Adventske radionice 2023./24. Matej Vojvodić, 13. 1. 2024.
matej.vojvodic@mnm.hr

Igre za zaigrane

Za početak, predstavit ćemo dvije lagane igre kako bismo na njima analizirali strategije.

Primjer 1. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je umnožak brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 1. Jednostavno možemo zaključiti da je odgovor Matej — on može napisati broj 2 (ili bilo koji paran broj), pa će umnožak brojeva na ploči u svakom slučaju biti paran. □

Strategija koju Matej koristi u ovom slučaju je **konstantna**: ona u obzir ne uzima što bi Patricija mogla igrati. U ovakvom je zadatku najbitniji dio dokazati da je strategija pobjednička bez obzira na to što igra drugi igrač. Kada bismo zamijenili uvjete pobjede igrača, tj. kada bi Matej pobjeđivao ako je na ploči neparan broj, a Patricija ako je na ploči paran broj, pobjednica bi bila Patricija jer u tom slučaju može koristiti istu strategiju.
Ovakvim strategijama se uglavnom nećemo baviti u ovom predavanju jer se izrazito mali broj igara može dobiti koristeći konstantnu strategiju; takve igre su najčešće prekrivene invarijante.

Primjer 2. Matej i Patricija igraju igru. Najprije Matej na ploču napiše prirodan broj, a zatim Patricija napiše svoj. Ako je zbroj brojeva na ploči paran, pobjeđuje Matej, u suprotnom pobjeđuje Patricija. Tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 2. Sada je pak odgovor Patricija, ali njena strategija ovisi o tome što će Matej zapisati.

- Ako Matej napiše paran broj, Patricija mora napisati neki neparan broj.
- Ako Matej napiše neparan broj, Patricija mora napisati neki paran broj.

Poznato je da je zbroj parnog i neparnog broja neparan, pa Patricija može pobijediti u oba slučaja. □

Budući da je strategija dovoljno jednostavna, umjesto rastavljanja na slučajeve mogli smo jednostavnije reći: "Patricija piše broj suprotne parnosti od Matejevog".
Ovo je primjer **reaktivne** strategije jer se strategija velikim dijelom temelji se upravo na tome što će napraviti drugi igrač. Većina zadataka u ovom članku zasnivat će se upravo na traženju reaktivne strategije i dokazivanju da je ona pobjednička.

1. Simetrija

Pošto smo izgradili osjećaj za pojam strategije na laganim primjerima, promotrimo nešto zahtjevnije primjere (ali i dalje relativno lagane) u kojima igrač koji ima pobjedničku strategiju mora paziti kako će reagirati na poteze protivnika. Često će nam motivacija za strategiju biti traženje neke simetrije s obzirom na poteze drugog igrača, a najčešće ćemo iskoristiti neku geometrijsku simetriju, poput osne ili centralne simetrije, ili neki način sparivanja.

Primjer 3. Na ploči je redom napisano n minusa. Mislav i Mislav naizmjence prepravljaju jedan ili dva susjedna minusa u plus. Pobjednik je onaj igrač koji prepravi posljednji minus. Koji igrač pobjeđuje ako Mislav igra prvi?

Rješenje 3. Prvi Mislav želi prepraviti "sredinu niza". Ako je n neparan, prepravlja srednji minus u plus, a ako je n neparan, onda prepravlja dva srednja minusa u plus. Nakon prvog poteza, prvi Mislav zrcali poteze drugog Mislava na suprotnoj strani s obzirom na sredinu niza, što ga dovodi do pobjede.
Jasno se vidi da kako je prvi potez podijelio niz na dvije simetrične polovice, bez obzira na to što Mislav odigra, Mislav može osigurati da nakon njegovog poteza niz minuseva i pluseva ostane simetričan. Dakle, igra može stati jedino ako Mislav nema što igrati, pa zaključujemo da Mislav pobjeđuje. □

Kopiranje poteza drugog igrača zbog neke postojeće simetrije u igri i dopuštenim potezima jedan je od najčešćih načina stvaranja reaktivne strategije. Tako će biti i u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Borna i Janko naizmjence postavljaju po jednog skakača na šahovsku ploču. Skakača se ne smije postaviti na već zauzeto polje ili polje koje neki drugi skakač napada, a gubitnik je onaj tko ne može odigrati potez. Koji igrač pobjeđuje ako Janko igra prvi?

