Zimska radionica - Matematička indukcija

Ilko Brnetić

12. siječnja 2024.

Zadaci

1. Izvedi zatvorenu formulu za zbroj $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{k^2(k+1)^2}$.

2. Dan je niz: $a_1 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}$. Odredi formulom a_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

3. Dan je niz: $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Odredi a_{2024}.

4. Dokaži da je, za svaki prirodan broj n,

$$\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}}}_{n \ korijena} < 3.$$

5. Dokaži da je, za svaki prirodan broj n,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

6. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $3^n \cdot (n!)^2 < (2n)!$.

7. Matematičkom indukcijom dokaži nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine n nenegativnih realnih brojeva.

8. Matematičkom indukcijom dokaži da je $5^n + 2^{n-1}$ djeljivo s 3 za svaki prirodni broj n.

9. Matematičkom indukcijom dokaži da je zbroj kubova uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

10. Dokaži da se ploču $2^n \times 2^n$ iz koje je izrezano jedno polje može popločati triominima u obliku slova L.

11. U ravnini je dan neki broj broj pravaca tako da se nikoja tri ne sijeku u istoj točki. Na taj način ravnina je podijeljena na područja koja omeđuju pravci. Dokaži da je područja moguće obojiti u crno i bijelo tako da susjedna područja budu različite boje.

12. Automobil vozi po kružnoj stazi. Uz stazu se nalaze benzinske stanice koje sve zajedno sadrže točno onoliko benzina koliko je potrebno da automobil obiđe stazu. Dokaži da postoji mjesto na stazi s kojeg automobil može krenuti tako da obiđe cijelu stazu.

13. Na beskonačnoj ploči u kvadratu 2024×2024 nalaze se žetoni. Dozvoljeno je jednim žetonom preskočiti drugi horizontalno ili vertikalno ako je polje iza toga prazno. Pritom preskočeni žeton uklanjamo. Dokaži da ova “igra” može završiti sa samo jednim žetonom na ploči.

Ideje i rješenja zadataka

1. Matematičkom indukcijom treba dokazati da je $\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

2. Matematičkom indukcijom treba pokazati da je $a_n = 3^n - 2^n$.

   Vidi rješenje na

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2009/2009-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2009-SS-zup-1234-A-rj.pdf ,

   radi se o 1. zadatku s Županijskog natjecanja za 4. razrede SŠ 2009.

3. Niz možemo ekvivalentno zadati na sljedeći način: $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$.

   Tada matematičkom indukcijom možemo dokazati da je $a_n = (n-2)!, \quad n \geq 2$ (kako u rekurzivnoj relaciji izražavamo član niza preko dva prethodnika, u koraku indukcije ćemo trebati koristiti pretpostavku da tvrdnja vrijedi za dva prethodnika pa ćemo bazu indukcije morati provjeriti i za $n = 2$ i za $n = 3$).

   Konačno je $a_{2024} = 2022!$.

   Vidi rješenje na

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2016/2016-SS-skolsko-1234-zad+rj/2016-SS-skolsko-A-1234-zad.pdf ,

   radi se (sasvim sitno preinačenom) o 1. zadatku sa školskog natjecanja za 4. razrede SŠ 2016.

4. Označimo li s $a_n = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}_{n\ korijena}$, onda je $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$.

5. Dokažimo da je, za svaki prirodan broj n,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}.$$

   Bazu indukcije za $n = 1$ je trivijalno provjeriti.

   Pretpostavimo li da je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$$

   za neki $n \in \mathbb{N}$, slijedi

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1},$$

   čime smo proveli korak indukcije i dokazali tvrdnju.

   Druga se nejednakost slično dokazuje.

6. Za $n = 1$ nejednakost ne vrijedi, a za $n \geq 2$ je dokazujemo indukcijom.

   Vidi rješenje na

   http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-skolsko-1234-zad+rj/2013-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf ,

   radi se o 5. zadatku sa školskog natjecanja za 4. razrede SŠ 2013.

7. Provjerite bazu za $n = 1$ i provedite korak s 2^n na 2^{n+1} i s n na $n - 1$.

8. Tvrdnja se lagano može dokazati i korištenjem modularne aritmetike i matematičkom indukcijom.

   Skica dokaza indukcijom:

   Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi, a za provedbu koraka indukcije koristimo da je $5^{n+1} + 2^n = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 5^n + 2(5^n + 2^{n-1})$.

9. I ova se tvrdnja može dokazati i korištenjem modularne aritmetike i matematičkom indukcijom.

10. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n. U koraku indukcije ploču $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ dijelimo na četiri manje ploče $2^n \times 2^n$, pozicioniramo triomino "u središte" i koristimo pretpostavku indukcije.

11. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po broju pravaca. Bazu je lagano provjeriti. Po pretpostavci, za neki n, područja koja omeđuje n pravaca možemo obojati crno i bijelo tako da susjedna polja budu različite boje. U koraku dodajemo jedan pravac koji dijeli neka područja na dva dijela i promijenimo boju u svim područjima koja se nalaze s jedne strane tog pravca.

12. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju benzinskih stanica. Ključna ideja je da dokažemo da postoji benzinska stanica u kojoj ima dovoljno benzina da bismo došli do sljedeće stanice.

13. Baza provjerimo za kvadratu 2×2 ispunjen žetonima i potom pokažemo da kvadrat $(n + 3) \times (n + 3)$ možemo svesti na kvadrat $n \times n$.

    Zadatak predstavlja dio zadatka koji je bio zadan na IMO-u 1993. (zadatak 3.)