90°$. 1 BOD

$\delta + \delta' = 90°$ pa je $50°24' + \delta' = 90°$ iz čega slijedi

$\delta' = 90° - 50°24' = 89°60' - 50°24' = 39°36'$. 1 BOD

Kutovi δ' i β su šiljasti i tupi kut uz presječnicu e paralelnih pravaca a i b pa su oni suplementarni, odnosno vrijedi $\delta' + \beta = 180°$.

Iz toga slijedi $\beta = 180° - \delta' = 179°60' - 39°36' = 140°24'$. 1 BOD
…………………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik riješi zadatak koristeći zbroj veličina kutova u trokutu, takvo rješenje treba vrednovati u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.

5. Kamion i autobus istodobno su krenuli jedan drugome u susret s dvaju ulaza na autocestu. Pretpostavimo da kamion cijelo vrijeme vozi istom prosječnom brzinom i prijeđe 27 km za 18 minuta. Pretpostavimo da i autobus cijelo vrijeme vozi svojom istom prosječnom brzinom kojom on prijeđe 864 m za 28.8 sekundi. Ako su se susreli na zajedničkom odmorištu nakon 2 sata i 45 minuta takve vožnje, koliko su udaljena njihova dva polazna ulaza na autocestu?

Prvo rješenje.
Jedan sat ima 60 minuta, pa je 2 sata i 45 minuta $= 120 + 45 = 165$ minuta.

Kamion prijeđe 27 km za 18 minuta, što znači da prijeđe $27 : 18 = 1.5$ km za 1 minutu. 1 BOD

Za 165 minuta kamion prijeđe $165 \cdot 1.5 = 247.5$ km. 1 BOD

1 km = 1000 m, pa je 864 m = 0.864 km,

1 minuta = 60 sekundi pa je 28.8 sekundi = $28.8 : 60 = 0.48$ minuta. 1 BOD

Autobus prijeđe 0.864 km za 0.48 minuta, što znači da prijeđe $0.864 : 0.48 = 1.8$ km za 1 minutu.
1 BOD

Za 165 minuta autobus prijeđe $165 \cdot 1.8 = 297$ km. 1 BOD

Ukupna udaljenost koju su prešli kamion i autobus, odnosno zbroj tih udaljenosti, jest udaljenost dvaju ulaza na autocestu, $247.5 + 297 = 544.5$ km. 1 BOD
…………………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
Jedan sat im 60 minuta, 45 minuta je $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0.75$ sati,

pa je 2 sata i 45 minuta $= 2 + 0.75 = 2.75$ sati,

a 18 minuta je $\frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0.3$ sata.

Kamion prijeđe 27 km za 0.3 sata, što znači da prijeđe $27 : 0.3 = 90$ km za 1 sat. 1 BOD

Za 2.75 sati kamion prijeđe $2.75 \cdot 90 = 247.5$ km. 1 BOD

1 km = 1000 m, pa je 864 m = 0.864 km,

1 sat = 3600 sekundi pa je 28.8 sekundi = $28.8 : 3600 = 0.008$ sati. 1 BOD

Autobus prijeđe 0.864 km za 0.008 sati, što znači da prijeđe $0.864 : 0.008 = 108$ km za 1 sat.
1 BOD

Za 2.75 sati autobus prijeđe $2.75 \cdot 108 = 297$ km. 1 BOD

Ukupna udaljenost koju su prešli kamion i autobus, odnosno zbroj tih udaljenosti, jest udaljenost dvaju ulaza na autocestu, $247.5 + 297 = 544.5$ km. 1 BOD
………………………………………………………..…………………..……..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Zadatak se može riješiti i pomoću drugih mjernih jedinica koje nisu uobičajene. U tom slučaju točno rješenje treba priznati u potpunosti.

6. Koliko ima brojeva oblika $\overline{2abcd3}$ kojima su sve znamenke međusobno različite, a broj $\overline{abcd}$ je četveroznamenkasti višekratnik broja 5?

Rješenje.
Broj $\overline{abcd}$ je višekratnik broja 5 pa je $d \in \{0,5\}$. 1 BOD

Broj $\overline{abcd}$ je četveroznamenkast broj kojemu su sve znamenke međusobno različite pa ako je

$$d = 0,$$

znamenke a, b, c pripadaju skupu $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 1 BOD

Znamenka a može se odabrati na 7 načina, znamenka b na 6 načina, a znamenka c na 5 načina.

Brojeva oblika $\overline{2abc03}$ ima $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. 3 BODA

Ako je

$$d = 5,$$

znamenke a, b, c pripadaju skupu $\{0, 1, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $a \neq 0$. 1 BOD

Znamenka a može se odabrati na 6 načina, znamenka b na 6 načina, a znamenka c na 5 načina.

Brojeva oblika $\overline{2abc53}$ ima $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. 3 BODA

Brojeva oblika $\overline{2abcd3}$ kojima su sve znamenke međusobno različite ima

$210 + 180 = 390$. 1 BOD
……………………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Pri ulazu u kinodvoranu između 30 posjetitelja je podijeljeno 58 bombona. Svaka djevojčica je dobila šest bombona, svaki dječak četiri bombona, a svaka odrasla osoba po jedan bombon. Koliko je moglo biti djevojčica, koliko dječaka, a koliko odraslih osoba u kinodvorani?

Prvo rješenje.
Nakon što svaki posjetitelj pojede 1 bombon, u dvorani ostane 58 – 30 = 28 bombona. 1 BOD
Tada odrasle osobe nemaju niti jedan bombon.