Rješenje 4. Pretpostavimo da je prvi igrač postavio svog skakača na dopušteno polje. Drugi igrač može staviti svog skakača osnosimetrično položaju posljednje postavljenog skakača s obzirom na pravac koji leži između 4. i 5. stupca. Sada je drugi igrač taj koji nakon svog poteza održava simetriju ploče!
Ako je prvi igrač postavio svog skakača, možemo garantirati dvije stvari: to je polje bilo slobodno i nije ga napadao niti jedan od ranije postavljenih skakača. Zbog simetrije, polje na koje drugi igrač želi postaviti skakača zasigurno je također prazno i ne napada ga niti jedan od skakača, osim možda upravo postavljenog jer je taj jedini postavljen u međuvremenu. Budući da je stanje na ploči simetrično u odnosu na os simetrije, osnosimetrična polja su u istom redu, a kako skakač sigurno ne napada niti jedno polje u istom redu, drugi igrač sigurno može postaviti skakača na željeno polje. Dakle, Borna uvijek može igrati ako Janko može igrati, a kako igra mora završiti jer je moguće postavit pa po ranijem dokazanom Borna pobjeđuje jer sigurno ima potez koji može igrati. □

Ostavljam sljedeće primjere kao vježbu:

Zadatak 5. Nina i Ines imaju 10 žetona: 2 bijela, 2 crna, 2 crvena, 2 plava i 2 zelena. Naizmjence stavljaju žetone na vrhove konveksnog deseterokuta. Ines želi napraviti niz od 5 žetona različitih boja, a Nina ju ometa u tome. Koji igrač pobjeđuje ako Nina počinje? A što ako Ines počinje?

Zadatak 6. Viktor i Emil igraju igru koristeći okrugle žetone istog radijusa na pravokutnoj ploči. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ranije postavljenima i da se u cijelosti nalazi na ploči. Gubi onaj koji više ne može postaviti žeton na ploču. Tko dobiva ako Viktor ide prvi?

Zadatak 7. U gornjem desnom kutu pravokutne šahovske ploče dimenzije $m \times n$ nalazi se kamen. Jurica i Tin naizmjence pomiču kamen proizvoljan broj polja prema dolje ili ulijevo. Pobjeđuje igrač koji kamen pomakne u donji lijevi kut. Ako je Tin prvi na potezu, pronađi sve parove (m, n) za koje on ima pobjedničku strategiju.

2. Pobjedničke i gubitničke pozicije

Osim traženja konkretne pobjedničke strategije, često ima smisla promatrati pobjedničke i gubitničke pozicije. Pozicija je općenito neko stanje igre, npr. položaj figura na ploči, broj i veličina hrpa, brojevi na ploči itd.
Za poziciju kažemo da je pobjednička za nekog igrača ako se točno u njoj ostvaruje uvjet pobjede za tog igrača, a za drugog igrača kažemo da je ta pozicija gubitnička. Inače poziciju zovemo pobjedničkom ako vodi u barem jednu gubitničku, a gubitničkom ako vodi isključivo u pobjedničke za drugog igrača.
Kako bismo približili ovu ideju, promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 8. Na stolu se nalazi 10 šibica. Ana i Banana sa stola uzimaju 1, 2 ili 3 šibice naizmjence. Pobjednik je onaj koji uzme zadnju šibicu. Ako Ana igra prva, tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 8. Lako vidimo da ako je na stolu samo 1, 2 ili 3 šibice, pobjeđuje onaj igrač koji je na potezu. Zato su pozicije s 1, 2 i 3 šibice pobjedničke. Jednako tako, lako se vidi da je pozicija sa 4 šibice gubitnička jer svaki potez vodi u pobjedničku poziciju za drugog igrača.
S obzirom na to da je na stolu relativno malo šibica, možemo do kraja raspisati koje su pozicije pobjedničke, a koje gubitničke. Vrlo brzo vidimo da Ana dobiva. Konkretno, pozicije s 5, 6 i 7 šibica su ponovo pobjedničke jer je moguće protivnika dovesti u poziciju s 4 šibice koja je gubitnička za njega. Pozicija s 8 šibica je ponovo gubitnička jer vodi samo u pobjedničke, a iz pozicija s 9 i 10 šibica moguće je doći do 8 šibica, pa su zato pobjedničke. Dakle, Ana može pobijediti. □

