Zimska radionica 2023/24 - Logički zadaci (8.r)

Mea Bombardelli

e-mail: Mea.Bombardelli@math.hr

13. siječnja 2024.

Prvih pet zadataka su primjeri raznovrsnih logičkih zadataka. U rješenjima zadataka 5. do 12. koristi se poznati Dirichletov princip (iako to ponekad nije glavna ideja u dokazu). U posljednja četiri zadatka bavimo se pločama pravokutnim točkama. Zadaci poput 13. i 15. najlakše se rješavaju odgovarajućim bojanjem ploče. Ako je potrebno, rješenje zadnjeg zadatka potražite na webu. Bio je postavljen na državnom natjecanju 2007. godine za 1. razred A varijante.

Zadaci

1. Znamenkama 4, 5, 6, 7, 8, 9 napisan je jedan šesteroznamenkasti broj. Tri prijateljice su pogađale taj broj.

   Katica: 574698

   Lucija: 786945

   Marica: 456789

   Pokazalo se da je Katica pogodila točna mjesta za tri znamenke. Isto toliko je pogodila i Lucija, dok je Marica pogodila mjesto samo jedne znamenke. Koji je to šesteroznamenkasti broj?

2. Pino i Lino igraju šah cijelo popodne. Nijedna partija do sada nije završila remijem. Trenutni rezultat je 7 : 4 za Pina. Tko će u 12. partiji imati bijele figure, ako znamo da je do sada pet puta pobijedio crni? (Igrači mijenjaju figure nakon svake partije.)

3. Tablica 1200×800 popunjena je brojevima. U svakom retku određen je najmanji broj, te je od tih 1200 brojeva odabran najveći. U svakom stupcu određen je najveći broj, te je od tih 800 brojeva odabran najmanji. Koji je broj veći – najveći od najmanjih ili najmanji od najvećih?

4. Na ploči su napisane nule i jedinice. Biramo po dva broja; ako su brojevi jednaki na ploču napišemo broj 1, a ako su različiti broj 0, a zatim odabrane brojeve brišemo. Postupak se ponavlja dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Dokaži da taj broj ne ovisi o tome kojim smo redom birali parove brojeva.

5. Sve stranice i dijagonale konveksnog šesterokuta obojane su u dvije boje. Dokaži da postoji jednobojni trokut.

6. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva koja nisu relativno prosta.

7. Na zabavi je 100 osoba, a prilikom dolaska neki su se međusobno rukovali. Dokaži da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem osoba.

8. Unutar kvadrata stranice duljine 1 m nalazi se 51 točka. Dokaži da postoje tri točke koje se mogu prekriti krugom polumjera 15 cm.

9. Meta koja ima oblik pravilnog šesterokuta stranice duljine 1 m, pogođena je s 19 strelica. Dokaži da su barem dvije strelice pogodile metu na udaljenosti manjoj od 60 cm.

10. Brojevi od 1 do 10 napisani su u jednom redu u bilo kojem redosljedu. Prema tom redosljedu svakom broju pridružen je njegov redni broj. Zatim je svaki broj zbrojen sa svojim rednim brojem. Na taj način se dobiva deset zbrojeva. Dokaži da su znamenke jedinica neka dva zbroja međusobno jednake.

11. Na natjecanju su sudjelovala 22 učenika iz osam škola. Oni su točno riješili ukupno 50 zadataka. Svaki učenik iz iste škole riješio je jednak broj zadataka, a učenici iz raznih škola riješili su različit broj zadataka. Svaki učenik je riješio barem jedan zadatak. Koliko je ukupno učenika riješilo samo po jedan zadatak?

12. Oko okruglog stola sjede 123 muškarca i 123 žene. Dokaži da postoji osoba koja sjedi između dvije žene.

13. Je li moguće šahovsku ploču bez dva suprotna ugaona polja prekriti pločicama dimenzija 2×1?

14. Je li moguće šahovsku ploču bez jednog polja (bilo kojeg) prekriti "L" pločicama od tri polja?

15. Je li moguće ploču dimenzija 10×10 prekriti s 25 pločica dimenzija 4×1?

16. Dokaži da se ploča dimenzija 4×4 može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.

    Dokaži da navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija 5×5.