Svakom dječaku ostanu 3 bombona pa je broj bombona kod dječaka višekratnik broja 3. 1 BOD
Svakoj djevojčici ostane 5 bombona pa je broj bombona kod djevojčica višekratnik broja 5. 1 BOD
Broj bombona kod djevojčica nije veći od 28 pa je mogući broj bombona kod djevojčica
5, 10, 15, 20 i 25. 1 BOD

Tada bi dječacima preostalo redom 23, 18, 13, 8 i 3 bombona, ali su samo 18 i 3 višekratnici broja 3.
2 BODA
Ako je kod dječaka ukupno 18 bombona, onda je kod djevojčica 10 bombona.
Tada je u dvorani $18 : 3 = 6$ dječaka i $10 : 5 = 2$ djevojčice. 1 BOD
U dvorani su $30 - (6 + 2) = 22$ odrasle osobe. 1 BOD

Ako su kod dječaka 3 bombona, onda djevojčicama ostaje 25 bombona pa je u dvorani
$3 : 3 = 1$ dječak i $25 : 5 = 5$ djevojčica. 1 BOD
U dvorani su $30 - (1 + 5) = 30 - 6 = 24$ odrasle osobe. 1 BOD

U dvorani je mogao biti 1 dječak, 5 djevojčica i 24 odrasle osobe ili
6 dječaka, 2 djevojčice i 22 odrasle osobe.
……………………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Neka je a broj djevojčica, b broj dječaka, a c broj odraslih osoba u kino dvorani.
Vrijedi:
$a + b + c = 30$
$6a + 4b + c = 58$ 1 BOD

Ako od druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo $5a + 3b = 28$. 2 BODA
Dobivenu jednadžbu zapišemo na sljedeći način:

$5a - 10 = 18 - 3b$

$5(a - 2) = 3(6 - b)$ 1 BOD

Iz jednadžbe $5a + 3b = 28$ uvrštavanjem vidimo da a ne može biti niti 0 niti 1.
Dakle, $a \geq 2$. 1 BOD

Budući da je $a - 2 \geq 0$ slijedi da je $6 - b \geq 0$.
Također, 5 dijeli $6 - b$ pa je $6 - b = 0$ ili $6 - b = 5$. 1 BOD

Ako je $b = 6$, onda je $a = 2$, $c = 30 - 2 - 6 = 22$. 2 BODA

Ako je $b = 1$, onda je $a = 5$, $c = 30 - 5 - 1 = 24$. 2 BODA

U kinu su bile 2 djevojčice, 6 dječaka i 22 odrasle osobe ili su bile 5 djevojčica, 1 dječak i 24 odrasle osobe.
……………………………………………………………………….………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Jednadžba $5a + 3b = 28$ simbolički izražava isti zaključak za koji se u prvom rješenju dodjeljuje 3 BODA. Nakon toga se može nastaviti na razne načine: promatranjem mogućnosti za $5a$ (kao u prvom rješenju), za b (kao u drugom rješenju), te na slične načine za $3b$ ili za a. Dokaz da postoje samo dvije mogućnosti nosi sljedeća 3 BODA. Zapisivanje svih traženih vrijednosti u svakom od dva slučaja nosi po 2 BODA.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2024.
7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Koliko je puta vrijednost izraza

$$2 \cdot \frac{7\frac{2}{3} : \left(2\frac{2}{3} + 0.5 : 1\frac{1}{2}\right)}{\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9} \cdot 0.75\right) : 7\frac{1}{3}}$$

manja od broja 2024?

Rješenje.
Vrijednost zadanog izraza je:

$$2 \cdot \frac{7\frac{2}{3} : \left(2\frac{2}{3} + 0.5 : 1\frac{1}{2}\right)}{\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9} \cdot 0.75\right) : 7\frac{1}{3}} =$$

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2} : \frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{7}{3} - \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) : \frac{22}{3}} =$$

1 BOD

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{7}{3} - \frac{5}{6}\right) : \frac{22}{3}} =$$

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : 3}{\frac{9}{6} : \frac{22}{3}} =$$

2 BODA

$$2 \cdot \frac{23}{9} : \frac{9}{44} =$$

1 BOD

$$= \frac{2024}{81}$$

1 BOD

Zadani izraz je 81 puta manji od broja 2024. 1 BOD

……..…………………...……………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko je učenik rješavao na drugačiji način rješenje treba bodovati po principu:

1 BOD za točan zapis svih decimalnih i svih mješovitih brojeva u obliku razlomaka, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zagrade u brojniku, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zagrade u nazivniku, 1 BOD za daljnje pojednostavljivanje brojnika i nazivnika, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zadanog izraza te 1 BOD za rezultat.

2. Za posjet izložbi Ivana Meštrovića prijavilo se $\frac{2}{7}$ učenika više nego je planirano. Zbog bolesti je odustala šestina prijavljenih učenika pa je na izložbu otišlo šest učenika više nego je planirano. Koliko je učenika otišlo na izložbu?

Prvo rješenje.
Neka je x planiran broj učenika koji je trebao posjetiti izložbu.

Za posjet izložbi se prijavilo $x + \frac{2}{7}x = \frac{9}{7}x$ učenika, tj. prijavilo se $\frac{9}{7}$ planiranog broja. 1 BOD

Zbog bolesti je odustalo $\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{7}x = \frac{3}{14}x$ učenika tj. odustalo je $\frac{3}{14}$ planiranog broja. 1 BOD

Na izložbu se uputilo $\frac{9}{7}x - \frac{3}{14}x = \frac{15}{14}x$ učenika tj. uputilo se $\frac{15}{14}$ planiranog broja. 1 BOD

Dakle, u posjet izložbi uputila se $\frac{15}{14}x - x = \frac{1}{14}x$ učenika tj. $\frac{1}{14}$ više nego je planirano.