Zadatak 9. Na stolu se nalazi n šibica. Kruno i Kraljević mogu u jednom potezu uzeti bilo koji broj šibica između 1 i k uključivo, s tim da Kruno igra prvi. Odredite kako n ovisi o k kada Kraljević dobiva.

Rješenje 9. Ostavljeno čitatelju za vježbu. :) □

U sljedećem primjeru neće biti moguće na toliko izravan i lijep način odrediti pobjednika. Vrijeme je da vidimo kako možemo težak zadatak riješiti gotovo bez ikakvog pametnog uvida.

Primjer 10. Na stolu se nalazi 20 šibica. Mare i Maša naizmjence sa stola uzimaju po 2, 3, 5 ili 8 šibica. Gubi ona koja ne može igrati (tj. broj šibica je manji od 2). Ako Mare igra prva, tko sigurno može pobijediti?

Rješenje 10. Raspišimo pobjedničke i gubitničke pozicije po broju preostalih šibica:

- Pozicije 0 i 1 su očito gubitničke pozicije za igrača koji je na potezu.
- Pozicije 2, 3, 5 i 8 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 0.
- Pozicije 4, 6 i 9 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 1.
- Pozicija 7 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3 ili 5) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (5, 4 ili 2).
- Pozicije 10, 12 i 15 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 7.

- Pozicija 11 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (9, 8, 6 ili 3).
- Pozicije 13, 14, 16 i 19 su pobjedničke jer igrač može uzeti redom 2, 3, 5 ili 8 šibica i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 11.
- Pozicija 17 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (15, 14, 12 ili 9).
- Pozicija 18 je gubitnička pozicija jer igrač bilo kojim potezom (uzimanjem 2, 3, 5 ili 8 šibica) dovodi drugog igrača u neku od pobjedničkih (16, 15, 13 ili 10).
- Pozicija 20 je pobjednička jer igrač može uzeti 2 šibice i dovesti drugog igrača u gubitničku poziciju 18.

Dakle, ako Mare igra prva, pobjeđuje jer je pozicija 20 pobjednička za onog igrača koji je na potezu. □

Nije najljepši način, ali radi, samo treba biti uporan. :)
Slijedi još jedan sličan zadatak (koji je ponovno najlakše riješiti ispisivanjem svih pozicija), i jedan ipak malo manje sličan primjer u kojem ćemo dublje ući u igru predstavljenu u prošlom zadatku.

Zadatak 11 (Žup 2021. SŠ1A). Na stolu su 42 kamenčića. Dva igrača naizmjence odigravaju poteze. U svakom potezu igrač treba uzeti najmanje jedan kamenčić, ali ne više od polovine preostalih kamenčića. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na stolu ostane samo jedan kamenčić. Koji igrač sigurno može pobijediti?

Primjer 12. Na stolu se nalazi 2023 šibice. Mare i Maša naizmjence sa stola uzimaju po 2, 3, 5 ili 8 šibica. Gubi ona koja ne može igrati (tj. broj šibica je manji od 2). Ako Mare igra prva, tko sigurno može pobijediti?

