

Zimska radionica - Sume i nejednakosti

Matija Bašić

14. siječnja 2024.

Zadaci

1. Odredi i dokaži pravilo na temelju sljedećih jednakosti

$$9^2 - 5^2 = 4 \cdot 14,$$

$$10^2 - 3^2 = 7 \cdot 13,$$

$$7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11.$$

2. Odredi formulu za $(a + b)^2$

3. Odredi sve realne brojeve x takve da je $x^2 = 5 + 4x$.

4. Riješi jednadžbu

$$(x - 1) + (x - 4) + \dots + (x - 298) = 50.$$

5. Izračunaj zbroj

(a)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 123^2.$$

(b)

$$1 + 3 + 5 + \dots + 123.$$

(c)

$$1 + 6 + 15 + 28 + \dots + 276.$$

(d)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2048}.$$

(e)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

(f)

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}.$$

6. Što je veće $\sqrt{19} + \sqrt{99}$ ili $\sqrt{20} + \sqrt{98}$?

7. Dokaži da za bilo koja dva realna broja x i y vrijedi

$$3x(x + 2y) \leq (2x + y)^2.$$

8. Dokaži da za realne brojeve a , b i c vrijedi

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

9. Neka su $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{2}{1 - xy} \leq \frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - y^2}.$$