Zimska radionica 2024., 7. razred

Eva Špalj – Igre s brojevima

1. Kako pet pravokutnika čije su duljine stranica brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 možemo složiti u kvadrat bez preklapanja i bez praznina? Svaki broj koristimo jedanput za duljine para nasuprotnih stranica.

2. Iva stoji u redu za ulaznice za koncert. Primjećuje da je $\frac{5}{6}$ reda ispred nje, a $\frac{1}{7}$ reda iza nje. Koliko je ukupno osoba u redu?

3. Diofantovo djetinjstvo trajalo je šestinu njegovog života, oženio se sedminu godina kasnije, brada mu je narasla kada je prošla još dvanaestina, a sin mu se rodio 5 godina kasnije, sin je živio polovinu očevih godina, a otac je umro 4 godine poslije sina. Koliko godina je živio Diofant?

4. Za skupinu učenika u dobi između 14 i 16 godina je umnožak njihovih godina je 9878400. Koliko je učenika i koliko godina imaju?

5. U deveteroznamenkastome se broju znamenke 1, 2, 3, …, 9 pojavljuju samo jednom. Broj je očito djeljiv s 9.

Ako tome broju maknemo zadnju znamenku jedinica, dobiveni će broj biti djeljiv s 8.

Ako tome broju maknemo zadnje dvije znamenke, dobiveni će broj biti djeljiv sa 7.

Ako tome broju maknemo zadnje tri znamenke, dobiveni će broj biti djeljiv sa 6.

i tako dalje…

Ako tome broju maknemo zadnjih sedam znamenaka, dobiveni će broj biti djeljiv s 2. Koji je početni broj?

Pravilnosti

Pogledajmo niz brojeva 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Ovaj se niz zove Fibonaccijev niz brojeva.

Postoje razna svojstva Fibonaccijevih brojeva.

I.
$$\begin{aligned} 2^2 - 3\cdot 1 &= 1 \\ 3^2 - 5\cdot 2 &= -1 \\ 8^2 - 13\cdot 5 &= -1 \\ 13^2 - 21\cdot 8 &= 1 \end{aligned}$$

II.
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 &= 5 \\ 2^2 + 3^2 &= 13 \\ 3^2 + 5^2 &= 34 \\ 5^2 + 8^2 &= 89 \end{aligned}$$

Otkrijte još neko svojstvo!

6. Zadani su početni članovi nekoliko nizova. Odredite nekoliko sljedećih članova niza i pronađite što više zanimljivih svojstava.

a. 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, …

b. 1, 9, 36, 100, 225, 441, …

c. 3, 5, 13, 85, 3613, …

d. 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, …

7. Pogledajte sljedeći niz

11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, …

Opišite pravilnost u nizu.

Nastavite niz, što primjećujete?

8. Ponekad ćemo poznajući pravilnost moći naći nova rješenja jednadžbi ako su neka rješenja već poznata. Primjerice, najpoznatija Diofantska jednadžba jest Pitagorina jednadžba:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

a. Postoji mnogo rješenja za koje je $z = y + 1$. Neka su $(x, y, z) = (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25)$. Nađite još neka.

b. Postoji mnogo rješenja za koje je $y = x + 1$. Neka su $(x, y, z) = (3,4,5), (20,21,29), (119,120,169)$. Nađite još neka.

Pomoć: $29^2 - 21^2 = (29-21)(29+21) = 8\cdot 50 = 16\cdot 25 = 4^2 5^2 = 20^2$.

9. Isto možemo primijeniti na sljedeću kubnu verziju Pitagorine jednadžbe:

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

Ovo su neka rješenja:

I.
$$9^3 + 15^3 + 12^3 = 18^3$$
$$28^3 + 53^3 + 75^3 = 84^3$$
$$65^3 + 127^3 + 248^3 = 260^3$$

II.
$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$
$$3^3 + 10^3 + 18^3 = 19^3$$
$$12^3 + 19^3 + 53^3 = 54^3$$
$$12^3 + 31^3 + 102^3 = 103^3$$
$$27^3 + 46^3 + 197^3 = 198^3$$
$$27^3 + 64^3 + 306^3 = 307^3$$

Odredite

10. Zapišite sljedeća dva člana niza 0, 1, 10, 2, 100, 11, 1000, 3, 20, 101, ___, ___.

11. Odredite četiri različita cijela broja za koje vrijedi:

a. Zbroj bilo koja tri broja je potpun kvadrat.