Vrijedi $\frac{1}{14}x = 6$, 1 BOD

pa je $x = 6 \cdot 14 = 84$. 1 BOD

Planirano je da na izložbu ide 84 učenika, a otišlo je 6 učenika više pa je ukupan broj učenika koji su otišli na izložbu 90. 1 BOD

…....……………………...………………………………………………….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik postavi jednadžbu $x + 6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{7}x$ koja vodi ka planiranom broju učenika ostvaruje 3 BODA. Nadalje točno rješavanje iste vrednuje se s još 2 BODA. Konačno rješenje 90 vrednuje se s 1 BODOM.

Drugo rješenje.
Za posjet izložbi prijavilo se $\frac{2}{7}$ učenika više nego je planirano tj. prijavilo se $\frac{9}{7}$ planiranog broja. Odustala je šestina prijavljenih učenika tj. odustala je $\frac{1}{6}$ od $\frac{9}{7}$ planiranog broja što je $\frac{3}{14}$ planiranog broja učenika. 2 BODA
Stoga je planirani broj učenika za posjet izložbi djeljiv sa 14. 1 BOD
Prikažimo tablicom mogućnosti:

Planirani broj učenika	Prijavljeni broj učenika (2/7 više)	Broj učenika koji su posjetili izložbu (5/6 prijavljenih)	Razlika između planiranog broja i broja učenika koji su posjetili izložbu
14	18	15	1
28	36	30	2
42	54	45	3
56	72	60	4
70	90	75	5
84	**108**	**90**	**6**
Ako je planirano da na izložbu ide 84 učenika, a otišlo je 6 učenika više, ukupan broj učenika koji su otišli na izložbu je 90. 2 BODA			
Treba još provjeriti postoji li neko drugo rješenje koje zadovoljava zadane uvjete.			
98	126	105	7
112	144	120	8

Dakle, vidljivo je da je povećanjem planiranog broja učenika iznad 84 razlika veća od 6, a to ne zadovoljava uvjete zadatka i time je pokazano da je na izložbu moglo otići ni više ni manje od 90 učenika. 1 BOD

…....…………………...…………………………………..…..………... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji ne pokaže da rješenje ne može biti veće od 90 ostvaruje najviše 5 BODOVA. Učenik koji pogodi rješenje i provjeri da odgovara uvjetima zadatka, bez dodatnih obrazloženja, može ostvariti najviše 2 BODA.

Napomena 2: Ukoliko učenik navede da je broj planiranih učenika djeljiv sa 7 i ispituje višekratnike broja 7, a uz točno obrazloženje da nema rješenja većeg ni rješenja manjeg od 90, ostvaruje 6 BODOVA.

3. Otac i majka imaju ukupno 80 godina. Njihovo troje djece imaju 9, 7 i 2 godine. Kroz nekoliko godina zbroj godina djece iznosit će polovinu zbroja godina oca i majke. Koliko će godina tada imati otac, a koliko majka ako je majka šest godina mlađa od oca?

Prvo rješenje.
Neka je m broj majčinih godina. Tada je broj očevih godina $m + 6$.

Vrijedi $m + m + 6 = 80$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da otac sada ima 43 godine, a majka 37 godina. 1 BOD

Za x godina zbroj godina djece biti će polovina zbroja godina oca i majke pa vrijedi:

$(9 + 7 + 2) + 3x = 0.5\,(80 + 2x)$ 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 11$. 1 BOD

Za 11 godina otac će imati 54, a majka 48 godina. 1 BOD

…....…………………...…………………………………..…..………... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
Za x godina zbroj godina djece biti će polovina zbroja godina oca i majke pa vrijedi:

$(9 + 7 + 2) + 3x = 0.5\,(80 + 2x)$. 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 11$. 1 BOD

Tada će majka i otac zajedno imati 80 + 22 = 102 godine. 1 BOD

Kako je majka 6 godina mlađa od oca, označimo sa m broj godina majke.

Tada vrijedi $m + m + 6 = 102$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da majka ima 48 godina, a otac 54 godine. 1 BOD

…....…………………...……………………………..…………..….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik prvo izračuna broj godina oca ili jednadžbe postavi i riješi drugačijim redoslijedom zadatak se vrednuje u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.

4. U učionici se nalazi šest istovrsnih klupa: dvije plave, jedna crvena i tri zelene. Na koliko se načina mogu složiti u niz, jedna uz drugu, tako da crvena klupa bude pored plave?

Prvo rješenje.
Označimo plave klupe sa P, crvenu sa C, a zelene sa Z.

1. slučaj. Plava klupa je u nizu nakon crvene pa te dvije klupe CP promatramo kao nedjeljivu cjelinu od pet elemenata CP, P, Z, Z, Z.

Blok CP možemo razmjestiti na 5 različitih pozicija. Preostala 4 mjesta se popunjavaju s 1 plavom i 3 zelene klupe, a to je moguće na 4 načina. 1 BOD

Mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 1 BOD

2. slučaj. Plava klupa je u nizu prije crvene pa te dvije klupe PC promatramo kao nedjeljivu cjelinu od pet elemenata PC, P, Z, Z, Z.

Slično 1. slučaju, mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

Neki razmještaji dvaput su prebrojani jer je u nekim razmještajima P istovremeno i prije i poslije C (blok PCP). Kako u tim razmještajima crvena klupa ne može biti ni prva ni posljednja (jer je i prije i poslije nje plava klupa) dva puta su brojana 4 načina razmještanja klupa (kada je crvena klupa 2., 3., 4. ili 5. po redu). 1 BOD

Ukupan broj načina razmještanja klupa je 20 + 20 – 4 = 36. 1 BOD
…....…………………….…...………………………………….……... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.
1. slučaj.
Neka je plava klupa u nizu nakon crvene i označimo ih sa CP. Razmještamo ostale klupe. Slijedi prikaz svih mogućih razmještaja klupa:

CP	P	Z	Z	Z
CP	Z	P	Z	Z
CP	Z	Z	P	Z
CP	Z	Z	Z	P

P	CP	Z	Z	Z
Z	CP	P	Z	Z
Z	CP	Z	P	Z
Z	CP	Z	Z	P

P	Z	CP	Z	Z
Z	P	CP	Z	Z
Z	Z	CP	P	Z
Z	Z	CP	Z	P

P	Z	Z	CP	Z
Z	P	Z	CP	Z
Z	Z	P	CP	Z
Z	Z	Z	CP	P

P	Z	Z	Z	CP
Z	P	Z	Z	CP
Z	Z	P	Z	CP
Z	Z	Z	P	CP

Mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

2. slučaj.
Neka je plava klupa u nizu prije crvene pa gledamo blok PC.
Slično 1. slučaju, mogućih razmještaja je također $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

Neki razmještaji dvaput su prebrojani jer je u nekim razmještajima P istovremeno i prije i poslije C (blok PCP). Kako u tim razmještajima crvena klupa ne može biti ni prva ni posljednja (jer je i ispred i iza nje plava klupa) dva puta su brojana 4 načina razmještanja klupa (kada je crvena klupa 2., 3., 4. ili 5. po redu). 1 BOD

Ukupan broj načina razmještanja klupa je 20 + 20 – 4 = 36. 1 BOD

…....……………………...……………………………………...………...... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Svakih 10 točno ispisanih razmještaja klupa vrednovati s 1 BODOM. Učenik koji je popisao 40 razmještaja, a nije prepoznao dvostruko zapisane ostvaruje 4 BODA.

5. U jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom duljine 45 cm upisan je pravokutnik. Dva njegova vrha pripadaju hipotenuzi, a druga dva katetama. Odredi moguće duljine stranica pravokutnika ako je duljina jedne stranice 40 % duljine njoj susjedne stranice.

Rješenje.

Neka je *ABC* jednakokračan pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu *C* te neka je *MNKL* pravokutnik upisan trokutu *ABC* kojem vrhovi *M* i *N* pripadaju hipotenuzi.

Trokut *ABC* je jednakokračan pravokutan pa je $|\angle BAC| = |\angle CBA| = 45°$.

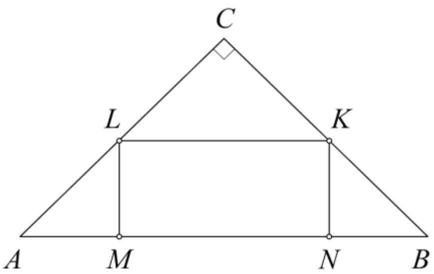
U pravokutnim trokutima *AML* i *NBK* vrijedi $|\angle ALM| = |\angle NKB| = 90° - 45° = 45°$. 1 BOD

Slijedi da su trokuti *KNB* i *AML* jednakokračni pravokutni tj.

$$|NK| = |NB| = |ML| = |MA| = 0.4x.$$ 1 BOD

Za ostvarivanje prva dva boda dovoljno je da učenik jednakokračne trokute označi na skici ili iskaže riječima da su trokuti jednakokračni.

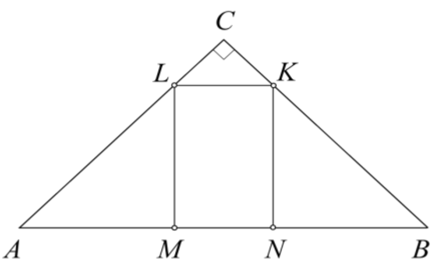
<u>1. slučaj:</u> Neka je $|MN| > |NK|$ pa označimo $|MN| = x, |NK| = 0.4x$.



Kako je $|AM| + |MN| + |NB| = |AB|$, vrijedi $0.4x + x + 0.4x = 45$ 1 BOD

pa je $1.8x = 45$ i $x = |MN| = 25$ cm , a $|NK| = 0.4 \cdot 25 = 10$ cm. 1 BOD

<u>2. slučaj:</u> Neka je $|MN| < |NK|$ pa označimo$|MN| = 0.4x, a\ |NK| = x$.



Analognim zaključivanjem dobijemo $x + 0.4x + x = 45$ 1 BOD

pa je $2.4x = 45$ i $x = |NK| = 18.75$ cm, $a\ |MN| = 0.4 \cdot 18.75 = 7.5$ cm. 1 BOD

…....……………………...…………………………………………...……...….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik koji je dobio točno rješenje (obje mogućnosti), a nije obrazložio (označio na skici ili napisao riječima) da su trokuti *KNB* i *ALM* jednakokračni može ostvariti najviše 4 BODA.

6. Četiri prijateljice, Ana, Dora, Marta i Tea zajedno kupuju rođendanski poklon za petu prijateljicu. Ana je dala 40 % ukupnog iznosa poklona, Dora je dala trećinu iznosa kojeg su dale ostale tri prijateljice, a Marta je dala 25 % ukupnog iznosa kojeg su dale ostale tri prijateljice. Tea je dala 51 euro. Kolika je cijena poklona?

Rješenje.
Neka je cijena poklona x eura. Neka su A, D, M i T iznosi koje su dale redom četiri prijateljice.