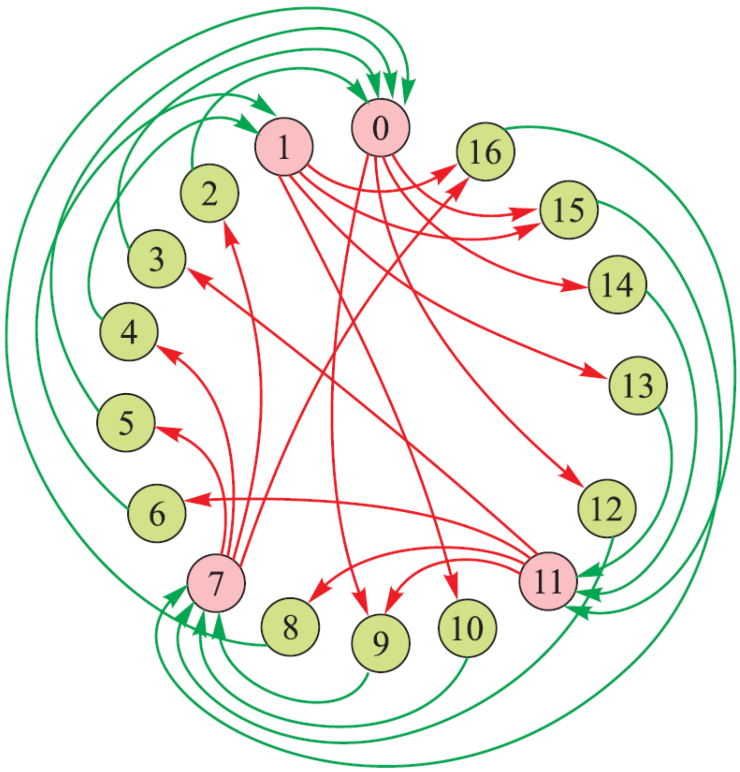
Rješenje 12. Pogledamo li prvih nekoliko pozicija (za male početne brojeve šibica), uočit ćemo sljedeće pobjedničke i gubitničke pozicije:

0 G	1 G	2 P	3 P	4 P	5 P	6 P	7 G	8 P	9 P	10 P	11 G	12 P
13 P	14 P	15 P	16 P	17 G	18 G	19 P	20 P	21 P	22 P	23 P	24 G	25 P
26 P	27 P	28 G	29 P	30 P	31 P	32 P	33 P	34 G	35 G	36 P	37 P	38 P

Slika 1: Pobjedničke (P) i gubitničke (G) pozicije

Hm, ok, čini se da se pozicije dalje ciklički ponavljaju s periodom 17. Motivirati nas mogu dvije uzastopne gubitničke pozicije, a daljnim raspisivanjem se možemo uvjeriti da bi 17 zaista trebao biti period. **Ok... a kako ćemo to dokazati?!**

Na slici 2 su vrhovi 0, 1, 7 i 11 crveni jer su gubitničke pozicije i iz njih vode crvene strelice u pripadne pobjedničke pozicije. Ostali su vrhovi zeleni jer su pobjedničke pozicije te su zelenim strelicama istaknuti neki mogući potezi koji vode u pripadne gubitničke pozicije.



Slika 2: Graf strategija

Dapače, ovaj graf možemo koristiti i pri pravoj igri jer pokazuje i pobjedničku strategiju, tj. koji potez vodi u gubitničku poziciju za drugog igrača. *Inače, rigorozan matematički dokaz rješenja ovog zadatka se provodi jakom indukcijom tako da se pokrije svih 17 mogućnosti, ali se izostavlja ovdje jer ga se predavaču ne da zapisati.* Konačno, sada kada smo razvili svu potrebnu teoriju, možemo zaključiti da kako je 2023 dijeljiv sa 17, pobjeđuje drugi igrač. □

Ukratko, ako nije odmah jasno koje su pobjedničke pozicije, korisno je ipak napasti zadatak, pa uz raspis probati uočiti uzorak i zatim ga dokazati.

Zadatak 13. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Mila i Karlo s hrpe naizmjence uzimaju neki broj kamenčića, a pobjeđuje onaj igrač koji uzme zadnji kamenčić. Ako Mila ide prva, za koje n ima pobjedničku strategiju ako broj kamenčića koji miču s hrpe ni u kojem potezu ne smije biti složen broj? Što ako pak ne smije biti prost broj?

Rješenje 13. Ostavljeno čitateljici za vježbu. :) □

Ovdje ističem još jedan zanimljiv primjer. Preporučam svima koji ga nikad nisu vidjeli da se zadrže na njemu i sam ga pokušaju riješiti prije nego što pročitaju rješenje na drugoj strani papira.

