Adventske radionice 2023./24. Matej Vojvodić, 13. 1. 2024.
matej.vojvodic@mnm.hr

Potencija točke i za što se koristi?

1. Što je to potencija točke

Zadatak 1.1. Neka je zadana kružnica k sa središtem u S polumjera r i točka A u ravnini. Neka je kroz točku A provučen pravac koji siječe kružnicu k u točkama Q_1 i Q_2.

a) Dokaži da je izraz $|AQ_1| \times |AQ_2|$ konstantan.

b) Dokaži da je $|AQ_1| \times |AQ_2| = |AS|^2 - r^2$.

Definicija 1.1: Potencija točke

Neka je zadana kružnica k sa središtem u S polumjera r i točka A u ravnini, te proizvoljni pravac kroz točku A koji siječe kružnicu k u točkama Q_1 i Q_2. Tada kažemo da je potencija točke na kružnicu umnožak (usmjerenih) duljina dužina $AQ_1 \times AQ_2$ vrijednosti jednakoj $|AS|^2 - r^2$.

Korolar 1.2: Predznak potencije točke i lokacija točke

Neka je p vrijednost potencije točke T na kružnicu k. Vrijede sljedeće ekvivalencije:

$p > 0 \iff T$ je izvan k $\qquad$ $p = 0 \iff T$ je na k $\qquad$ $p < 0 \iff T$ je unutar k

Primjer 1.2. Razmisli koliko točno iznosi potencija točke na pojedinim mjestima:

a) Odredi geometrijsko mjesto gdje potencija točke poprima najmanju vrijednost.

b) Odredi geometrijsko mjesto gdje potencija točke poprima najveću vrijednost.

c) Odredi geometrijsko mjesto gdje potencija točke poprima vrijednost jednaku $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Radikalna os i radikalno središte

Definicija 2.1: Radikalna os

Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje imaju jednaku potenciju na dvije nekoncetrične kružnice naziva se radikalna os.

Lema 2.2

Ako su A i B točke u ravnini i d neki realan broj, tada je geometrijsko mjesto sa svojstvom $|AT|^2 - |BT|^2 = d$ pravac okomit na AB.

Teorem 2.3: Radikalna os

Radikalna os je pravac.

Teorem 2.4: Radikalno središte

Neka su k_1, k_2 i k_3 tri kružnice s nekolinearnim središtima. Tada se radikalne osi svakog para sijeku u jednoj točki (poznatoj kao radikalno središte).

Teorem 2.5: Koaksijalne kružnice

Kružnice sa istom radikalnom osi nazivamo koaksijalne kružnice. Koaksijalne kružnice imaju sva središta kolinearna. *Ponekada je u zadacima korisno dokazati da 3 kružnice imaju zajedničku radikalnu os iz čega odmah slijedi da su im središta kolinearna te time pokazati neku vrstu kolinearnosti.*

3. Uvodni zadaci

1. Vrhom C trokuta $\triangle ABC$ povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T sjecište pravca AB i te tangente. Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$

2. Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u K i L te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama A i B, tim redom. Neka je M točka na presjeku pravaca AB i KL. Dokažite da je $|AM| = |BM|$.

3. Zadane su točke A, B, C i D u ravnini, te neka je T presjek pravaca AB i CD. Točke A, B, C i D leže na kružnici **ako i samo ako** vrijedi $|AT| \times |BT| = |CT| \times |DT|$. *Navedenu činjenicu možete na natjecanjima koristiti kao karakterizaciju tetivnih četverokuta.*

4. Dvije kružnice, k_1 i k_2, sijeku se u točkama S i T. Neka je P točka na pravcu ST. Na k_1 odabrane su točke A i B, a na k_2 odabrane su C i D takve da su A, B i P te C, D i P kolinearne. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

5. Pravci AB,CD i EF sijeku su jednoj točki. Ako su četverokuti $ABCD$ i $ABEF$ tetivni dokaži da je i $CDEF$ tetivan četverokut.

4. Zadaci

6. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut i neka se T presjek pravaca AB i CD. Neka je E polovište AT i F polovište TC. Dokaži da je $EFDB$ tetivan četverokut.

7. Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k siječe q u točkama B i C, a dodiruje p u točki A. Neka je T točka na p takva da TB i TC sijeku kraći luk $\overset{\frown}{AC}$ u točkama K i L redom. Dokaži da KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

8. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle ABC > 90°$, odnosno $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M. Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM.

9. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke D, E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivan. Neka je T drugo sjecište kružnica opisanih trokutima BDF i CDE. Dokažite da su točke A, D i T kolinearne.

10. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke E i F takve da su pravci EF i BC paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom A, a okomit je na stranicu $\overline{BC}$ trokuta.

11. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sijeku. Nađi geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih. (Dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.)

12. Dvije kružnice k_1 i k_2 sijeku se u M i N. Neka je l zajednička tangenta k_1 i k_2 koja je bliže M. l dira k_1 u A i k_2 u B. Pravac kroz M paralelan sa l siječe k_1 u C i k_2 u D. Pravci CA i DB sijeku se u E; pravci AN i CD sijeku se u P; pravci BN i CD sijeku se u Q. Dokaži $|EP| = |EQ|$.

13. (Eulerova relacija) U trokutu sa središtem opisane O, središtem upisane I, radijusom opisane R i radijusom upisane r. Dokaži da vrijedi $|OI|^2 = R(R - 2r)$.

14. Neka su k_1 i k_2 koncentrične kružnice t.d. je k_2 unutar k_1. Neka je A točka na k_1 i B točka na k_2 tako da je AB tangenta na k_2. Neka je C drugo sjecište AB sa k_1, i neka je D polovište AB.Pravac koji prolazi kroz A siječe k_2 u E i F na takav način da simetrale stranica DE i CF sijeku u M na pravcu AB. Odredi vrijednost AM/MC.

5. Hintovi

Zadatak 1.1. Za a) dio nađi slične trokute. Za b) dio promatraj pravac koji prolazi kroz S.

Korolar 1.2. Vidi se direktno iz 1.1.b)

Primjer 1.2. a) tražiš točku, b) ne postoji, c) (uglavnom) tražiš kružnicu

Lema 2.2. Nađi točku na pravcu AB za koju vrijedi izraz. Dalje je samo Pitagorin poučak.

Teorem 2.3. Vidi se iz prethodne leme.

Teorem 2.4. Lako se pokaže da nikoje dvije radikalne osi nisu paralelne.

Teorem 2.5. Radikalna os je okomita na spojnicu središta.

Zadaci

1. Teorem o kutu između tetive i tangente.
2. Što je pravac KL?
3. Prvi smjer je trivijalan sada kada znamo što je potencija točke. Za drugi smjer, probaj "izokrenuti" traženo da dobiješ slične trokute, i zbog njih kuteve za tetivnost.
4. Iskoristi direktno prethodni zadatak.
5. Samo malo drukčije postavljen prethodni zadatak.
6. Promatraj potenciju točke T na traženi četverokut.
7. Dodaj kružnicu opisanu trokutu KLT.
8. Neka je S sjecište dijagonala. Promatraj potenciju od S na kružnicu $BCDM$.
9. Uvedi radikalno središte.
10. Uvedi ortocentar.
11. Rješenje je njihova radikalna os.
12. Neka je K sjecište MN i AB. Promatraj potenciju točke K, i probaj dobiti $PM = QM$.
13. Pokušaj prvo zadatak riješiti za jednakokračan trokut.
14. $CFDE$ je tetivan sa središtem u M.

6. Rješenja

Zadatak 1.1. Sada kada smo pokazali da vrijedi a) dio, za b) dio možemo uzeti neki specifični pravac koji će nam olakšati dokaz: uzmimo pravac tako da prolazi kroz S. Tada je $|AQ_1| = |AS| - r$, a $|AQ_2| = |AS| + r$. Vidi se da je umnožak samo razlika kvadrata, i dobivamo traženo.

Korolar 1.2. Vidi se iz definicije. Ako je T unutar k, onda očito vrijedi $|TS| < r \iff |TS|^2 < r^2$. Slično, ako je T na k, onda vrijedi $|TS| = r \iff |TS|^2 = r^2$ i ako je T izvan k onda $|TS| > r \iff |TS|^2 > r^2$. Obrati slijede iz ekvivalencija.