Dora je dala trećinu iznosa kojeg su dale preostale tri prijateljice, tj. $D = \frac{1}{3}(A + M + T)$.
Sve četiri prijateljice zajedno su dale $A + M + T + \frac{1}{3}(A + M + T) = x$, 1 BOD
iz čega slijedi:

$\frac{4}{3}\,(A + M + T) = x$ 1 BOD

$A + M + T = \frac{3}{4}x$ 1 BOD

Dakle, Dora je dala $D = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$, što je 25% od ukupnog iznosa. 1 BOD

Marta je dala 25% odnosno četvrtinu iznosa koje su dale ostale tri prijateljice, pa na isti način zaključujemo da je Marta dala $M = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x$ petinu što je 20 % ukupnog iznosa cijene poklona.
4 BODA
Prema uvjetu zadatka Ana je dala 40 % ukupnog iznosa cijene poklona pa vrijedi da je Tea dala
$100\ \% - 40\ \% - 25\ \% - 20\ \% = 15\ \%$ ukupnog iznosa cijene poklona. 1 BOD

Kako je Tea dala 51 euro vrijedi:

$15\ \% \cdot\ x = 51$

$x = 340$

Cijena poklona je 340 eura. 1 BOD
…....…………………...…………………………….…………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko učenik ne koristi jednadžbe već grafički ili riječima objasni postupak rješavanja koji vodi ka točnom rezultatu vrednovati u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.
Napomena 2: Zaključak da je Dora dala 25 % ukupnog iznosa se može dobiti i zapisivanjem odnosa $3D =\ A + M + T$ i dodavanjem D na obje strane. Slijedi $4D =\ A + M + T + D = x,$ tj. $D = \frac{1}{4}x.$

7. Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 kojima je znamenka jedinica veća od vodeće znamenke, a razlika tog broja i broja zapisanog istim znamenkama u obrnutom poretku je kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.
Broj koji je manji od 1000 može biti jednoznamenkast, dvoznamenkast ili troznamenkast.

Pretpostavimo da je traženi broj jednoznamenkast.

Njegova vodeća znamenka je ujedno i znamenka jedinica pa znamenka jedinica nije veća od vodeće znamenke te traženi broj ne može biti jednoznamenkast već mora biti ili dvoznamenkast ili troznamenkast. 1 BOD

Pretpostavimo da je $\overline{xy}$ traženi dvoznamenkasti broj. Od većeg broja ćemo oduzimati manji.

Vrijedi da je $x \neq 0$ (vodeća znamenka) i $y \neq 0$ (prema uvjetu zadatka $y > x$).

Tada je broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku $\overline{yx}$ pa je

$\overline{yx} - \overline{xy} = 10y + x - (10x + y) = 9y - 9x = 9 \cdot (y - x)$. 1 BOD

x i y su znamenke različite od 0, njihova razlika $(y - x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dakle, $9 \cdot (y - x) \in \{0, 9, 18, 27, 36, 45, 56, 63, 72\}$. 1 BOD

U navedenom skupu samo su 9 i 36 kvadrati nekog prirodnog broja, a kako je

$9 = 9 \cdot 1$, $36 = 9 \cdot 4$ mora vrijediti $(y - x) \in \{1, 4\}$. 1 BOD

(*Do istog zaključka može se doći i na sljedeći način:*

Broj 9 je kvadrat prirodnog broja pa i $(y - x)$ mora biti kvadrat nekog prirodnog broja.

Brojevi x i y su znamenke različite od 0, njihova razlika $y - x$ je element skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ pa su jedine mogućnosti $y - x = 1$ ili $y - x = 4$. 2 BODA)

Dalje imamo:

y	9	8	7	6	5	4	3	2	9	8	7	6	5
x	8	7	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
$y - x$	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4

Traženi brojevi su : 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 59, 48, 37, 26 i 15. 3 BODA

Pretpostavimo da je $\overline{xyz}$ traženi troznamenkasti broj. Od većeg broja ćemo oduzimati manji.

Vrijedi da je $x \neq 0$ (vodeća znamenka) i $z \neq 0$ (prema uvjetu zadatka $z > x$).

Tada je broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku $\overline{zyx}$ pa je

$\overline{zyx} - \overline{xyz} = 100z + 10y + x - (100x + 10y + z) = 99z - 99x = 99 \cdot (z - x)$. 1 BOD

Prema uvjetu zadatka x i z su znamenke različite od 0 pa je njihova razlika

$(z - x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Dakle, $99 \cdot (z - x) \in \{0, 99, 198, 297, 396, 495, 597, 693, 792\}$. 1 BOD

Kako niti jedan od elemenata navedenog skupa nije kvadrat nekog prirodnog broja zaključujemo da traženi broj nije troznamenkast. 1 BOD

(*Do istog zaključka može se doći i na sljedeći način:*

Da bi umnožak $99 \cdot (z - x) = 9 \cdot 11 \cdot (z - x)$ bio kvadrat nekog prirodnog broja $z - x$ mora biti djeljiv s 11, a to je nemoguće jer je $(z - x) < 9$. 2 BODA)

Dakle, uvjet zadatka ispunjava samo trinaest dvoznamenkastih brojeva.
…....……………………...……………………………………...…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Najmanje 6 točno napisanih rješenja, bez obrazloženja kako su dobiveni, vrednovati s 1 BODOM, najmanje 9 rješenja s 2 BODA, a svih 13 s 3 BODA.

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2024.
8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj:

$$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2.$$

Prvo rješenje.

$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)\cdot\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)$

$=\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2+\sqrt{(7+2\sqrt{10})(7-2\sqrt{10})}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})(7+2\sqrt{10})}+\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2$

$=\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2+2\cdot\sqrt{(7+2\sqrt{10})(7-2\sqrt{10})}+\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2$ 2 BODA

$=7+2\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{49-14\sqrt{10}+14\sqrt{10}-40}+7-2\sqrt{10}$

$=7+2\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{49-40}+7-2\sqrt{10}$ 2 BODA

$=14+2\cdot 3$ 1 BOD

$=20$ 1 BOD

…......……………………...……………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik može, prilikom rješavanja zadatka, koristiti i izraze za kvadrat binoma te razliku kvadrata.

Drugo rješenje.

$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}\right)^2$ 2 BODA

$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$ 2 BODA

$=\left(2\sqrt{5}\right)^2$ 1 BOD

$=20$ 1 BOD

…......……………………...……………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

2. Bakterije se razmnožavaju nespolno tako da se jedna podijeli na dvije svakih deset minuta. Koliko je bilo bakterija na početku ako ih je nakon dva sata 2^{17}?

