Zimska radionica - Nejednakosti

Stella Čolo

14. siječnja 2024.

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada definiramo

- aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$
- geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$
- harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}}$$
- kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Vrijedi
$$K \geq A \geq G \geq H$$
Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Cauchy-Schwarz nejednakost(CSB) Za realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, .., b_n$ vrijedi
$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... a_n b_n)^2$$

Zadaci

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c.$$
2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$
3. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $a^2+b^2+c^2 = 3$ vrijedi nejednakost:
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$
4. (*Nesbittova nejednakost*) Dokažite da za sve pozitivne realne a, b, c vrijedi
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da $abc = 1$. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

7. (JBMO 2013.)Dokazati da je za $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $ab \geq 1$

$$\left(a + 2b + \frac{2}{b+1}\right)\left(2a + b + \frac{2}{a+1}\right) \geqslant 16$$

8. (Drz. 2022 2.raz) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2b + c + 2} + \frac{b + a\sqrt{b}}{b^2c + a + 2} + \frac{c + b\sqrt{c}}{c^2a + b + 2} \leq \frac{a + b + c}{2}.$$

9. (HMOD 2022.) Neka su a, b, c, d, pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 4$. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{a}{a^3+5} + \frac{b}{b^3+5} + \frac{c}{c^3+5} + \frac{d}{d^3+5} \leq \frac{2}{3}$$

10. (HMO 2013. MEMO test)Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Dokaži nejednakost:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_3a_4} + ... \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1a_2} \geq \frac{1}{2}$$