Zimska radionica - Djeljivost (mod)

Ilko Brnetić

14. siječnja 2024.

Definicija. Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli $a - b$, onda kažemo da je a *kongruentan* s b i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$.

Primjeri

1. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $2m + 4n = 555$.

   Rješenje. Kako je $2m+4n = 2(m+2n)$ paran broj, a 555 neparan, jednadžba nema rješenja. (možemo napisati i da je lijeva strana jednakosti $\equiv 0 \pmod 2$, a desna $\equiv 1 \pmod 2$).

2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m(m + 1) + 2n = 123454321$.

   Rješenje. Opet, kako je $m(m + 1)$ paran broj (od dva uzastopna prirodna broja jedan je paran), onda je $m(m + 1) + 2n$ paran broj, a 123454321 neparan pa jednadžba nema rješenja.

3. Dokaži da ne postoji prirodan broj n takav da je $n^3 - n = 234565432$.

   Rješenje. Kako je $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$ djeljiv s 3, jer je među tri uzastopna broja jedan djeljiv s 3, a broj 234565432 nije djeljiv s 3 (zbroj znamenki mu nije djeljiv s 3), jednadžba nema rješenja (možemo napisati i da je lijeva strana jednakosti $\equiv 0 \pmod 3$, a desna $\equiv 1 \pmod 3$).

4. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m^2 + 2mn = 50505050$.

   Rješenje. Kako je lijeva strana jednakosti jednaka $m^2 + 2mn = m(m + 2n)$, a s desne strane jednakosti je paran broj, onda barem jedan od brojeva m i $m + 2n$ mora biti paran, no kako su ta dva broja iste parnosti, onda je je lijeva strana jednakosti djeljiva s 4, a 50505050 nije djeljiv s 4 pa jednadžba nema rješenja.

5. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 koji su kvadrati prirodnih brojeva, a pri dijeljenju s 8 daju ostatak 4?

   Rješenje. To su brojevi oblika $4k + 2$, $k = 0, 1, 2, ...$, a takvih koji zadovoljavaju uvjete zadatka ima 250. Za rješenje vidi

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2015/2015-SS-skolsko-1234-zad+rj/2015-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf ,

   radi se o zadatku 3. sa školskog natjecanja za 2. razrede SŠ, 2015.

6. Odredi sve ostatke koje mogu imati kvadrati prirodnih brojeva pri dijeljenju s

   a) 3   b) 4   c) 5   d) 7   e) 8

   Rješenje. Prirodan broj m koji pri dijeljenju s prirodnim brojem n ima ostatak l jest oblika $m = nk + l$ za neki prirodni broj k i vrijedi

$$m^2 = (nk + l)^2 = n^2k^2 + 2nkl + l^2 = n(nk^2 + 2kl) + l^2$$

   što znači da je $(nk + l)^2 \equiv l^2 \ (mod\, n)$.

   Općenitije vrijedi da je $(nk \pm l)^2 \equiv l^2 \ (mod\, n)$.

   a) Prirodni brojevi mogu biti djeljivi s 3 ili imati ostatak ± 1 pri dijeljenju s 3.

   Kako je, za prirodni broj k,

   $(3k)^2 \equiv 0 \ (mod\, 3)$ i

   $(3k \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\, 3)$.

   zaključujemo da su mogući ostaci koji kvadrati prirodnog broja mogu imati pri dijeljenju s 3 jednaki 0 ili 1.

   b) Prirodni brojevi mogu biti djeljivi s 4 i imati ostatak ± 1 ili 2 pri dijeljenju s 4.

   Kako je, za prirodni broj k,

   $(4k)^2 \equiv 0 \ (mod\, 4)$,

   $(4k \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\, 4)$,

   $(4k + 2)^2 \equiv 4 \equiv 0 \ (mod\, 4)$.

   zaključujemo da su mogući ostaci koji kvadrati prirodnog broja mogu imati pri dijeljenju s 4 jednaki 0 ili 1.

   c)$(5k)^2 \equiv 0 \ (mod\, 5)$,

   $(5k \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\, 5)$,

   $(5k \pm 2)^2 \equiv 4 \ (mod\, 5)$.

   Zaključujemo da su mogući ostaci koji kvadrati prirodnog broja mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki 0, 1 ili 4.

   d)$(7k)^2 \equiv 0 \ (mod\, 7)$,

   $(7k \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\, 7)$,

   $(7k \pm 2)^2 \equiv 4 \ (mod\, 7)$,

   $(7k \pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 2 \ (mod\, 7)$.