Rješenje.

Dva sata imaju 120 minuta pa se broj bakterija udvostručuje 12 puta. Nakon dva sata imamo 2^{12} puta više bakterija nego na početku.

3 BODA

Budući da je nakon dva sata 2^{17}, na početku je broj bakterija bio

$$2^{17} : 2^{12}$$

2 BODA

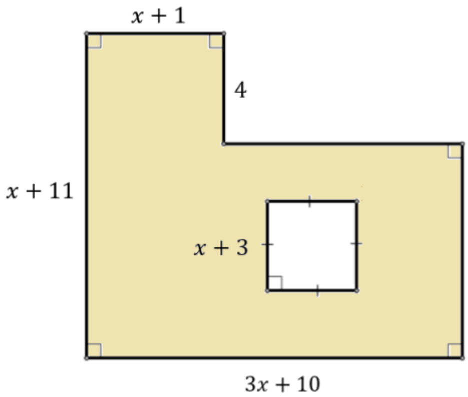
$$= 2^5 = 32$$

1 BOD

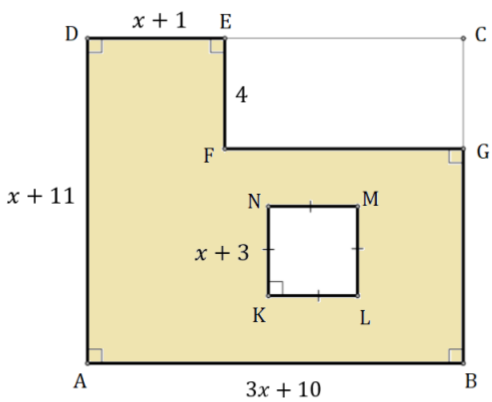
……...……………………...………………………………………………….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje i brojevi koji se pojavljuju u međukoracima mogu, ali i ne moraju, biti zapisani u obliku potencija s bazom 2.

3. Odredi površinu osjenčanog lika na slici i izrazi je u obliku $ax^2 + bx + c$, pri čemu je $a, b, c \in \mathbb{Q}$.



Prvo rješenje.



Lik $ABCD$ je pravokutnik kojemu su duljine susjednih stranica $3x + 10$ i $x + 11$ pa je njegova površina

$$P_{ABCD} = (3x + 10) \cdot (x + 11) = 3x^2 + 33x + 10x + 110 = 3x^2 + 43x + 110$$

1 BOD

Površina kvadrata $KLMN$ je

$$P_{KLMN} = (x+3) \cdot (x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

1 BOD

Duljine susjednih stranica pravokutnika $EFGC$ su 4 i $3x + 10 - (x+1) = 2x + 9$

1 BOD

pa je njegova površina

$$P_{EFGC} = 4 \cdot (2x+9) = 8x + 36.$$

1 BOD

Površina P osjenčanog lika na slici je:

$$P = P_{ABCD} - P_{KLMN} - P_{EFGC}$$

$$P = 3x^2 + 43x + 110 - (x^2 + 6x + 9) - (8x + 36)$$

1 BOD

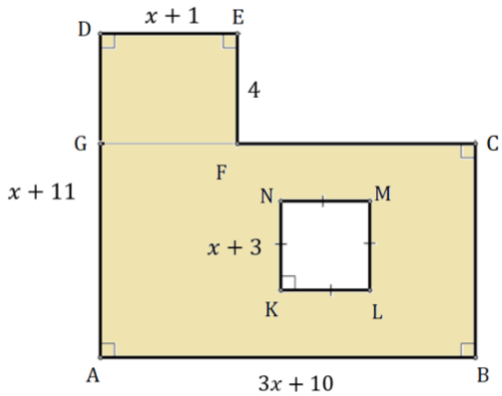
$$P = 2x^2 + 29x + 65.$$

1 BOD

……....……………………...………………………………..…………..…….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Polinomi dobiveni množenjem binoma ne moraju biti reducirani kako bi učenik dobio bodove za P_{ABCD} i P_{KLMN}.

Drugo rješenje.



Lik $ABCG$ je pravokutnik kojemu su duljine susjednih stranica $3x + 10$ i $x + 11 - 4 = x + 7$

1 BOD

pa je njegova površina

$$P_{ABCG} = (3x+10) \cdot (x+7) = 3x^2 + 21x + 10x + 70 = 3x^2 + 31x + 70.$$

1 BOD

Površina kvadrata $KLMN$ je

$$P_{KLMN} = (x+3) \cdot (x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9.$$

1 BOD

Duljine susjednih stranica pravokutnika $DGFE$ su 4 i $x + 1$ pa je njegova površina

$$P_{DFGE} = 4 \cdot (x+1) = 4x + 4.$$

1 BOD

Površina P osjenčanog lika na slici je:

$$P = P_{ABCG} + P_{DGFE} - P_{KLMN}$$

$$P = 3x^2 + 31x + 70 + (4x + 4) - (x^2 + 6x + 9)$$

1 BOD

$$P = 2x^2 + 29x + 65.$$

1 BOD

…....…………………...……………………………..…………..……..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Polinomi dobiveni množenjem binoma ne moraju biti reducirani kako bi učenik dobio bodove za P_{ABCG} *i* P_{KLMN}.

4. Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva 65 je puta veći od njihovog zbroja. Koji su to brojevi?

Rješenje.

Neka su n, $n + 1$, $n + 2$ tri uzastopna prirodna broja.

Tada je:

$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = 65 \cdot (n + n + 1 + n + 2)$$

1 BOD

$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = 65 \cdot 3 \cdot (n + 1)$$

2 BODA

Broj $n + 1$ je različit od nule pa cijelu jednadžbu možemo podijeliti s $n + 1$.

