Zimska radionica - Prebrojavanja

Mislav Brnetić

13. siječnja 2024.

Uvod

U ovom predavanju bavit ćemo se osnovnim principima prebrojavanja te osnovama dvostrukog prebrojavanja. Mnogi zadaci iz područja kombinatorike koriste upravo metode prebrojavanja kao glavnu ideju, a dvostruko prebrojavanje često se može iskoristiti za dokazivanje jednakosti nekih izraza ili za dokazivanje da neka konstrukcija ne postoji.

Neki od osnovnih principa prebrojavanja su:

1. Princip zbroja - broj elemenata unije dva disjunktna konačna skupa je suma brojeva elemenata tih skupova - ako imamo x crvenih majica i y plavih majica, ukupno imamo $x + y$ majica
2. Princip umnoška - broj elemenata Kartezijevog umnoška konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata tih skupova - ako na raspolaganju imamo x hlača i y majica, tada se možemo odjenuti na $x \cdot y$ načina
3. Princip bijekcije - dva skupa su ekvipotentna (imaju jednak broj elemenata) ako i samo ako postoji bijekcija između njih
4. Matematička indukcija

Kod rješavanja zadataka s prebrojavanjem, korisno se zapitati sljedeće:

1. Što želim prebrojati?
2. Koja svojstva ima to što želim prebrojati?
3. Mogu li prebrojati sve osim onoga što želim prebrojati (komplement)?
4. Mogu li riješiti zadatak za male primjere "na prste"?

Binomni koeficijenti

Definicija.
Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi, $n \geq k$.

Definiramo $\binom{n}{k}$ (i čitamo n *povrh* k) kao broj načina za odabrati k-člani podskup iz n-članog skupa.

Primijetite kako poredak izabranih elemenata ovdje nije bitan.

Vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

za n, k nenegativne cijele brojeve, $n \geq k$.

Na primjer, ako od 10 učenika biramo 3 učenika koja će biti u istoj grupi, to možemo napraviti na $\binom{10}{3}$ načina.

Formula uključivanja - isključivanja (FUI)

Ukoliko želimo odrediti ukupan broj elemenata više skupova koja nisu nužno disjunktna, korisno je tu situaciju vizualizirati pomoću Vennovih dijagrama. Za dva skupa lako se zaključuje i dokazuje da je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Isto se može primijeniti i za bilo koji broj skupova (*kako?*).

Dvostruko prebrojavanje

Osnovna ideja dvostrukog prebrojavanja je prebrojati broj elemenata istog skupa na dva različita načina. S obzirom da se radi o istom skupu, dobiveni rezultat mora biti jednak neovisno o načinu brojanja, pod pretpostavkom da smo ispravno brojali.

Primjer. Zbrajamo li brojeve u tablici, dobit ćemo isti rezultat zbrojimo li prvo brojeve po svim retcima te zatim zbrojimo dobivene sume, kao i ako prvo zbrojimo brojeve po stupcima.

Tako, primjerice, možemo dokazati jednakost neka dva izraza ili dokazati da neka konstrukcija nije moguća (u slučaju kada jednakost koju dobijemo prebrojavanjem na dva različita načina ne vrijedi - riječ je zapravo o metodi dokazivanja kontradikcijom).

Zadaci

1. Na koliko načina je moguće složiti sendvič ako su na raspolaganju 3 vrste peciva, 5 vrsta šunke i 4 vrste sira (sendvič ima jedno pecivo, a može imati jednu vrstu šunke i/ili jednu vrstu sira ili niti šunku niti sir)?
2. Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?
3. Na koliko načina možemo izabrati osobu koja će osvojiti kekse i dvije osobe koje će osvojiti sok među 15 osoba (nitko neće osvojiti i kekse i sok)?
4. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 3 ili sa 7?
5. Koliko ima različitih narukvica koje se sastoje od četiri crne i četiri bijele kuglice poredane ukrug? Dvije narukvice smatramo različitima ako se ne mogu okrenuti tako da poretci kuglica na njima budu isti.
6. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5?
7. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?

8. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju dijeli ravninu (svaka dva pravca se međusobno sijeku i nijedna tri pravca se ne sijeku u istoj točki)?

9. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

10. Učenici 6 razreda odlaze na izlet te mogu birati između tri destinacije, A, B i C pri čemu na svaku destinaciju mora otići barem jedan razred. Na koliko načina to mogu učiniti?

11. Koliko anagrama ima riječ $MATEMATIKA$?

12. 15 učenika sudjeluje na zimskoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Zimska škola traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredite k.

13. Dokažite sljedeće identitete kombinatornim argumentima (tj. pronađite dva načina prebrojavanja istog skupa takva da jedno predstavlja lijevu, a drugo desnu stranu jednakosti):

    (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

    (b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

    (c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

    (d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

    (e) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

    (f) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2) \cdot 2^{n-2}$

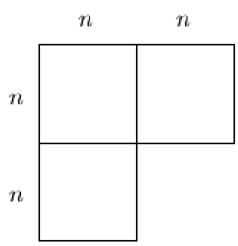
14. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

15. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

16. (*Chu Shih-Chieh*) (Kombinatorno) dokažite da vrijedi

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

17. Neka je n prirodan broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 kvadratića. Koliko je pravokutnika na slici?



18. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

19. Na koliko načina se može parkirati 10 vozila na 40 parkirnih mjesta tako da je između svaka dva vozila barem jedno prazno parkirno mjesto?

20. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist pretječe ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe. Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokažite da vrijedi
$$2A = B$$

21. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$.

Rješenja

1. Pecivo se može izabrati na 3 načina, šunka na 6 načina (bez šunke ili sa jednom od vrsta), a sir na 5 načina. Dakle rješenje je $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

2. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje 8!.

3. Prvu osobu možemo izabrati na 15 načina, a drugu na 14 načina, a treću na 13 načina, no s obzirom da nije bitan poredak druge i treće osobe to dijelimo sa 2. Dakle rješenje je $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2}$.

4. Brojeva manjih od 1000 i djeljivih sa 3 je 333, a djeljivih sa 7 je 142. Broj je djeljiv i sa 3 i sa 7 ako i samo ako je djeljiv sa 21, a takvih manjih od 1000 ima 47 pa je po FUI rješenje $333 + 142 - 47 = 428$.

5. Školsko natjecanje 2015. SŠ A-2.5.

6. Svih peteroznamenkastih brojeva ima 90000, a onih koji nemaju znamenku 5 ima $8 \cdot 9^4$. Dakle, rješenje je $90000 - 8 \cdot 9^4$.

7. Ako broj šahista označimo s x, a broj penzionera s y, iz uvjeta zadatka vrijedi da je broj ljudi koji su i šahisti i penzioneri jednak:
$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$$

$$\implies 3x = 4y$$
$$\implies x > y$$

Dakle, u tom društvu ima više šahista nego penzionera.

8. Prvo primijetimo kako 1 pravac dijeli ravninu na dva dijela. Ako je a_{n-1} broj dijelova ravnine na koji ju dijeli $n-1$ pravac, dodavanjem još jednog pravca (koji će postojeće sijeći u $n-1$) točki se broj dijelova ravnine povećava za n odnosno vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Kako vrijedi $a_1 = 2$, indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

9. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A-4.3.

10. Županijsko natjecanje 1999., SŠ A-4.3. - rješenje za 3 destinacije je analogno

11. Ukupno permutacija slova u riječi (ako sva slova međusobno razlikujemo) ima 10!. S obzirom da se slovo M ponavlja dvaput, slovo A 3 puta i slovo T 2 puta, svaku riječ smo zapravo brojali $2 \cdot 6 \cdot 2$ puta. Naime, fiksirani anagram mogli smo dobiti bilo kojim poretkom jednakih slova, tj. bilo kojom permutacijom tih slova, a broj tih permutacije je upravo jednak $2 \cdot 6 \cdot 2$.

    Zato je ukupni broj anagrama jednak

$$\frac{10!}{2 \cdot 6 \cdot 2}.$$

12. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$ različitih parova.

    Svaki dan, među 3 učenika koja čiste učionicu, pojavljuju se točno 3 različita para.

    Dakle, kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, broj parova učenika jednak je i $3 \cdot k$.

    Imamo $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.

13. (a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

    S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

    (b) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

    S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.

    S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.

    Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

(c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.

To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.

S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

(d) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

(e) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba.

S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru :)).

(f) Biramo ekipu od k osoba, a zatim predsjednika i podpredsjednika, koji mogu biti i jedna te ista osoba.

S druge strane, raspišemo li izraz s desne strane, dobivamo

$$(n+n^2)\cdot 2^{n-2} = (n+n+n\cdot(n-1))2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

što je jednaku zbroju načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao istu osobu (i preostale članove između ostalih ljudi) i načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao različite osobe (i zatim preostale članove između ostalih ljudi).

14. Azra Tafro, Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, 3. zadatak

Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima. Drugim riječima, za svaki pravokutnik na ploči treba odrediti koliko doprinosi zbroju brojeva na ploči, a to je jednako njegovoj površini. Preostaje odrediti tu sumu koja je oblika

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij\cdot(n-i+1)(n-j+1))$$

15. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak

16. Krenimo od desne strane jednakosti.

Desna strana jednakosti predstavlja broj $k+1$-članih podskupova $n+1$-članog skupa.

Neka je naš skup oblika $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$.

S lijeve strane promatrajmo koji je prvi element (s najmanjim indeksom) koji je izabran. Ako je prvi izabrani element x_i, preostale elemente možemo izabrati na $\binom{n-i}{k}$ načina.

Dakle, lijeva strana je upravo suma broja načina izbora podskupova za svaki izbor prvog elementa, pa predstavlja istu stvar kao i desna strana.

17. Županijsko natjecanje 2013., SŠ A-4.3.

18. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 10. zadatak

19. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!.

    Zatim fiksirajmo redoslijed vozila te njima pridružimo parkirna mjesta. Prvo između svaka dva vozila postavimo po jedno parkirno mjesto. Preostalo je još 21 neupotrijebljenih parkirnih mjesta od kojih svako možemo postaviti na 11 lokacija u odnosu na automobile, a to možemo promatrati kao kombinaciju s ponavljanjem te napraviti na $\binom{31}{10}$ načina.

    Zato je traženi broj rasporeda $\binom{31}{10} \cdot 10!$

    Primijetite kako je navedeni način prebrojavanja ispravan s obzirom da ne razlikujemo parkirna mjesta, već samo njihov broj i položaj u odnosu na automobile (što je ekvivalentno početnom problemu raspoređivanja automobila).

20. Državno natjecanje 2016. SŠ A-4.5.

21. Državno natjecanje 2001., SŠ-A 4.4