   Zaključujemo da su mogući ostaci koji kvadrati prirodnog broja mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki 0, 1, 2 ili 4.

   e)$(8k)^2 \equiv 0 \ (mod\, 8)$,

   $(8k \pm 1)^2 \equiv 1 \ (mod\, 8)$,

   $(8k \pm 2)^2 \equiv 4 \ (mod\, 8)$,

   $(8k \pm 3)^2 \equiv 9 \equiv 1 \ (mod\, 8)$,

$(8k+4)^2 \equiv 16 \equiv 0 \ (mod\, 8)$,

Zaključujemo da su mogući ostaci koji kvadrati prirodnog broja mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki 0, 1 ili 4.

7. Odredi sve ostatke koje mogu imati potencije broja 2 pri dijeljenju s 3.

8. Odredi sve ostatke koje mogu imati potencije broja 3 pri dijeljenju s 4.

9. Odredi sve ostatke koje mogu imati potencije broja

   a) 2 b) 3 c) 7

   pri dijeljenju sa 5.

   Rješenja zadnja tri zadatka. Ako je,za prirodne brojeve a, n, m i l, $a^m \equiv l \ (mod\, n)$, što znači da je $a^m = kn + l$ za neki prirodni broj k pa je

$$a^{m+1} = a \cdot a^m = a \cdot (kn + l) = akn + al \equiv al \ (mod\, n).$$

Također, ako je $a \equiv k \ (mod\, n)$ i $b \equiv l \ (mod\, n)$, tada je $ab \equiv kl \ (mod\, n)$, jer je, za neke prirodne i i j,

$$ab = (in + k)(jn + l) = (ij + kj + li)n + kl \equiv kl \ (mod\, n).$$

7.) - odgovor: Mogući ostaci koji potencije broja 2 mogu imati pri dijeljenju s 3 jednaki 2 i 1.

8.) - odgovor: Mogući ostaci koji potencije broja 3 mogu imati pri dijeljenju s 4 jednaki 3 i 1.

9.) a) $2 \equiv 2 \ (mod\, 5)$,

$2^2 \equiv 4 \ (mod\, 5)$,

$2^3 = 8 \equiv 3 \ (mod\, 5)$,

$2^4 = 8 \cdot 2 \equiv 3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \ (mod\, 5)$,

$2^5 = 2^4 \cdot 2 \equiv 1 \cdot 2 = 2 \ (mod\, 5)$,

i dalje periodički. Zašto se ostaci ponavljaju periodički?

Zaključujemo da su mogući ostaci koji potencije broja 2 mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki redom 2, 4, 3 i 1.

Odnosno možemo zaključiti da je,

$2^{4l+1} \equiv 2 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$2^{4l+2} \equiv 4 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$2^{4l+3} \equiv 3 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$2^{4l} \equiv 1 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 1, 2, 3, ...$

b) $3 \equiv 3 \ (mod\, 5)$,

$3^2 = 9 \equiv 4 \ (mod\, 5)$,

$3^3 = 3^2 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 = 12 \equiv 2 \ (mod\, 5)$,

$3^4 = 3^3 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \ (mod\, 5)$,

$3^5 = 3^4 \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3 \ (mod\, 5)$, i dalje periodički...

Zaključujemo da su mogući ostaci koji potencije broja 3 mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki redom 3, 4, 2 i 1.

Odnosno možemo zaključiti da je

$3^{4l+1} \equiv 3 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$3^{4l+2} \equiv 4 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$3^{4l+3} \equiv 2 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$3^{4l} \equiv 1 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 1, 2, 3, ...$

c) $7 \equiv 2 \ (mod\, 5)$,

$7^2 = 7 \cdot 7 \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \ (mod\, 5)$,

$7^3 = 7^2 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 2 = 8 \equiv 3 \ (mod\, 5)$,

$7^4 = 7^3 \cdot 7 \equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \ (mod\, 5)$,

$7^5 = 7^4 \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 \equiv 2 \ (mod\, 5)$,

i dalje periodički...

Zaključujemo da su mogući ostaci koji potencije broja 3 mogu imati pri dijeljenju s 5 jednaki redom 2, 4, 3 i 1.