Dobivamo

$$n \cdot (n + 2) = 195.$$

1 BOD

Broj 195 treba prikazati kao umnožak dvaju prirodnih brojeva koji se razlikuju za 2.

Rastav broja 195 na proste faktore je $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$,

$$195 = 13 \cdot 15$$

1 BOD

$$n = 13.$$

To su brojevi 13, 14 i 15. 1 BOD

…....……………………….…...……………………………………….……... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik može označiti tri uzastopna prirodna broja i na neki drugi način, npr. $n - 1$, n i $n + 1$.

Napomena 2: Ako učenik metodom pokušaja odredi tri broja prema zadanim uvjetima, bez argumentacije da nema drugih rješenja, dobiva ukupno 2 BODA.

5. Koja može biti posljednja znamenka zbroja $3^m + 7^n$, pri čemu je $m, n \in \mathbb{N}$?

Rješenje.
Za $m \in \mathbb{N}$ dobivamo niz potencija s bazom 3:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$$

čije su posljednje znamenke

$$3, 9, 7, 1$$

koje se ciklički izmjenjuju.

2 BODA

Za $n \in \mathbb{N}$ dobivamo niz potencija s bazom 7:

$$7^1, 7^2, 7^3, 7^4, \dots$$

čije su posljednje znamenke

$$7, 9, 3, 1$$

koje se ciklički izmjenjuju.

2 BODA

Promotrimo sve moguće kombinacije posljednjih znamenaka pribrojnika.

posljednja znamenka		
pribrojnika		zbroja $3^m + 7^n$
1	1	2
1	3	4
1	7	8
1	9	0
3	3	6
3	7	0
3	9	2
7	7	4
7	9	6
9	9	8

Posljednja znamenka zbroja pripada skupu $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. 2 BODA

…....……………………...…………………………………………..……..….... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik ne mora ispisivati sve kombinacije već može zaključiti da, budući da zbrajamo dva neparna broja, posljednja znamenka zbroja mora biti parna, a svaka se parna znamenka može postići, npr. $1 + 1 = 2$, $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $1 + 7 = 8$, $1 + 9$ daje 0.

Posljednja dva boda dobivaju se za argumentaciju kako dobiti svaku od 5 mogućih znamenki, od kojih se 1 BOD dobiva ako je argumentacija ispravna za 4 moguće znamenke, a 0 bodova inače.

6. Zadan je pravilni peterokut $ABCDE$. Polupravci AB i DC sijeku se u točki F.
Dokaži da je $|FB| = |AC|$.

Prvo rješenje.
Zbroj mjera unutarnjih kutova peterokuta je

$$(5-2) \cdot 180° = 540°$$

pa je mjera jednog unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta

$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

1 BOD

Promotrimo trokut ABC.

Kako je $|AB| = |BC|$, trokut je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$ pa je

$$|\measuredangle BAC| = |\measuredangle ACB| = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

1 BOD

Promotrimo trokut BFC.

Kutovi $\measuredangle FBC$ i $\measuredangle BCF$ su vanjski kutovi pravilnog peterokuta (sukuti su odgovarajućih unutarnjih kutova) pa je

$$|\measuredangle FBC| = |\measuredangle BCF| = 180° - 108° = 72°.$$

1 BOD

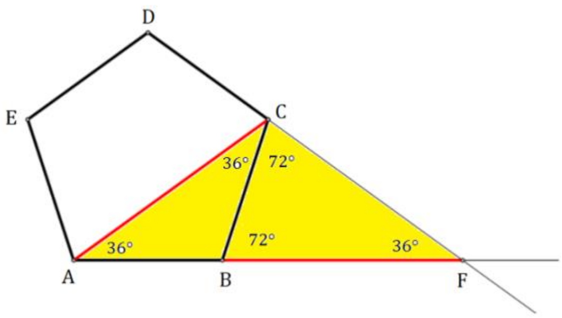
Stoga je trokut BFC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$ pa je $|BF| = |CF|$.

2 BODA

Promotrimo trokut AFC.

U trokutu BFC je

$$|\measuredangle CFB| = 180° - (72° + 72°) = 36°$$



pa je trokut AFC jednakokračan s osnovicom $\overline{AF}$. Stoga je $|CF| = |AC|$.

3 BODA

Pokazali smo da je $|BF| = |CF|$ i $|CF| = |AC|$ pa vrijedi

$$|BF| = |AC|$$

što je i trebalo dokazati. 2 BODA

…......……………………...……………………………………….………….……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Promatrajući trokut BFC, učenik za zaključak da je $|BF| = |CF|$ dobiva 2 BODA samo ako je prije toga odredio mjere kutova uz osnovicu $\overline{BC}$ trokuta BFC.

Napomena 2: Promatrajući trokut AFC, učenik za zaključak da je $|CF| = |AC|$ dobiva 3 BODA samo ako je prije toga odredio mjeru kuta $\measuredangle CFB$.

Drugo rješenje.
Promotrimo ΔECD *i* ΔEAB.

Pravilnom peterokutu su svi unutarnji kutovi međusobno sukladni i sve stranice međusobno sukladne pa je i $\Delta ECD \cong \Delta EAB$ (SKS poučak). Stoga je $\overline{CE} \cong \overline{BE}$, tj. sve dijagonale pravilnog peterokuta su međusobno sukladne. 2 BODA

Tada je trokut BCE jednakokračan trokut.