Primjer 14. Dvopotezni je šah po svim pravilima jednak običnom šahu, no svaki igrač, umjesto da odigra jedan potez, igra dva. Dakle, najprije bijeli odigra dva poteza, pa crni odigra dva poteza, pa bijeli dva poteza, itd. Uz optimalnu igru, koji igrač sigurno ne može izgubiti?

Rješenje 14. Bijeli ne može izgubiti, a dokaz provodimo kontradikcijom.
Pretpostavimo suprotno, tj. da bijeli može izgubiti uz optimalnu igru, pa zato početna pozicija mora biti gubitnička za bijeloga. Ukoliko je početna pozicija gubitnička, dobivena će pozicija biti pobjednička za crnoga neovisno o prva dva poteza bijeloga. Sada je kontradikciju najlakše pronaći tako da od svih mogućih načina na koje se mogu odigrati prva dva poteza odaberemo onaj za koji lagano možemo odrediti stavlja li zaista crnoga u pobjedničku poziciju.
Pozicija za koju je to najlakše odrediti je početna, zato jer smo o njoj već zaključili da je gubitnička za igrača na potezu. Uzmimo primjerice poteze skakača s B1 na C3, a zatim u drugom potezu nazad s C3 na B1. Razlog za ovakav potez je pustiti crnoga da igra iz početne pozicije.
Po pretpostavci, nakon tih odigranih poteza bijeloga, dobivena pozicija je pobjednička za crnoga (ali je on sada igrač na potezu). Sada kada je bijeli prepustio potez, uspio je natjerati crnoga da postane onaj koji mora vući poteze iz početne pozicije koja je po pretpostavci gubitnička. Dakle, crni je istvremeno u pobjedničkoj i gubitničkoj poziciji, što je kontradikcija. Zaključujemo da je pretpostavka da je početna pozicija gubitnička lažna, stoga prvi igrač ne može izgubiti. □

⚠ Oprez

Analizu pobjedničkih i gubitničkih pozicija može se napraviti **samo u igrama koje završavaju**! Ako bismo na primjer imali igru koja ne mora završiti, tada nije istina da ukoliko je početna pozicija gubitnička za sve osim jednog igrača, da on zaista i može dobiti!

Neki zadaci za vježbu

1. Na tri hrpe nalaze se žetoni, na prvoj hrpi 2 žetona, na drugoj 3, a na trećoj 4 žetona. Igraju dva igrača. Jednim potezom dozvoljeno je jednu hrpu razdvojiti na dvije manje hrpe žetona. Gubi igrač koji nema mogućnost odigrati potez. Tko pobjeđuje?

2. Na stolu su dvije hrpe žetona veličine n i m. Martin i Mislav igraju naizmjence, a u jednom potezu mogu uzeti proizvoljan broj žetona s hrpe koju odaberu. Pobjednik je onaj koji uzme zadnji žeton. Ako Martin igra prvi, tko sigurno može pobijediti u ovisnosti o n i m?

3. Brojevi od 1 do 6 napisani su jedan za drugim. Igrači naizmjence raspoređuju znakove plus i minus između tih brojeva. Kad se sva mjesta popune, izračunava se rezultat. Ako je rezultat paran broj, pobjednik je prvi igrač, a ako je neparan, pobjednik je drugi igrač. Tko pobjeđuje?

4. Dva igrača igraju križić-kružić na ploči 9x9. Za svaki red i za svaki stupac u kojem na kraju igre ima više križića nego kružića prvi igrač dobije jedan bod. Drugi igrač dobiva po jedan bod za svaki red i za svaki stupac u kojem ima više kružića nego križića. Koji će igrač imati više bodova?

5. Jurica i Mila igraju igru s čokoladom oblika pravokutnika dimenzija $m \times n$ koja se sastoji od jediničnih kvadratića. Igrači naizmjence biraju jedan od preostalih kvadratića te odlome (i pojedu) sve kvadratiće koji se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu niže od odabranog, kao i sve one koji su time ostali odvojeni od ostatka čokolade, pri čemu gornji lijevi kvadratić čokolade ostaje nepojeden. Gubi onaj igrač koji pojede zadnji kvadratić, tj. onaj u gornjem lijevom kutu. Ako Mila igra prva, tko pobjeđuje?