Odnosno možemo zaključiti da je

$7^{4l+1} \equiv 2 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$7^{4l+2} \equiv 4 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$7^{4l+3} \equiv 3 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 0, 1, 2, 3, ...$

$7^{4l} \equiv 1 \ (mod\, 5)$, za svaki $l = 1, 2, 3, ...$

Zadaci

1. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $5m+2n^2 = 10000001$.
2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je zbroj znamenaka broja $m^2 + 3mn$ jednak 2022.
3. Ako je m prirodan broj, a n neparan prirodan broj, dokaži da $m(m+2) + n(n+2)$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.
4. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m^2 = 2n^2 - 75n + 5$.
5. Dokaži da je zbroj kubova uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.
6. Postoje li prirodni brojevi m i n takvi da je $3m^2 - n^2$ jednako

   a) 75, b) 100, c) 125, d) 150?
7. a) Postoje li dva neparna prirodna broja čiji je zbroj kvadrata potpun kvadrat?

   b) Postoje li tri neparna prirodna broja čiji je zbroj kvadrata potpun kvadrat?

   c) Postoji li pet neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata potpun kvadrat?
8. Neka su duljine stranica pravokutnog trokuta prirodni brojevi. Dokaži da je duljina:

   a) barem jedne katete djeljiva s 3.

   b) barem jedne katete djeljiva s 4.

   c) barem jedne stranice djeljiva s 5.
9. Dokaži da je $5^n + 2^{n-1}$ djeljivo s 3 za svaki prirodni broj n.
10. Koliki je ostatak broja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2024}$ pri dijeljenju brojem 9?

Ideje i rješenja zadataka

1. Koristite metodu zadnje znamenke (to je mod 10) ili mod 5.

   Vidi rješenje na

   https://natjecanja.math.hr/materijali-za-pripremu/os/

   (Ilko Brnetić: Diofantske jednadžbe, Primjer 16)

2. Vidi rješenje na

   https://natjecanja.math.hr/materijali-za-pripremu/os/

   (Ilko Brnetić: Diofantske jednadžbe, Primjer 17)

   ili

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2022/2022-OS-drzavno-5678-zad+rj/2022-OS-drzavno-5678-rj.pdf ,

   radi se o 4. zadatku s Državnog natjecanja za 7. razrede OŠ 2022.

3. Vidi rješenje na

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2020/2020-OS-drzavno-5678-zad+rj/2020-OS-drzavno-8-rj.pdf ,

   radi se o 3. zadatku s Državnog natjecanja za 8. razrede OŠ 2020.

4. Vidi rješenje na

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/2013-SS-zup-A-1234-rj.pdf ,

   radi se o 4. zadatku s Županijskog natjecanja za 1. razrede SŠ 2013.

5. Koristi $(n+1)^3 = (n+1)(n+1)(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ i $(n+2)^3 = (n+2)(n+2)(n+2) = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$

6. HJMO 2020., drugi dan, zad 4.; vidi

   https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2021/01/HJMO2020-rje.pdf

7. Vidi rješenje na

   https://natjecanja.math.hr/materijali-za-pripremu/os/

   (Ilko Brnetić: Diofantske jednadžbe, Primjer 20)

8. Vidi rješenje u članku Andrej Dujella: Pitagorine trojke

   Rješenje zadatka c) može se naći na:

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-OS-drzavno-5678-zad+rj/2021-OS-drzavno-5678-rj.pdf ,

   radi se o 3. zadatku s Državnog natjecanja za 8. razrede 0Š 2021.

   Rješenja zadataka a) i b) možemo naći u rješenju 4. zadatka s Državnog natjecanja za 8. razrede 0Š 2022.

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2022/2022-OS-drzavno-5678-zad+rj/2022-OS-drzavno-5678-rj.pdf s time da u rješenju postoji jedna pogreška - trebalo je pisati dovoljno je (a ne potrebno) dokazati da je duljina jedne katete djeljiva s 3, i duljina jedne katete djeljiva s 4.

9. Za neparne n je $5^n + 2^{n-1} \equiv 2 + 1\,(mod\,3) \equiv 0\,(mod\,3)$;

   za neparne n je $5^n + 2^{n-1} \equiv 1 + 2\,(mod\,3) \equiv 0\,(mod\,3)$.

10. Vidi ideju rješenja na

    http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-OS-zupanijsko-45678-zad+rj/2021-OS-zupanijsko-45678-rj.pdf ,

    radi se o zadatku sličnom 3. zadatku sa Županijskog natjecanja za 8. razrede 0Š 2021.