Mjera unutarnjeg kuta pravilnog peterokuta je

$$\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = \frac{540°}{5} = 108°.$$

1 BOD

Međusobno sukladni trokuti ΔECD i ΔEAB su jednakokračni trokuti s kutovima uz osnovice čija je mjera $36°$ pa je

$$|\measuredangle CBE| = |\measuredangle ECB| = 108° - 36° = 72°.$$

1 BOD

Kutovi $\measuredangle FBC$ i $\measuredangle BCF$ su vanjski kutovi pravilnog peterokuta (sukuti su odgovarajućih unutarnjih kutova) pa je

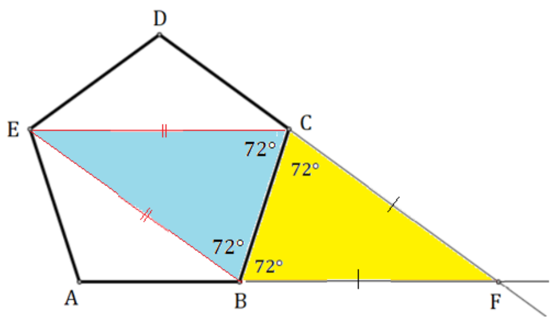
$$|\measuredangle FBC| = |\measuredangle BCF| = 180° - 108° = 72°.$$

1 BOD

Stoga je trokut BFC jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$ pa je $|BF| = |CF|$.

2 BODA

Promotrimo jednakokračne trokute BFC i BCE.



Trokuti BFC i BCE podudaraju se u stranici $\overline{BC}$ i dva kuta uz tu stranicu pa su sukladni (KSK poučak), $\Delta BFC \cong \Delta BCE$.

Vrijedi $|BF| = |CF| = |BE| = |CE|$. 2 BODA

Kako je $\overline{AC}$ dijagonala, a prethodno je pokazano da su sve dijagonale pravilnog peterokuta međusobno sukladne, vrijedi i da je $|BF| = |AC|$ 1 BOD
što je i trebalo dokazati.
……..…………………...…………………………………….…………….……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Na koliko se različitih načina mogu rasporediti sva slova riječi $ANAGRAM$ tako da se nikada dva slova A ne pojave jedno do drugog?

Prvo rješenje.
Posebno ćemo odrediti broj načina rasporeda tri slova A na neko od 7 mjesta te broj načina rasporeda preostalih slova N, G, R, M na preostala 4 mjesta. Zatim ćemo te brojeve pomnožiti. 2 BODA

Odredimo broj načina rasporeda tri slova A.

Ako se prvo slovo A nalazi na prvom mjestu, onda se drugo slovo A može nalaziti na:
- trećem, a treće slovo A na petom, šestom ili sedmom mjestu (3 načina)
- četvrtom, a treće slovo A na šestom ili sedmom mjestu (2 načina)
- petom, a treće slovo A na sedmom mjestu (1 način)

2 BODA

Ako se prvo slovo A nalazi na drugom mjestu, onda se drugo slovo A može nalaziti na:
- četvrtom, a treće slovo A na šestom ili sedmom mjestu (2 načina)
- petom, a treće slovo A na sedmom mjestu (1 način)

1 BOD

Ako se prvo slovo A nalazi na trećem mjestu, onda se drugo slovo A može nalaziti na:
- petom, a treće slovo A na sedmom mjestu (1 način)

1 BOD

Imamo ukupno 10 takvih načina rasporeda tri slova A.

Prethodni postupak prebrojavanja i odgovarajuće bodovanje opisani su i tablicom.
Neka je $* \in \{N, G, R, M\}$.

$A*A*A**$	$A**A*A*$	$A***A*A$	$*A*A*A*$	$*A**A*A$	$**A*A*A$
$A*A**A*$	$A**A**A$		$*A*A**A$		
$A*A***A$					
2 BODA			1 BOD		1 BOD

Odredimo broj načina rasporeda slova N, G, R, M na preostala 4 mjesta.
Njih možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 3 BODA

Konačno, sva slova riječi $ANAGRAM$ mogu se rasporediti na 240 različitih načina. 1 BOD
…....……………………...……………………………...…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ako učenik najprije napiše sve mogućnosti gdje je A na prvom mjestu i dobije 6 rješenja te zaključi da će simetrično (kada je A na zadnjem mjestu) dobiti još 6 rješenja, a zatim od tog broja oduzme 3 (jer je toliko mogućnosti gdje je A na prvom i zadnjem mjestu), pogrešno će zaključiti da je odgovor 9. Naime, ispustio je mogućnost da A ne bude ni na prvom ni na zadnjem mjestu. Tada učenik treba dobiti 3 BODA od 4 BODA predviđena za broj načina rasporeda slova A.

Napomena 2: Zadnji 1 BOD učenik dobiva samo uz prethodnu argumentaciju.

Drugo rješenje.
Posebno ćemo odrediti broj načina rasporeda slova N, G, R, M te broj načina rasporeda tri slova A na preostala 3 mjesta. Zatim ćemo te brojeve pomnožiti. 2 BODA

Slova N, G, R, M riječi $ANAGRAM$ možemo rasporediti na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ načina. 3 BODA

Za svaki takav raspored potrebno je rasporediti tri slova A prema zadanom uvjetu tj. tako da se nikada dva slova A ne pojave jedno do drugog.

Npr. ako su slova N, G, R, M zapisana u prethodnom rasporedu, onda su slobodna mjesta

$$\_N\_G\_R\_M\_$$

Dakle, za 3 slova A imamo 5 mogućih mjesta.

Kada bi to bila tri različita slova A, njih bi mogli rasporediti na $5 \cdot 4 \cdot 3$ načina, 1 BOD

a kako se radi o istom slovu, broj rasporeda je

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10.$$

3 BODA

Konačno, sva slova riječi $ANAGRAM$ mogu se rasporediti na 240 različitih načina. 1 BOD

…....…………………...……………………………….....…………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Kada bismo promatrali mjesta na kojima slova A nisu raspoređena, mogli bismo ih odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ načina, uz analogno bodovanje.

Napomena 2: Zadnji 1 BOD učenik dobiva samo uz prethodnu argumentaciju.