Primjer 1.2. a) Kako je $-r^2$ konstanta, minimum se poprima za minimalni $|TS|^2$. Kako je kvadrat uvijek veći od nule, minimum je za $|TS|^2 = 0$, tj. $T = S$.
b) Ne postoji takvo mjesto jer je $|TS|^2$ neograničeno velik za "daleke" T.
c) Ako je $\lambda = -r^2$, tada je geometrijsko mjesto samo točka S. Za $\lambda > -r^2$, rješenje je kružnica sa središtem u S jer je $-r^2$ konstanta, a AS želimo da bude konstanta ($|AS| = \sqrt{\lambda + r^2}$). Konačno, kako je $\lambda < -r^2$, uopće ne postoje takve točke (vidi a) dio zadatka).

Lema 2.2. Nađimo točku D na pravcu AB takvu da vrijedi $|AD|^2 - |BD|^2 = d$. Lako se vidi da kako mičemo točku po pravcu se izraz mijenja neprekidno i monotono, pa je očito da je izbor za svaki d njemu jedinstvena točka s pravca AB.
Sada promotrimo sve točke na pravcu koji je okomit na AB i prolazi kroz D. Uzmimo proizvoljnu T, te primijenimo Pitagorin poučak. Kako je $|AD|^2 + |DT|^2 = |AT|^2$ (i analogno za BT), oduzimanjem jednakosti dobivamo $|AD|^2 - |BD|^2 = |AT|^2 - |BT|^2$. Dakle, sve točke na tom pravcu pripadaju radikalnoj osi. Također, sve točke izvan tog pravca ne zadovoljavaju to, jer možemo iz njih spustiti nožište na AB i lako vidjeti da jednakost ne može vrijediti jer je izbor D bio jedinstven.

Teorem 2.3. Koristeći lemu 2.2., odabiremo $d = r_2^2 - r_1^2$. Lako se vidi da to ekvivalentno s time da je potencija točke na kružnicu jednaka: $|AT|^2 - |BT|^2 = r_1^2 - r_2^2 \iff |AT|^2 - r_1^2 = |BT|^2 - r_2^2$.

Teorem 2.4. Kako znamo da je radikalna os pravac okomit na spojnicu, lako se vidi da nikoje dvije radikalne osi nisu paralelne (promatraj dobiveni četverokut s dva prava kuta). Sada treba pokazati da se sijeku u istoj točki: uzmimo sjecište radikalne osi prve i druge kružnice i radikalne osi druge i treće kružnice. Kako leži na prvoj osi, onda potencija točke na prvu kružnicu mora biti jednaka potenciji točke na drugu kružnicu, a kako leži na drugoj osi, onda potencija točke na treću kružnicu mora biti jednaka potenciji točke na drugu kružnicu; pa potencija točke na prvu kružnicu mora biti jednaka potenciji točke na treću, tj. točka leži i na trećoj radikalnoj osi.

Teorem 2.5. Znamo da je radikalna os pravac okomit na spojnicu, pa nakon što izaberemo radikalnu os i jedno središte, sva ostala moraju ležati na pravcu koji je okomit na radikalnu os i prolazi kroz to središte.

Zadaci

1. Iz poučka o kutu tangente i tetive znamo da su kutovi $\angle TCB$ i $\angle TAC$ sukladni. Sada možemo primijetiti da su trokuti $\triangle TCB$ i $\triangle TAC$ slični po KK poučku jer imaju dva ista kuta. Iz toga slijedi $\frac{|TB|}{|TC|} = \frac{|TC|}{|TA|}$. Ako pomnožimo obje strane tog izraza sa $|TC| \cdot |TA|$ dobit ćemo $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

2. M je točka s KL, tj. na radikalnoj osi, pa po definiciji vrijedi da su potencije točke jednake. Lako se pokaže da po Pitagorinom poučku, te potencije točke ispadnu upravo $|AM|^2$ i $|BM|^2$, a kako duljine moraju biti pozitivne, onda slijedi i tražena jednakost.

3. Prvi smjer slijedi iz zadatka 1.1.a). Promotrimo slučaj kada znamo da je umnožak jednak, i želimo pokazati da su točke na kružnici. Želimo pokazati da su trokuti $\triangle TAD$ i $\triangle TBC$ slični. Kako imamo $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ iz čega slijedi $\frac{|TA|}{|TC|} = \frac{|TD|}{|TB|}$. Također, očito imaju jedan isti kut, zajednički kut $\angle BTC$. Dakle, ti trokuti su slični, iz čega slijedi da su $\angle TDB = \angle TAC$, tj. $\angle BDC = 180° - \angle TAC$, pa je $ABCD$ tetivan.