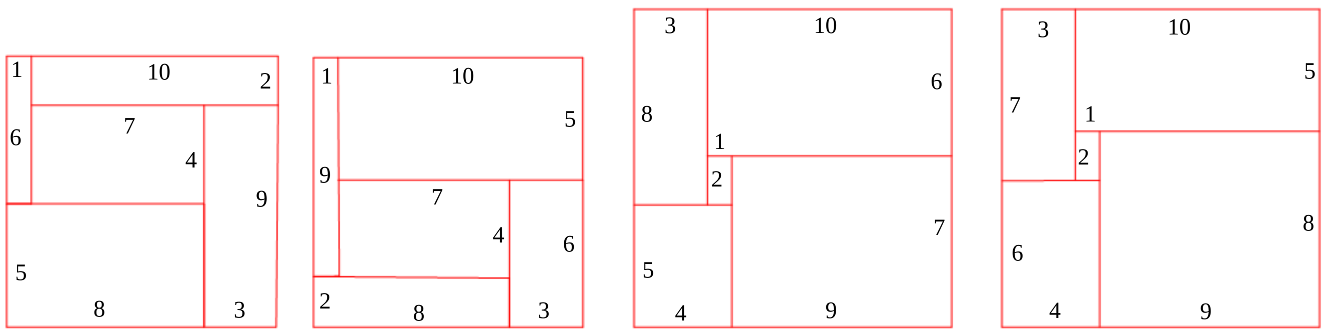
b. Osim prvoga svojstva vrijedi i da je zbroj sva četiri broja potpun kvadrat.

c. Zbroj bilo koja dva broja je potpun kvadrat.

Literatura:
Ed Barbeau: After Math: puzzles and brainteasers, Wall $Emerson, Inc., Toronto, Ontario, Canada, 1995.

Rješenja:

1.



2. 42 osobe
3. 84 godina
4. $14^3 \cdot 15^2 \cdot 16$
5. 381654729
6. a. Lucasovi brojevi; svaki je broj zbroj dva svoja prethodnika. Ili, kvadrat svakog člana razlikuje se od dva susjedna za ±5.

   b. Članovi niza su kvadrati, a razlika dva susjedna člana je kub

   $$9=(1+2)^2=1^3+2^3$$
   $$36=(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$$

   c. Svaki sljedeći član dobije se tako da se kvadrira prethodni, doda 1 i podijeli s 2.

   d. Množimo prethodne članove u obrnutom redoslijedu

   $$1\cdot 5+1\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 1=14$$
   $$1\cdot 14+1\cdot 5+2\cdot 2+5\cdot 1+14\cdot 1=42$$

7. Ako je broj n neparan, sljedeći je $3n$+1, ako je paran onda ga raspolovimo. Niz postaje 1, 4, 2, 1.
8. a. $y+z=x^2$, $(x,y,z)=(2k+1,\ 2k(k+1),\ 2k(2k+1)+1)$.

   b. Vrijedi:

   $$29=5\cdot 6-1$$
   $$169=29\cdot 6-5$$
   $$985=169\cdot 6-29$$
   $$5741=985\cdot 6-169$$

9. a. $(x,y,z,w)=\left(q^3+1,\ 2q^3-1,\ q\left(q^3-2\right),\ q\left(q^3+1\right)\right)$

   b. $(x,y,z,w)=\left(3q^2,\ 6q^2-3q+1,\ 3q\left(3q^2-2q+1\right)-1,\ z+1\right)$

   $$(x,y,z,w)=\left(3q^2,\ 6q^2+3q+1,\ 3q\left(3q^2+2q+1\right),\ z+1\right)$$

10. 10000, 12. Potencije faktorizacije na proste faktore 2, 3, 5,…