4. Kako je P na radikalnoj osi, onda po definiciji vrijedi da je $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ pa rezultat slijedi iz prethodnog zadatka.

5. Neka je točka gdje se sijeku svi pravci P. Iz potencije točke dobivamo $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF$ pa rezultat slijedi.

6. Iz potencije točke T na kužnicu opisanu $ABCD$ imamo $TA \cdot TB = TC \cdot TD \to \frac{TA}{2} \cdot TB = \frac{TC}{2} \cdot TD \to TE \cdot TB = TF \cdot TD$. Iz karakterizacije tetivnih četverokuta vidi se da je četverokut tetivan. Inače, ovo se pametnim sličnostima može svesti i na Reimov teorem.

7. Neka je M presjek AT i KL. Treba gledati potencije iz M na k i na još jednu kružnicu: opisanu trokutu KLT. $BCKL$ je tetivno i p i q su paralelni pa vrijedi: $|\angle KBC| = |\angle KLT| = |\angle MTK|$. Sad znamo da je MT tangenta na opisanu kružnicu trokuta KTL, a također je i na radikalnoj osi od te kružnice i k što nam automatski daje da je M polovište dužine $\overline{AT}$ (ista ideja kao u 2. zadatku; potencija točke je jednaka pa mora vrijediti da je i $|AM| = |MT|$ jer vrijedi $|AM|^2 = |MT|^2$ pošto je AT zajednička tangenta te dvije kružnice.).

8. Označimo sa S sjecište dijagonala paralelograma. Četverokut $BCDM$ je tetivan jer su mu 4 vrha na istoj kružnici. Koristimo potenciju točke S na tu kružnicu. Naime, imamo da je $|SB| \cdot |SD| = |SM| \cdot |SC|$. Znamo da se dijagonale paralelograma raspolavljaju, dakle $|SB| = |SD|$ i $|SA| = |SC|$. Uvrštavanjem dobivamo $|SM| \cdot |SA| = |SD|^2$. Ovaj je izraz upravo potencija točke S u odnosu na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ADM$ i iz toga možemo zaključiti da je pravac BD tangenta na trokut $\triangle ADM$ u vrhu D (koristimo tvrdnju dokazanu u primjeru 7.). Analogno zaključujemo i da je to tangenta na trokut $\triangle ABM$ u vrhu B. Dakle, to je zajednička tangenta tih dvaju trokuta.

9. Rješenje je na MNM-ovom youtube kanalu.

10. Kružnica promjera $\overline{BE}$ prema Talesovom poučku prolazi nožištem okomice iz točke B na stranicu $\overline{CA}$. Označimo tu točku sa M. Analogno, kružnica promjera $\overline{CF}$ prolazi nožištem N okomice iz točke C na stranicu $\overline{AB}$. Znamo da se dužine $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ sijeku u ortocentru H trokuta.
No, vrijedi

$$|BH| \cdot |HM| = |CH| \cdot |HN|.$$

Ova se činjenica može pokazati koristeći sličnost trokuta i ostavljamo je vama za vježbu. To znači da točka H ima jednake potencije na obje kružnice pa se nalazi na njihovoj radikalnoj osi, tj. pravcu koji prolazi kroz sjecišta tih kružnica.
Nadalje, iz sličnosti trokuta AMN i ABC slijedi

$$|AN| : |AM| = |AC| : |AB|.$$

No, zbog paralelnosti pravaca EF i BC slijedi

$$|AC| : |AB| = |AE| : |AF|$$

Dakle,

$$|AN| : |AM| = |AE| : |AF| \Rightarrow |AN| \cdot |AF| = |AM| \cdot |AE|.$$

Odavde slijedi da točka A ima jednake potencije na obje kružnice pa ona također leži na radikalnoj osi tih kružnica.
Dakle, vidimo da radikalna os tih dviju kružnica prolazi točkama A i H što je očito pravac kroz točku A okomit na stranicu $\overline{BC}$.

11. Rješenje je na MNM youtube kanalu: 1. video i 2. video.

12. IMO 2000

13. Eulerova relacija

14. USAMO 1998